Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I WS 2009/10

Abgabe: Aufgabe 2-4 am 28.10.2009 in der Vorlesung, Aufgabe 1 in den Übungen vom 28.10.-2.11.

Aufgabe 1
(1) Seien die folgenden Aussagen gegeben:
(a) Für zwei ganze Zahlen a, b gelte $a \cdot b = 0$. Dann ist $a = 0$ oder $b = 0$.
(b) Für drei rationale Zahlen r, s, t gelte $r^2 + s^2 + t^2 = 0$. Dann ist $r = 0$ und $s = 0$ und $t = 0$.
Fomulieren Sie die äquivalenten Kontrapositionen. Formulieren Sie die Negationen (auch wenn diese falsch sind!).

(2) Negieren Sie das Parallelen-Axiom: Für jede Gerade g und jeden Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \emptyset$: $\forall g \in G\ \forall P \notin g\ \exists! h \in G$: $(P \in h) \wedge (g \cap h = \emptyset)$. Dabei bezeichne G die Menge der Geraden.

(3) Seien A, B, C Aussagen. Erstellen Sie die Wahrheitstafel für folgende logische Verknüpfung:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A).$$

Vereinfachen Sie den Ausdruck.

Aufgabe 2
Beweisen Sie folgende Behauptung mit vollständiger Induktion:
Für alle rellen $x \geq -1$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $n = 1$ oder $x = 0$.

Aufgabe 3
Beweisen Sie die Aussagen (a) und (b) aus Aufgabe 1 (1).

Aufgabe 4
Die *Fibonacci-Zahlen* sind wie folgt definiert:
$a_1 := 1, a_2 := 1, \forall k \geq 3 : a_k := a_{k-1} + a_{k-2}$.
Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folge. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion folgende explizite Formel:

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^k$$

Hinweis: Die Benutzung der binomischen Formeln für beliebige Potenzen ist nicht ratsam. Sortieren Sie im Induktionsschritt die Potenzen mit gleicher Basis und klammern Sie die höchste gemeinsame Potenz aus. Berechnen Sie den sich ergebenen Faktor: hier müssen Sie nun die Klammern auflösen, d.h. die quadratischen binomischen Formeln benutzen.