ÜBUNGSBLATT 5

PETER HERBRICH

Aufgabe 19. *Rand einer topologischen Mannigfaltigkeit*

Aus den Sätzen über die Invarianz des Gebietes und der Dimension gewinnt man folgende Charakterisierung des Randes ∂M einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand M

$$\begin{aligned} \partial M &= \{x \in M | \exists (U, \varphi) \text{ mit } x \in U \in \mathcal{O}(M), \varphi : U \to \varphi(U) \in \mathcal{O}(\mathbb{H}^n) \text{ Homöo.} : \varphi(x) \in \partial \mathbb{H}^n\} \\ &= \{x \in M | \forall (V, \psi) \text{ mit } x \in V \in \mathcal{O}(M), \psi : V \to \psi(V) \in \mathcal{O}(\mathbb{H}^n) \text{ Homöo.} : \psi(x) \in \partial \mathbb{H}^n\} . \end{aligned}$$

Der Rand ∂M ist als Teilmenge des topologischen Raumes M mit der Teilraumtopologie versehen. Im Folgenden wird gezeigt, dass er mit dieser Topologie sogar eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist. Dazu genügt es lokale Homöomorphismen zu offenen Teilmengen im $\mathbb{R}^{n-1}$ zu konstruieren. Als Teilraum $\partial M \subset M$ ist der Rand hausdorffsch und besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis, da M als Mannigfaltigkeit diese Eigenschaften hat.

Der Beweis gliedert sich in drei Schritte:

- Einschränkungen von Homöomorphismen sind wieder Homöomorphismen auf ihr Bild.
- Es gilt $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \approx \partial \mathbb{H}^n$ und die Inklusion i ist ein Homöomorphismus
$$i : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial \mathbb{H}^n \qquad \text{mit} \qquad i : x \mapsto (x, 0) .$$
- Für Hömöomorphismen φ wie oben gilt
$$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n .$$

Sind diese Fakten verifiziert, so lassen sich lokale Homöomorphismen für Elemente des Rand angeben. Sei dazu $x \in \partial M$ beliebig vorgegeben und (U, φ) wie oben gewählt. Da $\varphi(U)$ in $\mathbb{H}^n$ offen ist, folgt

$$\varphi(U \cap \partial M) = \varphi(U) \cap \partial \mathbb{H}^n \in \mathcal{O}(\partial \mathbb{H}^n) .$$

Auf Grund der Stetigkeit von i ist deshalb die Menge $i^{-1}(\varphi(U \cap \partial M)) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen. Nach Obigem stellt die Einschränkung von φ auf den Rand der Mannigfaltigkeit einen Homöomorphismus auf sein Bild im $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \approx \partial \mathbb{H}^n$ dar, mittels i^{-1} wird diese Einschränkung ein Homöomorphismus auf eine offene Menge im $\mathbb{R}^{n-1}$. Die folgende Abbildung Φ ist der gewünschte lokale Homöomorphismus

$$\Phi : U \cap \partial M \to i^{-1}(\varphi(U \cap \partial M)) \subset \mathbb{R}^{n-1} \qquad \text{mit} \qquad \Phi : z \mapsto i^{-1}(\varphi(z)) .$$

Es genügt somit die obigen Fakten nachzuweisen.

- Für einen Homöomorphismus $\phi : P \to Q$ und eine Teilmenge $R \subset P$ sei $\overline{\phi}$ die Einschränkung
$$\overline{\phi} : R \to \phi(R) \qquad \text{mit} \qquad \overline{\phi} : z \mapsto \phi(z)$$
Die Bijektivität von $\overline{\phi}$ folgt aus derjenigen von ϕ. $\overline{\phi}$ ist als Einschränkung einer stetigen Abbildung wieder stetig. Sei dazu $S \subset \phi(R)$ offen, d.h. es gibt eine Teilmenge $T \in \mathcal{O}(Q)$ mit $S = T \cap \phi(R)$. Dann ist
$$\overline{\phi}^{-1}(S) = \overline{\phi}^{-1}(T \cap \phi(R)) = \phi^{-1}(T) \cap R \in \mathcal{O}(R) .$$
Die Offenheit von $\overline{\phi}$ ergibt sich analog mit $S \in \mathcal{O}(R)$, also $S = T \cap R$ und $T \in \mathcal{O}(P)$
$$\overline{\phi}(S) = \phi(T \cap R) = \phi(T) \cap \phi(R) \in \mathcal{O}(\phi(R)) .$$

- Die Identität stellt für die Räume $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty) \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ einen Homöomorphismus dar, da die Homöomorphie $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, nach Wahl der Maximumsnorm (Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$), offensichtlich ist. Deshalb gilt mit der Identität auch $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \approx \partial\mathbb{H}^n$. Es wird nun die Homöomorphie von i gezeigt
$$i : \mathbb{R}^{n-1} \to \partial\mathbb{H}^n \approx \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \qquad \text{mit} \qquad i : x \mapsto (x, 0)\ .$$
Die Bijektivität ist evident. Die Stetigkeit und Offenheit ergeben sich wie folgt: Sei zunächst $V = \bigcup_{j\in J} W_j \times Z_j \in \mathcal{O}\left(\mathbb{R}^{n-1} \times [0,\infty)\right)$ mit $W_j \in \mathcal{O}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$ sowie $Z_j \in \mathcal{O}\left([0,\infty)\right)$ beliebig vorgegeben. Dann ist das Urbild der teilraumoffenen Menge $V \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right)$
$$i^{-1}\left(V \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right)\right) = i^{-1}\left(\bigcup_{j\in J:0\in Z_j} W_j \times \{0\}\right) = \bigcup_{j\in J:0\in Z_j} W_j \in \mathcal{O}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)\ .$$
Ist andererseits $U \subset \mathcal{O}\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, so folgt
$$i\left(U\right) = \left(U \times [0,1)\right) \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right) \in \mathcal{O}\left(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\right)\ .$$
- Sei das Paar (U,φ) wie in der Definition des Randes ∂M gegeben, es gilt folgende Identität von Mengen zu zeigen
$$\varphi\left(U \cap \partial M\right) = \varphi\left(U\right) \cap \partial\mathbb{H}^n$$
Die Inklusion $\varphi\left(U \cap \partial M\right) \subset \varphi\left(U\right) \cap \partial\mathbb{H}^n$ ergibt sich aus der Charakterisierung des Randes, denn $x \in \partial M$ wird unter φ in der Rand von $\mathbb{H}^n$ abgebildet. Dagegen folgt aus $z \in \varphi\left(U\right) \cap \partial\mathbb{H}^n$, dass $\varphi^{-1}\left(\{z\}\right) \neq \emptyset$. Insbesondere gibt es ein $x \in U$ mit
$$\varphi\left(x\right) = z \in \partial\mathbb{H}^n\ ,$$
also $x \in \partial M$. Damit ist auch $\varphi\left(U \cap \partial M\right) \supset \varphi\left(U\right) \cap \partial\mathbb{H}^n$ gezeigt.