ÜBUNGSBLATT 8

PETER HERBRICH

Aufgabe 28. *Homöomorphismen werden zu Isomorphismen*

Sei $\varphi : X \to Y$ ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen mit stetiger Umkehrabbildung φ^{-1}. Die Funktorialität von A liefert die Bijektivität von $A(\varphi)$ mit Umkehrabbildung $A\left(\varphi^{-1}\right)$.

Im kovarianten Fall folgt dies aus

$$\begin{array}{rcccccl} id_{A(X)} & = & A(id_X) & = & A\left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right) & = & A\left(\varphi^{-1}\right) \circ A(\varphi) \\ id_{A(Y)} & = & A(id_Y) & = & A\left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right) & = & A(\varphi) \circ A\left(\varphi^{-1}\right) . \end{array}$$

Der kontravariante Fall ergibt sich aus

$$\begin{array}{rcccccl} id_{A(Y)} & = & A(id_Y) & = & A\left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right) & = & A\left(\varphi^{-1}\right) \circ A(\varphi) \\ id_{A(X)} & = & A(id_X) & = & A\left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right) & = & A(\varphi) \circ A\left(\varphi^{-1}\right) . \end{array}$$

Aus der jeweils ersten Gleichung folgt die Injektivität von $A(\varphi)$, die jeweils zweite Gleichung sichert die Surjektivität von $A(\varphi)$.

Aufgabe 29. *Homotopieklassifikation punktierter, geschlossener Flächen*

Für diese Aufgabe bietet sich ein "proof per picture" an, weshalb im Folgenden ein an die Anschauung appellierender Beweis geführt wird. Die angesprochenen Homotopien werden nicht explizit angegeben.

Homöomorphe Räume sind erst recht homotop, denn als Abbildungen zwischen diesen Räumen können der Homöomorphismus und seine stetige Umkehrung gewählt werden. Aus dem Klassifikationsbeweis geschlossener Flächen ist bekannt, dass jede solche Fläche M^2 homöomorph zu einem $2n$-Eck P_{2n} mit paarweise identifizierten Kanten ist (Typen: S^2, $T^2 \# \ldots \# T^2$ sowie $\mathbb{RP}^2 \# \ldots \# \mathbb{RP}^2$).

Sei zunächst M^2 homöomorph zur Sphäre S^2. Die punktierte Sphäre ist nach geeigneter Drehung das Bild der stereografischen Projektion, also homöomorph zu $\mathbb{R}^2$. Aber $\mathbb{R}^2$ ist als konvexe Menge homotop zu einem Punkte, selbiges gilt dann für M^2.

Für die von S^2 verschiedenen Typen von geschlossenen Flächen kann zusätzlich gefordert werden, dass alle Eckpunkte des homöomorphen $2n$-Ecks äquivalent sind. Jeder Kopie von T^2 sollen genau 4 Kanten in P_{2n} entsprechen (Wort je Kopie: $a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$), jeder Kopie von $\mathbb{RP}^2$ hingegen genau 2 Kanten (Wort je Kopie: $a_i a_i$). Die zugehörigen Wörter lauten in den beiden Fällen

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \ldots a_{n/2} b_{n/2} a_{n/2}^{-1} b_{n/2}^{-1} \qquad \text{bzw.} \qquad a_1 a_1 a_2 a_2 \ldots a_n a_n .$$

Sei also o.B.d.A. $M^2 = P_{2n}/\sim$ und $x \in M$ beliebig gegeben. Dann ist $P_{2n} \setminus \{x\}$ homotop zu $P_{2n} \setminus \{e\}$ mit e als Äquivalenzklasse der Eckpunkte, denn das "innere Loch" x kann stetig zu einem der äquivalenten Eckpunkte herausgezogen werden. Dem entstandenen $2n$-Eck fehlen sämtliche Eckpunkte. Diese Löcher können nun homotop vergrößert werden bzw. der Raum mit vergrößerten Löchern ist homotop zu $P_{2n} \setminus \{e\}$. Diese homotope Verzerrung kann fortgeführt werden, bis nur noch einzelne, am Mittelpunkt von P_{2n} beginnnende Strecken mit paarweise identifizierten Endpunkten übrig bleiben. Damit ist $M^2 \setminus \{x\}$ homotop zu einem Stern mit $2n$ Zacken und jeweils paarweise identifizierten Endpunkten. Dies ist aber ein zur Einpunktvereinigung von n Kreislinien homöomorpher Raum, wobei je zwei zusammengehörige Zacken einer Kopie der Kreislinie S^1 in $\bigvee_{k=1}^{n} S^1$ entsprechen.

Gilt nun $M^2 \approx T^2 \# \ldots \# T^2$ mit m Kopien von T^2, so ist M^2 homotop zu $\bigvee_{l=1}^{2m} S^1$. Aus der Homöomorphie $M^2 \approx \mathbb{RP}^2 \# \ldots \# \mathbb{RP}^2$ mit m Kopien von $\mathbb{RP}^2$ folgt dagegen die Homotopie von M^2 und $\bigvee_{l=1}^{m} S^1$. Eine ungerade Anzahl an Kreislinien S^1 in der Einpunktvereinigung weist beispielsweise auf den Homöomorphietyp $\mathbb{RP}^2 \# \ldots \# \mathbb{RP}^2$ hin.

Aufgabe 30.

a). Es gilt einen vorgegebenen Homöomorphismus $\varphi : \partial D^n \to \partial D^n$ des Randes $\partial D^n = S^{n-1}$ der abgeschlossenen Vollkugel D^n als Homöomorphismus $\Phi : D^n \to D^n$ auf die gesamte Kugel fortzusetzen. Die gesuchte Abbildung lässt sich durch "Abschälen" der Kugel realisieren. Zentraler Beweisschritt sind die folgenden Lemmata.

Definition. Für Teilmengen $U \subset \partial D^n$ und $r \in [0,1)$ sowie $\epsilon > 0$ sei der Kegelstumpf mit Deckfläche U und Radien r und $r+\epsilon$ gegeben durch

$$K(U,r,\epsilon) := \{r' \cdot x \in D^n |\, x \in U, r' \in (r, r+\epsilon)\} \subset D^n \setminus \{0\} \,.$$

Lemma. *Ist $U \subset \partial D^n$ offen, so auch die Menge $K(U,r,\epsilon) \subset D^n$.*

Beweis. Aus $x \in K(U,r,\epsilon)$ folgt nach Definition $0 \le r < \|x\| \le min\{1, r+\epsilon\}$. Wegen der Offenheit von $U \subset \partial D^n$ gibt es ein $\delta \in (0,1)$ mit

$$V := B\left(\|x\|^{-1} \cdot x, \delta\right) \cap \partial D^n \subset U \,.$$

Leichte Rechnung zeigt, dass es einen Ball $B(\rho \cdot x, \delta')$ mit $\rho > 0$ und $\delta' > 0$ gibt, so dass weiterhin

$$V = B(\rho \cdot x, \delta') \cap \partial D^n$$

gilt und zusätzlich Radien von D^n mit Endpunkt auf ∂V stets tangential an diesen Ball liegen (der Ball liegt im "Trichter um V"). Dann ist

$$K(V,r,\epsilon) = \left[\left(\bigcup_{r' \in (0,\infty)} r' \cdot B(\rho \cdot x, \delta')\right) \cap B(0, r+\epsilon) \cap D^n\right] \Big\backslash \overline{B(0,r)}$$

und x liegt in der offenen Menge $K(V,r,\epsilon) \subset K(U,r,\epsilon)$. □

Zeigt man alternativ die Homöomorphie der Polarkoordinatenabbildung, so ist obiges Lemma ein einfaches Korollar. Der obigen Menge V entspricht beispielsweise eine offene Teilmenge der Winkelbereiche.

Lemma. *Die Topologie auf $D^n \setminus \{0\}$, betrachtet als Teilraum von $\mathbb{R}^n$, ist identisch mit derjenigen, die von der Menge aller offenen Kegelstümpfe obiger Gestalt erzeugt wird.*

Beweis. Das vorherige Lemma zeigte, dass jeder Kegelstumpf mit offener Deckfläche Vereinigung teilraumoffener Bälle in D^n ist. Analog zeigt man für festes $x \in D^n$, dass jeder Ball im $\mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x noch einen Kegelstumpf wie zuvor enthält. Damit ist die Menge aller Kegelstümpfe obiger Gestalt ebenfalls eine Basis der Topologie von $D^n \setminus \{0\}$. □

Mit diesen Vorbereitungen lässt sich der gesuchte Homöomorphismus $\Phi : D^n \to D^n$ angeben

$$\Phi(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \|x\| \cdot \varphi\left(\|x\|^{-1} \cdot x\right) & x \neq 0\,. \end{cases}$$

Sei S_r^{n-1} die Kugelschale mit Radius r

$$S_r^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n |\, \|x\| = r\}\ .$$

Dann ist für $r > 0$ die Kontraktion k_r der Kugelschalen S_1^{n-1} und S_r^{n-1} ein Homöomorphismus

$$k_r : S_1^{n-1} \to S_r^{n-1} \qquad x \to r \cdot x\,.$$

Mit dieser Notation ist

$$\Phi_{|S_r^{n-1}} = k_r \circ \varphi \circ k_r^{-1}\,.$$

Also bildet Φ die Kugelschalen S_r^{n-1} mit $0 \leq r \leq 1$ bijektiv auf sich selbst ab, womit Φ insgesamt bijektiv ist. Für $x \in \partial D^n = S_1^{n-1}$, d.h. $\|x\| = 1$, gilt

$$\Phi(x) = 1 \cdot \varphi(1 \cdot x) = \varphi(x)\ ,$$

also $\Phi_{|\partial D^n} = \varphi$. Es genügt also die Stetigkeit und Offenheit von Φ zu zeigen. Nach obigen Lemmata bildet die Menge aller Kegelstümpfe mit offener Deckfläche vereinigt mit der Menge aller zentrierten Bälle $B(0,r) \cap D^n$ eine Basis der Topologie auf D^n. Die Bijektivität von Φ liefert für $r + \epsilon \leq 1$

$$\begin{aligned} \Phi^{(-1)}(K(U,r,\epsilon)) &= \Phi^{(-1)}\left(\bigcup\nolimits_{\rho\in(r,r+\epsilon)} k_\rho(U)\right) = \bigcup\nolimits_{\rho\in(r,r+\epsilon)} \Phi^{(-1)}_{|S_\rho^{n-1}}(k_\rho(U)) \\ &= \bigcup\nolimits_{\rho\in(r,r+\epsilon)} k_\rho\left(\varphi^{(-1)}(U)\right) = K\left(\varphi^{(-1)}(U), r, \epsilon\right)\ . \end{aligned}$$

Wegen der Homöomorphie von φ sind sowohl $\varphi(U)$ als auch $\varphi^{-1}(U)$ offene Mengen. Im Fall $r + \epsilon > 1$ ist lediglich das Intervall $(r, r+\epsilon)$ durch $(r, 1]$ zu ersetzen. Auch offene, zentrierte Bälle werden von Φ bzw. von Φ^{-1} auf ebensolche abgebildet, sei dazu $r \leq 1$

$$\Phi^{(-1)}(B(0,r)) = \Phi^{(-1)}\left(\bigcup_{\rho\in[0,r)} k_\rho\left(S_1^{n-1}\right)\right) = \bigcup_{\rho\in[0,r)} k_\rho\left(\varphi^{(-1)}\left(S_1^{n-1}\right)\right) = \bigcup_{\rho\in[0,r)} k_\rho\left(S_1^{n-1}\right) = B(0,r)\ .$$

b). Sei $\sigma : [0,1] \to X$ eine in $x = \sigma(0) = \sigma(1)$ geschlossene Kurve in X, die homotop zum konstanten Weg $\omega_x : [0,1] \to X$ mit $\omega_x(t) := x$ ist. Weiterhin ist $exp : [0,1] \to \partial D^2 \simeq S^1 \subset \mathbb{C}$ gegeben durch $exp(t) := e^{2\pi\sqrt{-1}\,t}$. Auch hier erhält man die gesuchte, stetige Fortsetzung $\Sigma : D^2 \to X$ mit $\sigma = \Sigma \circ exp$ durch “Abschälen” des Vollkreises. Da $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ kanonisch homöomorph sind, wird aus praktischen Gründen D^2 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ aufgefasst. Aus der elementaren Analysis ist bekannt, dass jede komplexe Zahl mit positivem Betrag eine eindeutige Darstellung der Form $z = |z| \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}\,arg(z)}$ mit $arg(z) \in [0,1)$ besitzt. Vielmehr noch gilt, dass die zugehörige Polarkoordinatenabbildung

$$P : (0,1] \times (0,1) \to D^2_- := D^2 \setminus \{z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C} |\, Re(z) \geq 0\} \qquad \text{mit} \qquad P(r,\varphi) := r \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}\,\varphi}$$

einen Homöomorphismus auf die geschlitzte Kreisscheibe D^2_- darstellt.

Sei nun H die nach Voraussetzung existierende Homotopie zwischen σ und ω_x relativ $\{0,1\}$, d.h. $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ ist stetig und für $s, t \in [0,1]$ gelten

$$H(0,t) = \omega_x(t) \qquad H(1,t) = \sigma(t) \qquad H(s,0) = H(s,1) = x\,.$$

Dann ist $\Sigma : D^2 \to X$ gegeben durch

$$\Sigma\left(|z| \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}\,arg(z)}\right) := \begin{cases} x & z = 0 \\ H(|z|, arg(z)) & z \neq 0\,. \end{cases}$$

Wegen $H(1,0) = H(1,1)$ gilt für beliebiges $t \in [0,1]$

$$\Sigma(exp(t)) = \Sigma\left(1 \cdot e^{2\pi\sqrt{-1}\,t}\right) = H(1,t) = \sigma(t)\ .$$

Es muss noch die Stetigkeit von Σ gezeigt werden. Da D^2 das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, genügt es die Folgenstetigkeit von Σ nachzuweisen.

Jede gegen ein $z \in D^2_-$ konvergente Folge liegt wegen der Offenheit von $D^2_- \subset D^2$ ab einem genügend großen Folgenindex in D^2_-. Mit den kanonischen Projektionen π_1 und π_2 auf $(0,1]$ bzw. $(0,1)$ und der Inklusion $\iota_{D^2_-} : D^2_- \to D^2_- \times D^2_-$ mit $\iota(w) = (w,w)$ (siehe Lemmata vor zweitem Teil der Aufgabe 31) ergibt sich die Konvergenz der Bildfolge aus

$$\Sigma_{|D^2_-} = H_{|(0,1]\times(0,1)} \circ \left(\pi_1 \circ P^{-1} \times \pi_2 \circ P^{-1}\right) \circ \iota_{D^2_-} .$$

Seien nun $z \in \mathbb{R}$ mit $0 < z < 1$ und eine gegen z konvergente Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^2$ gegeben. Diese liegt ab einem genügend großen Folgenindex in der punktierten Kreisscheibe $D^2 \setminus \{0\}$. Die Konvergenz gegen eine positive reelle Zahl impliziert (Betrachtung von Kegelstümpfen mit offener Deckfläche)

$$min\left(arg\left(z_n\right), 1 - arg\left(z_n\right)\right) \to 0 .$$

Sei $U \subset X$ eine beliebige offene Umgebung von $\Sigma(z) = H(|z|, 0) = x$. Auf Grund der Stetigkeit von H ist $H^{-1}(U)$ eine offene Menge in $[0,1] \times [0,1]$, die wegen $H(.,0) = H(.,1) \equiv x$ die Fasern $[0,1] \times \{0\}$ und $[0,1] \times \{1\}$ enthält. Entsprechend dem Tubenlemma gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass noch $[0,1] \times [0,\epsilon)$ sowie $[0,1] \times (1-\epsilon, 1]$ in $H^{-1}(U)$ liegen. Die obige Konvergenz impliziert nun, dass es ein N_ϵ gibt mit

$$\forall\, n \geq N_\epsilon : \, arg\left(z_n\right) < \epsilon \qquad \text{oder} \qquad 1 - arg\left(z_n\right) < \epsilon$$

bzw.

$$\forall\, n \geq N_\epsilon : \, \Sigma\left(z_n\right) \in H\left([0,1] \times [0,\epsilon)\right) \cup H\left([0,1] \times (1-\epsilon, 1]\right) \subset U .$$

Eine gegen 0 konvergente Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^2$ impliziert die Konvergenz $|z_n| \to 0$. Ist nun wieder $U \subset X$ eine beliebige offene Umgebung von $x = \Sigma(0)$, so muss $H^{-1}(U)$ wegen der Stetigkeit von H eine offene Menge in $[0,1] \times [0,1]$ sein. Diese enthält wegen $H(0,.) = \omega_x(.) \equiv x$ die Faser $\{0\} \times [0,1]$ und nach dem Tubenlemma sogar eine Tube der Form $[0,\epsilon) \times [0,1]$ mit $\epsilon > 0$. Für genügend großes N_ϵ gilt also

$$\forall\, n \geq N_\epsilon : \, |z_n| < \epsilon \qquad \text{bzw.} \qquad \Sigma\left(z_n\right) \in H\left([0,\epsilon) \times [0,1]\right) \subset U .$$

Aufgabe 31. *Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe*

Seien $\bullet, \star : G \times G \to G$ zwei Operationen auf einer Menge G mit

(i) $\exists e \in G \forall x \in G : x = e \star x = x \star e = e \bullet x = x \bullet e$
(ii) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in G : (x_1 \star x_2) \bullet (y_1 \star y_2) = (x_1 \bullet y_1) \star (x_2 \bullet y_2)$.

Mit beliebigen $x, y \in G$ ergibt sich nach Wahl von $x_1 = x$, $x_2 = e$, $y_1 = e$ und $y_2 = y$ in (ii) die Übereinstimmung von $\bullet$ und $\star$

$$x \bullet y = (x \star e) \bullet (e \star y) = (x \bullet e) \star (e \bullet y) = x \star y \,.$$

Andererseits folgt mit $x_1 = e$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ und $y_2 = e$ die Kommutativität von $\bullet$ bzw. $\star$

$$x \bullet y = (e \star x) \bullet (y \star e) = (e \bullet y) \star (x \bullet e) = y \star x = y \bullet x \,.$$

Vor dem zweiten Teil der Aufgabe zunächst zwei kurze Lemmata.

Lemma. *(i) Sei für $i \in \{1, 2\}$ die Abbildung $f_i : X_i \to Y_i$ mit topologischen Räumen X_i und Y_i stetig. Dann ist auch die Produktabbildung $f_1 \times f_2$ stetig*

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2 \qquad (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)) \,.$$

(ii) Für beliebige topologische Räume X ist die Inklusion von X in die Diagonale von $X \times X$ stetig

$$\iota_X : X \to X \times X \qquad x \mapsto (x, x) \,.$$

Beweis. (i) Die Produkttopologie besitzt als Basis die Menge aller Produkte offener Mengen. Sei für $i \in \{1, 2\}$ jeweils $U_i \subset Y_i$ offen, so folgt wegen $f_1^{-1}(U_1) \in \mathcal{O}(X_1)$ und $f_2^{-1}(U_2) \in \mathcal{O}(X_2)$

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(U_1 \times U_2) = f_1^{-1}(U_1) \times f_2^{-1}(U_2) \in \mathcal{O}(X_1 \times X_2) \,.$$

(ii) Mit $U, V \in \mathcal{O}(X)$ gilt $\iota_X^{-1}(U \times V) = U \cap V \in \mathcal{O}(X)$. □

Lemma. *Sei $(T, \cdot)$ eine topologische Gruppe, dann sind die folgenden Abbildungen stetig*

$$\begin{aligned} inv : T \to T &\qquad g \mapsto g^{-1} \\ mult : T \times T \to T &\qquad (g, h) \mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

Beweis. Die Inklusion $\iota : T \to T \times T$ mit $\iota(h) = (e, h)$ ist stetig, denn $\pi_1 \circ \iota$ und $\pi_2 \circ \iota$ mit den kanonischen Projektionen π_1 und π_2 sind stetig. Laut Definition einer topologischen Gruppe ist die Abbildung $\varphi : T \times T \to T$ mit $\varphi(g, h) = g \cdot h^{-1}$ stetig. Dann sind aber auch $inv = \varphi \circ \iota$ sowie $mult = \varphi \circ (id_T \times inv)$ stetig. □

Sei im Folgenden $(T, \cdot)$ eine fixierte topologische Gruppe mit 1-Element e. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(T, e)$ ist die Menge aller Homotopieklassen von stetigen, in e geschlossenen Wegen $\sigma : [0, 1] \to T$, d.h. $\sigma(0) = \sigma(1) = e$. In der Vorlesung wurde der Fundamentalgruppe durch die folgende Operation $\star$ eine Gruppenstruktur zugewiesen. Sind σ_1 und σ_2 stetige, in e geschlossene Wege ($\sigma_i : [0, 1] \to T$ mit $\sigma_i(0) = \sigma_i(1) = e$), so ist $\sigma_1 \star \sigma_2$ gegeben durch

$$\sigma_1 \star \sigma_2 : t \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \sigma_1(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \sigma_2(2t - 1) & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Dies induziert eine ebenfalls mit $\star$ bezeichnete Gruppenopertion auf der Menge $\pi_1(T, e)$

$$\star : \pi_1(T, e) \times \pi_1(T, e) \to \pi_1(T, e) \qquad \text{mit} \qquad [\sigma_1] \star [\sigma_2] := [\sigma_1 \star \sigma_2] \,.$$

Unter Ausnutzung der Gruppenstruktur von T wird nun eine alternative Operation $\bullet$ definiert, welche sich als zu $\star$ identisch herausstellen wird. Mit obigen Wegen σ_i und $t \in [0, 1]$ ist

$$\sigma_1 \bullet \sigma_2(t) := \sigma_1(t) \cdot \sigma_2(t) \qquad \text{bzw.} \qquad \sigma_1 \bullet \sigma_2 = mult \circ (\sigma_1 \times \sigma_2) \circ \iota_{[0,1]} \,.$$

Als Komposition stetiger Abbildungen ist $\sigma_1 \bullet \sigma_2$ wieder stetig und außerdem in e geschlossen

$$(\sigma_1 \bullet \sigma_2)(0) = \sigma_1(0) \cdot \sigma_2(0) = e \cdot e = e = e \cdot e = \sigma_1(1) \cdot \sigma_2(1) = (\sigma_1 \bullet \sigma_2)(1) \,.$$

Im Folgenden wird gezeigt, dass $\bullet$ eine Operation auf der Fundamentalgruppe induziert. Seien für $i \in \{1,2\}$ jeweils σ_i und σ_i' homotop relativ $\{0,1\}$ mit stetiger Homotopie $H_i : [0,1] \times [0,1] \to T$ mit $H_i(0,.) = \sigma_i(.)$ und $H_i(1,.) = \sigma_i'(.)$. Dann stellt H

$$H : [0,1] \times [0,1] \to T \qquad (s,t) \mapsto H_1(s,t) \cdot H_2(s,t)$$

eine Homotopie von $\sigma_1 \bullet \sigma_2$ und $\sigma_1' \bullet \sigma_2'$ relativ $\{0,1\}$ dar. Die Stetigkeit von H folgt aus

$$H = mult \circ (H_1 \times H_2) \circ \iota_{[0,1]\times[0,1]} .$$

Weiterhin gelten mit $s,t \in [0,1]$

$$\begin{array}{rclclcl} H(0,t) & = & H_1(0,t) \cdot H_2(0,t) & = & \sigma_1(t) \cdot \sigma_2(t) & = & (\sigma_1 \bullet \sigma_2)(t) \\ H(1,t) & = & H_1(1,t) \cdot H_2(1,t) & = & \sigma_1'(t) \cdot \sigma_2'(t) & = & (\sigma_1' \bullet \sigma_2')(t) \\ H(s,0) & = & H_1(s,0) \cdot H_2(s,0) & = & e \cdot e & = & e \\ H(s,1) & = & H_1(s,1) \cdot H_2(s,1) & = & e \cdot e & = & e\,. \end{array}$$

Damit ist $\bullet$ als Operation auf $\pi_1(T,e)$ wohldefiniert

$$\bullet : \pi_1(T,e) \times \pi_1(T,e) \to \pi_1(T,e) \qquad \text{mit} \qquad [\sigma_1] \bullet [\sigma_2] := [\sigma_1 \bullet \sigma_2] \ .$$

Nun werden die Eigenschaften (i) und (ii) für $\star$ und $\bullet$ nachgewiesen. Das neutrale Element $[c_e] \in \pi_1(T,e)$ ist die Klasse des konstanten Weges c_e

$$c_e : [0,1] \to T \qquad \text{mit} \qquad c_e(t) := e\,.$$

Für $[\sigma] \in \pi_1(T,e)$ folgt aus der Vorlesung

$$[\sigma] = [c_e] \star [\sigma] = [\sigma] \star [c_e] \ .$$

Andererseits gilt für jeden stetigen, in e geschlossenen Weg mit $t \in [0,1]$

$$\begin{array}{rclclcl} (c_e \bullet \sigma)(t) & = & c_e(t) \cdot \sigma(t) & = e \cdot \sigma(t) & = & \sigma(t) \\ (\sigma \bullet c_e)(t) & = & \sigma(t) \cdot c_e(t) & = \sigma(t) \cdot e & = & \sigma(t) \ , \end{array}$$

also erst recht

$$[\sigma] = [c_e] \bullet [\sigma] = [\sigma] \bullet [c_e] \ .$$

Auch (ii) gilt nicht nur für die Äquivalenzklassen sondern bereits für fest gewählte Repräsentanten. Seien für $i \in \{1,2\}$ nun σ_i und σ_i' Wege wie zuvor, dann gilt mit $t \in [0,1]$

$$(\sigma_1 \star \sigma_2) \bullet (\sigma_1' \star \sigma_2')(t) = (\sigma_1 \star \sigma_2)(t) \cdot (\sigma_1' \star \sigma_2')(t) = \begin{cases} \sigma_1(2t) \cdot \sigma_1'(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \sigma_2(2t-1) \cdot \sigma_2'(2t-1) & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

sowie

$$(\sigma_1 \bullet \sigma_1') \star (\sigma_2 \bullet \sigma_2')(t) = \begin{cases} (\sigma_1 \bullet \sigma_1')(2t) = \sigma_1(2t) \cdot \sigma_1'(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ (\sigma_2 \bullet \sigma_2')(2t-1) = \sigma_2(2t-1) \cdot \sigma_2'(2t-1) & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \ . \end{cases}$$

Also ist

$$([\sigma_1] \star [\sigma_2]) \bullet ([\sigma_1'] \star [\sigma_2']) = [(\sigma_1 \star \sigma_2) \bullet (\sigma_1' \star \sigma_2')] = [(\sigma_1 \bullet \sigma_1') \star (\sigma_2 \bullet \sigma_2')] = ([\sigma_1] \bullet [\sigma_1']) \star ([\sigma_2] \bullet [\sigma_2']) \ ,$$

weshalb $\star$ und $\bullet$, dem ersten Teil der Aufgabe entsprechend, identische und kommutative Operationen auf der Fundamentalgruppe sind.