Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 1

Topologie Sommer 2007

Aufgabe 1

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass das Mengensystem

$$\mathcal{O}(d) := \{U \subset X \mid \forall x \in U \ \exists \epsilon > 0 \text{ mit } B_d(x, \epsilon) \subset U\}$$

eine Topologie definiert.

b) Zeige, dass $B(x, \epsilon) \in \mathcal{O}(d) \ \ \forall x \in X, \ \forall \epsilon > 0$.

c) Seien d_1, d_2 äquivalente Metriken auf X, d.h. es existieren Konstanten $C, c > 0$ mit $c\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C\, d_1(x, y) \ \forall x, y \in X$. Beweise, dass dann $\mathcal{O}(d_1) = \mathcal{O}(d_2)$.

d) Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Abbildung, die stetig ist im Sinne metrischer Räume. Zeige, dass dann f stetig ist bzgl. der induzierten Topologien.

Aufgabe 2 (Abschluss)
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$. Dann sind die folgenden Mengen A_i einander gleich und werden der Abschluss $\overline{A}$ von A genannt:

$$A_1 = X \setminus (X \setminus A)^\circ$$
$$A_2 = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{O} \text{ mit } x \in U \text{ gilt } U \cap A \neq \emptyset\}$$
$$A_3 = \bigcap_{A \subset B \subset X,\ B \text{ abgeschl.}} B$$

Aufgabe 3
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $A \subset X$. Zeige, dass durch anwenden der Operatoren $\{id, \overline{\ \ }, \ {}^\circ\}$ auf A höchstens 7 verschiedene Mengen entstehen können.

Aufgabe 4 (Produkt-Topologie)

a) Seien $(X_i, \mathcal{O}_i), \ (i = 1, 2)$ topologische Räume. Zeige: Die Produkt-Topologie $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ ist die gröbste Topologie auf $X_1 \times X_2$ bzgl. der die Projektionen $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ stetig sind.

b) Eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)$ ist stetig genau dann wenn die Abbildungen $p_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_i)$ stetig sind.

Aufgabe 5
Man zeige, dass ein zusammenhängender endlicher Graph *in einem Zug zeichenbar* ist genau dann wenn es höchstens zwei Knoten mit ungeraden *Index* gibt.

Der *Index* eines Knotens ist die Anzahl der in ihm zusammenlaufenden Kanten. Ein Graph heisst *in einem Zug zeichenbar*, falls man ihn stetig durchlaufen kann und dabei jede Kante genau einmal benutzt.