Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 2

Topologie Sommer 2007

Aufgabe 6 (Charakterisierung von Basen)

a) Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum mit einer Basis $\mathcal{B}$. Zeige:

(i) Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$, dann existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

(ii) Zu jedem $x \in X$ existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$.

b) Sei $\mathcal{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus a). Zeige, dass dann $\mathcal{O} = \{\emptyset\} \cup \{\bigcup_i B_i \mid B_i \in \mathcal{B}\}$ eine Topologie auf X definiert.

Aufgabe 7 (Sorgenfrey-Linie)
Sei $\mathcal{O} \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R})$ die durch das folgende Mengensystem gegebene Topologie:

$$\mathcal{O} := \{\emptyset\} \cup \Big\{ \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i) \subset \mathbb{R} \;\Big|\; -\infty < a_i < b_i < +\infty \Big\}$$

Zeige, dass in $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ jede Zusammenhangskomponente nur aus einem Punkt besteht.

Aufgabe 8
(1) Zeigen Sie, dass $\{(x, \sin(\frac{1}{x}) \mid x > 0\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ mit der Teilraumtopologie zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.
(2) Finden Sie ein Beispiel für eine nicht abgeschlossene Wegzusammenhangskomponente in einem topologischen Raum.
(3) Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen $Gl(n; \mathbb{K}) \subset M(n; \mathbb{K})$ (mit der Teilraumtopologie) nicht zusammenhängend ist für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ aber zusammenhängend für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Aufgabe 9 (Hausdorff-Eigenschaft)
Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Zeigen Sie das folgende Bedingungen äquivalent sind.

(i) $(X, \mathcal{O})$ ist ein T_2-Raum.

(ii) Die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen bzgl. der Produkt-Topologie.

(iii) Für jedes $x \in X$ gilt $\bigcap_{x \in U \in \mathcal{O}} \overline{U} = \{x\}$.

Aufgabe 10
X sei ein kompakter Raum, Y sei Hausdorff. Sei $f : X \to Y$ stetige Bijektion. Zeigen Sie, dass f dann ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 11
(1) Finden Sie topologische Räume, die das erste aber nicht das zweite Trennungsaxiom erfüllen.
(2) Finden Sie topologische Räume, die kompakt aber nicht folgenkompakt sind.