1 Differentialoperatoren 1.Ordnung auf Vektorfeldern und Formen

Im Folgenden sei (M, g) eine Semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ ihr Levi-Civita-Zusammenhang. Unser Ziel ist es einen Überblick über die Differentialoperatoren 1.Ordnung zu geben, die man auf natürliche Weise aus ∇ und damit aus (M, g) erhält.

Allgemein hat man auf $(0, p)$-Tensorfeldern die folgenden Operationen:

Spur:

$$Tr_{ij}: \quad \mathcal{T}^{(0,p)}(M) \quad \to \quad \mathcal{T}^{(0,p-2)}(M)$$

$$Tr_{ij}(T)(X_1, \dots X_{p-2}) := \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k T(X_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{e_k}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{e_k}, \dots, X_{p-2})$$

Symmetrisierung:

$$S: \quad \mathcal{T}^{(0,p)}(M) \quad \to \quad \mathcal{T}^{(0,p)}(M)$$

$$S(T)(X_1, \dots X_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_p} T(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)})$$

Antisymmetrisierung:

$$\Lambda: \quad \mathcal{T}^{(0,p)}(M) \quad \to \quad \mathcal{T}^{(0,p)}(M)$$

$$\Lambda(T)(X_1, \dots X_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_p} sgn(\pi) T(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(p)})$$

Wir betrachten ∇ als Differentialoperator

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(TM) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(T^*M \otimes TM) & \xrightarrow{g} & \mathcal{T}^{(0,2)}(M) \\ X & \mapsto & \nabla X & \mapsto & g(\nabla X, \cdot) \end{array}$$

Durch Komposition mit obigen Operatoren erhalten wir daraus (siehe DG I):

$$
\begin{tikzcd}
 & g\big(\nabla X, \cdot\big) \arrow[dl, "Tr_{12}"'] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, "\Lambda"] & \\
\operatorname{div}(X) & \frac{1}{2} L_X g & \frac{1}{2}\operatorname{rot}(X)
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Dasselbe machen wir nun mit einer p-Form $\omega \in \Omega^p(M)$, d.h. wir betrachten

$$
\Gamma(\Lambda^p T^* M) \quad \xrightarrow{\nabla} \quad \Gamma(T^* M \otimes \Lambda^p T^* M) \subset \mathcal{T}^{(0,p+1)}(M)
$$

Analog zu (1) erhält man daraus (siehe VL):

$$
\begin{tikzcd}
 & \nabla\omega \arrow[dl, "Tr_{12}"'] \arrow[dr, "\Lambda"] & \\
-\delta\omega & & \frac{1}{p+1}\, d\omega
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Bemerkenswert ist, dass d und δ gar nicht mehr von der gewählten Metrik g abhängen. Vergleichen wir zunächst (1) mit (2) für 1-Formen über den Isomorphismus

$$
\mathfrak{X}(M) \quad \xrightarrow{\sharp} \quad \Omega^1(M), \qquad X^\sharp = g(X, \cdot)
$$

Theorem 1.

(i) $(\nabla X)^\sharp = \nabla(X^\sharp)$

(ii) $\operatorname{rot}(X) = d(X^\sharp)$

(iii) $\operatorname{div}(X) = -\delta(X^\sharp)$

Beweis. (i) Wir benutzten, dass ∇ metrisch ist:

$$\begin{aligned}(\nabla_Y(X^\sharp))(Z) &= Y(X^\sharp(Z)) - X^\sharp(\nabla_Y Z)\\ &= Yg(X,Z) - g(X,\nabla_Y Z)\\ &= g(\nabla_Y X, Z)\\ &= (\nabla_Y X)^\sharp(Z)\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}d(X^\sharp)(Y,Z) &= (\nabla_Y X^\sharp)(Z) - (\nabla_Z X^\sharp)(Y)\\ &\underset{(i)}{=} g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Z X, Y)\\ &= \mathrm{rot}(X)(Y,Z)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\delta(X^\sharp) &= -\sum_i \epsilon_i(\nabla_{e_i} X^\sharp)(e_i)\\ &\underset{(i)}{=} -\sum_i \epsilon_i g(\nabla_{e_i} X, e_i)\\ &= -\operatorname{div}(X)\end{aligned}$$

□

Was ergibt nun $S(\nabla\omega)$? Für p-Formen mit $p \geq 2$ kommt hier Null heraus, weil ja $\nabla\omega$ in den letzten p Komponenten alternierend ist. In (1) kann man S aber auch anders betrachten: dazu bemerken wir, dass Λ ein Projektor ist, d.h. $\Lambda^2 = \Lambda$. Die Projektion auf $ker(\Lambda)$ ist dann gegeben durch $id - \Lambda$. Im Falle der $(0,2)$-Tensoren gilt gerade $id - \Lambda = S$. Die analoge Konstruktion in (2) liefert nun den folgenden Differentialoperator 1.Ordnung:

$$K : \Omega^p(M) \quad \to \quad \Gamma(T^*M \otimes \Lambda^p T^*M); \qquad K(\omega) = (id - \Lambda)(\nabla\omega) = \nabla\omega - \tfrac{1}{p+1} d\omega$$

Eine **Killing-Form** ist dann in Anlehnung an (1) eine Form ω mit $K(\omega) = 0$.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen: haben wir oben die Projektion auf $ker(\Lambda)$ betrachtet, so betrachten wir jetzt die Projektion auf $ker(\Lambda) \cap ker(Tr_{12})$. Die Strategie dabei ist, die Spur von der $ker(\Lambda)$-Projektion in geeigneter Weise zu "substrahieren". Man berechnet leicht:

$$Tr_{12}(\frac{1}{2} L_X g) = \operatorname{div}(X) \qquad\qquad Tr_{12}(K(\omega)) = -\delta\omega$$

Andererseits haben wir folgende Elemente in $ker(\Lambda)$, deren Spur *nicht* verschwindet:

$$Tr_{12}(g) = n \qquad\qquad Tr_{12}(\sum_i \sigma^i \otimes \sigma^i \wedge \delta\omega) = (n-p+1)\delta\omega$$

Damit liegt das Bild der folgenden Operatoren in $ker(\Lambda) \cap ker(Tr_{12})$:

$$\begin{aligned} C(X) &:= \frac{L_X g}{2} - \frac{\operatorname{div}(X)}{n} g \\ T(\omega) &:= K(\omega)(Y) + \frac{1}{n-p+1} \sum_i \sigma^i \otimes \sigma^i \wedge \delta\omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T(\omega)(Y) = \nabla_Y \omega - \tfrac{1}{p+1} Y \lrcorner\, d\omega + \tfrac{1}{n-p+1} Y^\sharp \wedge \delta\omega}$$

Für ein Vektorfelder X gilt bekanntlich $C(X) = 0$ genau dann, wenn es ein konformes Vektorfeld ist. Eine p-Formen ω mit $T(\omega) = 0$ heißt **konforme Killing-Form** oder **Twistor-Form**.

☞ Natürlich lassen sich aus den bisherigen Operatoren neue konstruieren. Als Beispiel sei der **Dirac-Operator** $D := d + \delta : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$ angeführt, dessen charakteristische Eigenschaft es ist, dass sein Quadrat ein Operator vom Laplace-Typ ist - hier der Hodge-Laplace-Operator.

2 Bochnertechnik

Als nächstes betrachten wir Differentialoperatoren 2. Ordnung, die sich aus ∇ ergeben. Nehmen wir z.B. ∇^2 auf Vektorfeldern:

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(TM) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(T^*M \otimes TM) & \xrightarrow{\nabla} & \Gamma(T^* \otimes T^*M \otimes TM) \\ X & \mapsto & \nabla X & \mapsto & \nabla(\nabla X) = \nabla^2 X \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} Tr_{12}(\nabla^2 X) &= -\Delta^\nabla(X) \qquad \text{(Bochner-Laplace)} \\ \Lambda(\nabla^2 X) &= \mathcal{R}(\cdot,\cdot)X \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned}\Lambda(\nabla^2 X)(Y,Z) &= \nabla_Y(\nabla X)(Z) - \nabla_Z(\nabla X)(Y)\\ &= \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) - \nabla X(\nabla_Y Z) + \nabla X(\nabla_Z Y)\\ &= \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{\nabla_Y Z - \nabla_Z Y} X\\ &= \mathcal{R}(Y,Z)X\end{aligned}$$

Man bemerke, dass $\Lambda(\nabla^2 X)$ also ein Differentialoperator 0-ter Ordnung ist. Für die folgenden Formel ist es deshalb charakteristisch, dass einerseits Operatoren vom Laplace-Typ, andererseits Krümmungs-Grössen auftreten. Aus ihnen lassen sich wichtige Beziehungen zwischen Analysis und Geometrie gewinnen.

Für ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ betrachten wir das $(1,1)$-Tensorfeld $\boldsymbol{A := \nabla X}$ sowie die Längenfunktion $\boldsymbol{f = g(X,X)/2}$.

Theorem 2. *Ist A schief-symmetrisch bzgl. g, d.h. X ein Killing-Vektorfeld, so gilt:*

(i) $\operatorname{grad} f = -A(X)$

(ii) $\nabla \operatorname{grad} f = -\mathcal{R}(\cdot, X)X - \nabla_X A - A^2$

(iii) $\Delta f = ||A||^2 - \mathcal{R}ic(X,X)$

Beweis.

(i)

$$\begin{aligned}g(V, \operatorname{grad} f) &= df(V) = Vg(X,X)/2 =\\ &= g(\nabla_V X, X) = g(A(V), X) = g(V, -A(X))\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\nabla_V \operatorname{grad} f &= -\nabla_V(\nabla_X X)\\ &= -\mathcal{R}(V,X)X - \nabla_X\nabla_V X - \nabla_{[V,X]}X\\ &= -\mathcal{R}(V,X)X - \nabla_X\nabla_V X + \nabla_{\nabla_X V}X - \nabla_{\nabla_X V}X\\ &= -\mathcal{R}(V,X)X - (\nabla_X A)(V) - A^2(V)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}Tr(\nabla \operatorname{grad} f) &= \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f\\ Tr(\mathcal{R}(\cdot,X)X) &= \mathcal{R}ic(X,X)\\ Tr(\nabla_X A) &= 0, \text{ da } A \text{ und damit } \nabla_X A \text{ schiefsymmetrisch ist.}\\ Tr(A^2) &= \sum_i \epsilon_i g(A^2(e_i), e_i) = -\sum_i \epsilon_i g(A(e_i), A(e_i)) =: -\langle A, A\rangle\end{aligned}$$

□

Theorem 3 (Bochner 1946). *Sei (M, g) eine geschlossene, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

(i) $\mathcal{R}ic \leq 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Jedes Killingvektorfeld ist parallel.*

(ii) $\mathcal{R}ic < 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Jedes Killingvektorfeld ist identisch Null.*

Beweis. (i): Sei X ein Killingvektorfeld. Mit der 2. Green'schen Formel und dem vorherigen Satz gilt:

$$0 = \int_M \Delta f \, dM = \int_M \left(||A||^2 - \mathcal{R}ic(X, X) \right) dM \geq ||\nabla X||_{L^2} \geq 0$$

D.h. $||\nabla X||_{L^2} = 0$ und damit $\nabla X = 0$, da g positiv definit.

(ii): wegen (i) wissen wir bereits, dass $A = 0$ und man erhält:

$$0 = \int_M \Delta f \, dM = -\int_M \mathcal{R}ic(X, X) \, dM \geq 0$$

D.h. $\mathcal{R}ic(X, X) \equiv 0$ und damit $X = 0$, da $\mathcal{R}ic$ negativ definit. □

☞ Die Bedingung M kompakt ist notwendig: Für Räume konstanter negativer Schnittkrümmung gilt $\mathcal{R}ic < 0$, es existieren aber nicht-triviale und nicht-parallele Killingvektorfelder.

Als Nächstes betrachten wir das Pendant zu Theorem 2 für den Fall, dass A symmetrisch ist:

Theorem 4. *Ist A symmetrisch bzgl. g, so gilt:*

(i) $\operatorname{grad} f = A(X)$

(ii) $\nabla \operatorname{grad} f = \mathcal{R}(\cdot, X)X + \nabla_X A + A^2$

(iii) $\Delta f = ||A||^2 + g(X, \operatorname{grad} \operatorname{div}(X)) + \mathcal{R}ic(X, X)$

Beweis. Der einzige Unterschied zu 2 - abgesehen von Vorzeichen - ist:

$$Tr(\nabla_X A) = \nabla(Tr(A)) = \nabla \operatorname{div}(X)$$

□

Damit erhalten wir einen alternativen Beweis für den folgenden in der VL mit der Weitzenböck-Formel für Δ_1 bewiesenen Satz:

Theorem 5 (Bochner 1946). *Sei (M, g) eine geschlossene, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

(i) $\mathcal{R}ic \geq 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Jede harmonische 1-Form ist parallel.*

(ii) $\mathcal{R}ic > 0 \quad \Rightarrow \quad$ *Jede harmonische 1-Form ist identisch Null.*

Beweis. Sei ω eine harmnische 1-Form, so gilt $d\omega = \delta\omega = 0$. Für das duale Vektorfeld $X := \omega^\flat$ (d.h. $X^\sharp = \omega$) gilt dann nach Theorem 1 $\mathrm{rot}(X) = \mathrm{div}(X) = 0$. Damit ist $A = \nabla X$ symmetrisch und $\Delta f = ||A||^2 + \mathcal{R}ic(X, X)$ nach Theorem 4(iii). Der Rest des Beweises ist vollkommen analog zu dem von Theorem 3 $\square$

3 Parallele Vektorfelder

Die beiden Bochner-Sätze Thm 3 und Thm 5 sind hilfreich, um parallele Vektorfelder nachzuweisen. Sei $d = \dim \left\{ X \in \mathfrak{X}(M) \,\middle|\, \nabla X = 0 \right\}$. Unter den Voraussetzungen von Theorem 3 wissen wir dann, dass

$$\dim Iso(M, g) \leq d$$

wohingegen unter den Voraussetzungen von Theorem 5 nach dem Satz von Hodge

$$H^1_{deR}(M) \leq d$$

Umgekehrt hat ein paralleles Vektorfeld wiederum weitreichende Konsequenzen für die Geometrie der Mannigfaltigkeit - oder zumindest für ihre universelle Überlagerung:

Theorem 6. *Sei M eine einfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gilt:*

(i) $H^1_{deR}(M) = 0$.

Sei ferner (M, g) eine vollständige Riemannsche Metrik und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein paralleles Vektorfeld. Dann gilt:

(ii) Es existiert eine Funktion $f \in C^\infty(M)$, so dass $X = \mathrm{grad}\, f$.

(iii) (M, g) ist isometrisch zu einer Produkt-Mannigfaltigkeit $(\mathbb{R}, dt^2) \times (N, h)$.

Beweis. (i) Dies ist eine Verallgemeinerung des Poincaré-Lemmas:

Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ eine geschlossene 1-Form, d.h. $d\omega = 0$. Fixiere $x_0 \in M$ und definiere nun eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \int_\gamma \omega = \int_{[0,1]} \gamma^*(\omega), \qquad \gamma : [0,1] \to M \text{ eine Kurve von } x_0 \text{ nach } x$$

- f ist wohldefiniert: seien γ_i $(i = 0, 1)$ zwei verschiedene Wege von x_0 nach x_1. Da $\Pi_1(M) = 0$, existiert eine Homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to M$ mit $H(i,t) = \gamma_i(t)$ und $H(s,i) = x_i$ (H kann glatt gewählt werden). Nach dem Satz von Stokes gilt dann:

$$0 = \int\limits_{[0,1]\times[0,1]} H^*(d\omega) = \int\limits_{\partial([0,1]\times[0,1])} H^*(\omega) =$$

$$= \left(\int\limits_{[0,1]\times\{1\}} - \int\limits_{[0,1]\times\{0\}} + \int\limits_{\{1\}\times[0,1]} - \int\limits_{\{0\}\times[0,1]} \right) H^*(\omega) = \int\limits_{[0,1]} \gamma_1^*(\omega) - \int\limits_{[0,1]} \gamma_0^*(\omega)$$

- $df = \omega$: sei $v \in T_{x_1}M$ und γ eine Kurve mit $\gamma'(1) = v$. Dann gilt:

$$df(v) = \frac{d}{dt} \int_{[0,t]} \gamma^*(\omega)\Big|_{t=1} = \frac{d}{dt} \int_0^t \omega(\gamma'(s))ds\Big|_{t=1} = \omega(\gamma'(1)) = \omega(v)$$

(ii) Betrachte die zu X duale 1-Form $X^\sharp$. Nach Theorem 1 ist $X^\sharp$ geschlossen. Wegen (i) ist $X^\sharp$ dann auch exakt, d.h. $X^\sharp = df$ mit $f \in C^\infty(M)$ und damit $X = \operatorname{grad} f$.

(iii) Wir bemerken zunächst, dass $g(X,X) = c$ konstant ist wegen der Parallelität von X. Bezeichne Φ_t^X den Fluss von X. Dieser ist auf ganz M definiert, da $\gamma_p(t) = \Phi_t^X(p)$ Geodäten sind und (M,g) vollständig ist. Dann gilt:

$$f\left(\Phi_t^X(p)\right) = c \cdot t + f(p), \qquad \forall p \in M,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Für $t = 0$ ist (3) klar und differenzieren nach t ergibt

$$df\big(X(\Phi_t^X(p))\big) = g_{\Phi_t^X(p)}(\operatorname{grad} f, X) = c$$

Insbesondere ist der Wertebereich von f ganz $\mathbb{R}$. Weiter ist $f^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit, da 0 ein Regulärwert von f ist. Es ist nun leicht zu sehen, dass die folgende Abbildung F ein Diffeomorphimus ist:

$$F : \quad M \quad \to \mathbb{R} \times f^{-1}(0), \qquad F(p) := \big(f(p), \Phi^X_{-f(p)}(p)\big)$$

Schliesslich versehen wir $N := f^{-1}(0) \subset M$ mit der induzierten Metrik $h := g|_N$ und auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die Metrik $c \cdot dt^2$ (OBdA $c = 1$). Berücksichtigen wir nun noch, dass $\Phi_t^X \in Iso(M,g)$ weil X parallel, also insbesondere ein Killingvektorfeld ist, so sehen wir, dass F die gewünschte Isometrie liefert.

□