17. Mai 2006

Begleitende Repere für Kurven und Dynamik starrer Körper

Thomas Neukirchner

Institut für Mathematik, Humboldt-Universität Berlin
email: neukirch@mathematik.hu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Kurven und Flächen aus Sicht eines Repers **2**
2.1 Bewegungsgleichung eines Repers und Kinematik starrer Körper . . . 2
2.2 Begleitendes Reper . . . 4
2.3 Parametrisierung der Kurve . . . 4
2.4 Transformationsformel . . . 4
2.5 Bishop-Reper . . . 5
2.6 Frenet-Serret-Reper . . . 6
2.7 Bishop versus Frenet-Serret . . . 7
2.8 Navigation von Fisch und Vogel . . . 8
2.9 Darboux-Reper, Geodäten und Krümmungslinien . . . 9
2.10 Parallel-Reper und Parallelverschiebung . . . 12

3 Dynamik starrer Körper mit 1 oder 2 Freiheitsgraden **14**
3.1 Kinetische Energie eines starren Körper . . . 14
3.2 Foucault'sche Hantel . . . 15
3.3 Interpretation mit Coriolis- und Fliehkraft . . . 17
3.4 Das Geheimnis des Gyrotwisters . . . 18
3.5 Schlussbemerkung . . . 19

1 Einleitung

Ziel dieses Artikels ist es, ausgehend von einer deskriptiven, kinematischen Sichtweise der Kurventheorie einen erfahrbar dynamischen Standpunkt zu entwickeln. Konkret stellen wir uns die Frage: mit welchen physikalischen Experimenten lässt sich die Geometrie von Kurven und Flächen erfahrbar machen? Dabei geht es uns nicht so sehr um den Zusammenhang zwischen speziellen Kurven- oder Flächentypen und deren Auftreten in der Natur, sondern vielmehr darum, allgemeine geometrische Konzepte mit physikalischen Kräften, die bei der Bewegung starrer Körper auftreten in Verbindung zu bringen. Geometrisch gesehen ist ein starrer Körper nichts anderes als ein bewegliches aber in sich starres Achsensystem, ein sogenanntes Reper. Die Methode, geometrische Objekt mithilfe begleitender Repere zu erkunden, wurde Anfang des 20. Jahrhunderts von E.Cartan entwickelt (siehe z.B. [3]) und hat großen Einfluss auf die Entwicklung der Differentialgeometrie genommen. Der einfachste Fall einer räumlichen Kurve wird allerdings nur selten aus dieser Sicht betrachtet, da man im Gegensatz zu höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten den meisten Kurven ein eindeutiges Reper zuordnen kann, dass ihre Geometrie sofort zu Tage treten lässt.

Hier befassen wir uns nun mit beliebigen eine Kurve begleitenden Reperen. Diese Flexibilität gibt uns die Möglichkeit etwas über die Kurve 'hinauszuschauen'. So ist dieser Formalismus z.B. geeignet, das geometrische Verhalten 'dicker' Kurven, wie etwa eines langen Moleküls zu beschreiben.

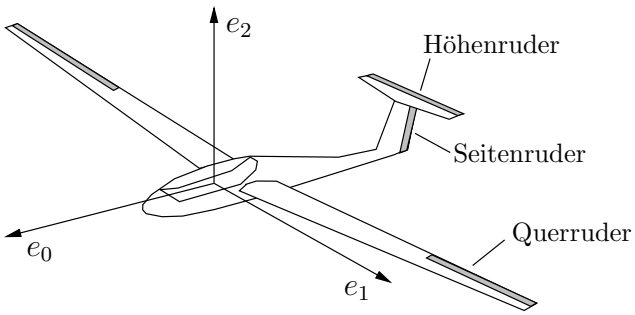
Insbesondere im Zusammenhang mit der Erforschung der räumlichen Gestalt von Proteinen oder des Erbguts (DNS) ist dies Gegenstand aktueller Forschungen (siehe z.B. [2]). Eine andere Möglichkeit besteht darin Flächen mithilfe darin enthaltener Kurven zu studieren. Auch hierbei wird es von Nutzen sein, das die Kurve begleitende Reper geeignet anpassen zu können. Natürlich können wir auf diese Weise nicht die Flächentheorie ersetzen - diese macht an wesentlichen Stellen von einer 2-parametrischen Schar von Reperen Gebrauch - aber wichtige Konzepte wie Geodäten, Krümmungslinien und Paralleltransport sowie einige klassische Sätze lassen sich auf diese Art anschaulich zeigen. Früher fand diese Theorie Anwendung bei der Oberflächengestaltung von Gussformen durch Fräßen bevor diese durch Computersteuerung nahezu beliebige Formen generieren konnten. Heutzutage finden man eine virtuelle Wiedergeburt dieser Methoden in Software zur Visualisierung und Bilderkennung geometrischer Objekte.

Unser Hauptanliegen war es jedoch, die Dynamik eines starren Körpers mit 1 oder 2 Freiheitsgraden geometrisch zu interpretieren. Hierzu gehört die Foucault'sche Hantel, mit deren Hilfe wir Parallelverschiebung auf beliebigen Flächen realisieren können. Das namensgleiche Pendel erlangte Berühmtheit, da es damit Foucault 1850 gelang, die Rotation der Erde nachzuweisen. Für unsere Zwecke modifizieren wir dieses Pendel zu einer Hantel, so dass es auch ohne Gravitation auf kleine Modellflächen anwendbar wird. Weiterhin hat die Foucault'sche Hantel den Vorteil, dass ihre Bewegungsgleichung exakt lösbar ist. Die Bewegung lässt sich auch mit Hilfe von Coriolis- und Fliehkräften leicht interpretieren. Die Normalkomponente der Winkelgeschwindigkeit ist für den Paralleltransport verantwortlich. Die tangentiale Komponente erzeugt eine Schwingung um die Richtung der Bahnkurve. Sie wird beim Foucault'schen Pendel üblicherweise vernachlässigt. Ein weiteres interessantes Modell ist ein kleiner Kreisel, dessen Achse sich auf dem Äquator eines sphärischen Gehäuses frei bewegen kann und der sich durch geschickte Taumelbewegung des Gehäuses stark beschleunigen lässt. Er wurde 1973 von A.L.Mishler erfunden und ist heutzutage unter Namen wie *Dynabee*, *Powerball* oder *Gyrotwister* als Trainingsgerät für die Arm- und Handmuskulatur erhältlich. Es zeigt sich jedoch, dass die Rotationsgeschwindigkeit eines Kreisels, dessen Achse frei gelagert ist, durch äußere Kräfte nicht zu beeinflussen ist. Der eigentliche Antriebsmechanismus des oben beschriebenen Kreisels besteht darin, dass durch die Taumelbewegung die Kreiselachse im Gehäuse zu rotieren beginnt und damit durch Reibung an der Führungsschiene dem Kreisel ein Drehmoment zugeführt wird. Die genaue Bewegung der Kreiselachse werden wir herleiten.

2 Kurven und Flächen aus Sicht eines Repers

2.1 Bewegungsgleichung eines Repers und Kinematik starrer Körper

Stellen wir uns einen starren Körper vor - z.B. ein Segelflugzeug. Um seine Bewegung im Raum zu beschreiben, betrachten wir ein mit dem Körper fest verbundenes System dreier aufeinander senkrecht stehender Achsen $\{e_0, e_1, e_2\}$ normierter Länge. Ein solches Bezugssystem bezeichnet man auch als *3-Bein*, *Reper* (franz. repère) oder *Rahmen* (engl. frame). Mit den Achsen identifiziert man üblicherweise folgende Richtungen: e_0 hinten-vorne, e_1 rechts-links, e_2 unten-oben.



Was geschieht nun wenn sich das Segelflugzeug bewegt? Vom Boden aus betrachtet ändert sich sein Aufenthaltsort sowie seine Ausrichtung. Die momentane Drehung des Flugzeugs lässt sich aber am besten aus Sicht des Piloten beschreiben. Dazu stellen wir die Änderung jeder der Achsen e_i - also deren Ableitung nach der Zeit - wieder in der Basis e_i dar: $e_i{}' = a_{i0}\, e_0 + a_{i1}\, e_1 + a_{i2}\, e_2$. Fassen wir die e_i als *Zeilenvektoren* zu einer Matrix E zusammen und bilden aus den a_{ij} eine Matrix A, so

lautet die Bewegungsgleichung des Repers

$$E' = AE \qquad \text{mit} \qquad E = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

In der 3×3-Matrix A ist die momentane Drehung des Körpers kodiert:

1 Lemma (Darboux-Vektor). *A ist schiefsymmetrisch, d.h. von der Gestalt*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & 0 & \omega_0 \\ \omega_1 & -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ferner lässt sich Gleichung (1) mithilfe des sogenannten Darboux-Vektor $\omega = \omega_0\, e_0 + \omega_1\, e_1 + \omega_2\, e_2$ wie folgt ausdrücken, wobei das Reper so orientiert sei, dass $e_1 \times e_2 = e_3$ gelte:

$$E' = \omega \times E \tag{2}$$

Beweis. Da die e_i paarweise senkrecht aufeinander stehen gilt $E^t E = Id$. Ableiten dieser Identität ergibt

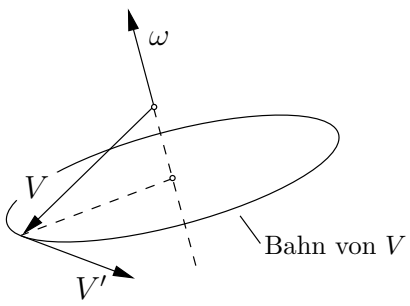
$$0 = (E')^t E + E^t E' = (AE)^t E + E^t AE = E^t (A^t + A) E$$

Da E invertierbar ist, folgt $A^t + A = 0$. Damit kann A wie angegeben durch drei Einträge $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ parametrisiert werden. Die Formel (2) lässt sich nun leicht überprüfen mithilfe der zyklischen Vertauschungen der Identität $e_0 \times e_1 = e_2$:

$$\begin{array}{lllllll} \omega \times e_0 & = & \omega_1 e_1 \times e_0 + \omega_2 e_2 \times e_0 & = & \omega_2 e_1 - \omega_1 e_2 & = & {e_0}' \\ \omega \times e_1 & = & \omega_0 e_0 \times e_1 + \omega_2 e_2 \times e_1 & = & -\omega_2 e_0 + \omega_0 e_2 & = & {e_1}' \\ \omega \times e_2 & = & \omega_0 e_0 \times e_2 + \omega_1 e_1 \times e_2 & = & \omega_1 e_0 - \omega_0 e_1 & = & {e_2}' \end{array}$$

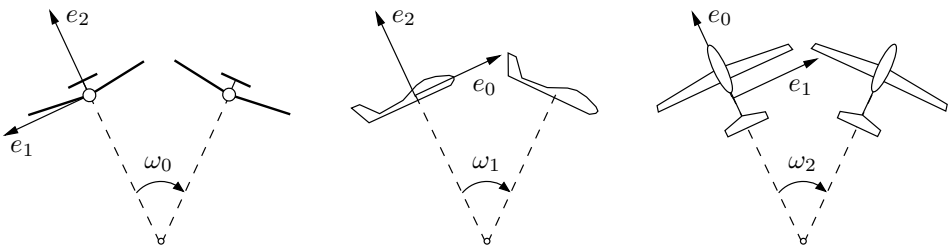
□

Gleichung (2) hat folgende geometrische Interpretation: ω ist die momentane *Drehachse*, $|\omega|$ die momentane *Winkelgeschwindigkeit*, denn die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes $V = v_0 e_0 + v_1 e_1 + v_2 e_2$ des starren Körpers ergibt sich aus $V' = \omega \times V$, d.h. $|V'|^2 = |\omega|^2\, |V|^2 - \langle \omega, V \rangle^2$. Insbesondere ist $V' = 0$ genau dann wenn $V || \omega$ und $|V'| = |\omega|$ für einen Einheitsvektor orthogonal zu ω[1].



Die einzelnen Komponenten von ω beschreiben jeweils Drehungen um die Achsen e_i. Die Gesamtbewegung ließe sich auch als Komposition einzelner Drehungen realisieren, wobei sich die Winkelgeschwindigkeiten addieren. In der Luft- und Raumfahrt, wo es ja darum geht einen Körper im Raum zu navigieren, haben die ω_i folgende Namen:

	deutsch	englisch	Steuerung durch
ω_0	Kippwinkel	roll	Querruder
ω_1	Neigungswinkel	pinch	Höhenruder
ω_2	Gierwinkel	yaw	Seitenruder



[1] $Exp(A)$ ist eine orthogonale Abbildung mit Fixvektor ω, da $\omega \in \ker A$ und imaginären Eigenwerten $\pm i|\omega|$. Letzteres ist jedoch schwieriger direkt abzuleiten.

2.2 Begleitendes Reper

Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine glatte, reguläre Kurve, d.h. beliebig oft differenzierbar und $\gamma' \neq 0$. Wir stellen uns nun vor, dass wir die Kurve mit einem Segelflugzeug entlangfliegen und wollen untersuchen, welcher Zusammenhang dabei zwischen den Größen ω_i und der Geometrie der Kurve besteht. Die einzige Bedingung, die wir im Moment stellen, ist, dass e_0 in Richtung des Tangentialvektors der Kurve zeigt, also $e_0 = \vec{t}$ mit $\vec{t} = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$. Die Ausrichtung der anderen beiden Vektoren e_1, e_2 ist zunächst beliebig. Wir bezeichnen sie mit $V_i = e_i$. Das Reper $E = \{\vec{t}, V_1, V_2\}$ heißt dann ein *die Kurve begleitendes Reper* und seine Bewegungsgleichung entspricht der allgemeinen Form:

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \omega_2 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & 0 & \omega_0 \\ \omega_1 & -\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Im folgenden untersuchen wir, wie sich die Größen ω_i beim Übergang zu einem anderen begleitenden Reper transformieren und gewinnen daraus geometrische Invarianten der Kurve sowie spezielle begleitende Repere.

2.3 Parametrisierung der Kurve

Geometrische Größen einer Kurve γ sollten nicht von der Geschwindigkeit $|\gamma'|$ abhängen, mit der die Kurve durchlaufen wird. Sei also $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$ eine weitere Parametrisierung der Kurve γ mit begleitenden Reper E, so lautet die Bewegungsgleichung für $\widetilde{E} = E \circ \sigma$ nach der Kettenregel $\widetilde{E}' = \sigma' (E' \circ \sigma) = \sigma' (A \circ \sigma) \widetilde{E}$, also $\widetilde{A} = \sigma' (A \circ \sigma)$. Der Geschwindigkeitsvektor γ' hat jedoch genau dasselbe Transformationsverhalten: $\widetilde{\gamma}' = \sigma' (\gamma' \circ \sigma)$. Damit ist der Quotient $\widehat{A} = \frac{A}{|\gamma'|}$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung[2]. Nun besitzt jede reguläre Kurve $\gamma(t)$ eine Reparametrisierung $\widetilde{\gamma}(s)$ nach Bogenlänge, d.h. $|\widetilde{\gamma}'| = 1$. In dieser Eichung treten die parameterunabhängigen Größen $\widehat{A} = \frac{A}{|\gamma'|}$ bzw. $\widehat{\omega} = \frac{\omega}{|\gamma'|}$ in (1) und (2) direkt in Erscheinung. Im folgenden setzten wir also stets voraus, dass die Kurve nach Bogenlänge parametrisiert sei. Die Formeln lassen sich dann leicht auf allgemeine Parametrisierungen übertragen.

2.4 Transformationsformel

Haben wir soeben gezeigt, wie sich der Darboux-Vektor ω unter Änderung des Kurvenparameters verhält, werden wir hier untersuchen, wie er sich beim Übergang zu einen anderen Reper transformiert. Seien also $E = \{\vec{t}, V_1, V_2\}$ und $\widetilde{E} = \{\vec{t}, \widetilde{V_1}, \widetilde{V_2}\}$ zwei Repere. Sie lassen sich durch eine Drehung um die Achse $\vec{t}$ ineinander überführen. Der Drehwinkel $\psi(s)$ kann dabei stetig in Abhängigkeit von s gewählt werden und ist eindeutig bestimmt bis auf eine konstante der Form $2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_1 &= \cos\psi V_1 + \sin\psi V_2 \\ \widetilde{V}_2 &= -\sin\psi V_1 + \cos\psi V_2 \end{aligned} \tag{4}$$

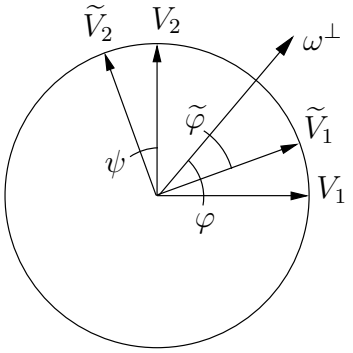


Abb.1 *Verschiedene Repere*

Seien ω bzw. $\widetilde{\omega}$ die Darboux-Vektoren der beiden Repere $E, \widetilde{E}$. Die folgende Formel entspricht der Vorstellung, dass sich die Rotation der beiden Repere nur in Richtung $\vec{t}$ unterscheidet:

[2] Für $\sigma' < 0$, d.h. wenn die Kurve rückwärts durchlaufen wird, ändert sich allerdings das Vorzeichen von $\widehat{A}$.

2 Lemma. *Bezeichne $V = V^\top + V^\perp$ die Zerlegung eines Vektors im Kurvenpunkt $\gamma(s)$ in seinen tangentialen und normalen Bestandteil. Dann gilt*

$$\widetilde{\omega} = \omega + \psi'\vec{t} \qquad \text{d.h.} \qquad \begin{array}{rcl} \widetilde{\omega}^\perp & = & \omega^\perp \\ \widetilde{\omega}^\top & = & \omega^\top + \psi'\vec{t} \end{array} \tag{5}$$

Beweis. Aus Gleichung (2) für die Repere $E, \widetilde{E}$ folgt $\vec{t}\,' = \omega \times \vec{t} = \widetilde{\omega} \times \vec{t}$. Damit stimmen die Projektionen von ω und $\widetilde{\omega}$ auf $\vec{t}^\perp$ überein. Den tangentialen Anteil $\widetilde{\omega}_0$ berechnen wir mittels (4) und (3):

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\omega}_0 & = & \langle \widetilde{V}_2, \widetilde{V}_1' \rangle \\ & = & \langle \widetilde{V}_2, \cos\psi V_1{}' + \sin\psi V_2{}' \rangle + \psi' \langle \widetilde{V}_2, -\sin\psi V_1 + \cos\psi V_2 \rangle \\ & = & -\sin^2\psi \langle V_1, V_2{}' \rangle + \cos^2\psi \langle V_1{}', V_2 \rangle + \psi' \langle \widetilde{V}_2, \widetilde{V}_2 \rangle, \qquad \text{da } V_i' \perp V_i \\ & = & \omega_0 + \psi' \end{array}$$

□

Sei Ω eine beliebige Drehmatrix, dann erhalten wir folgende allgemeine Transformationsformel der Bewegungsgleichung für das neue Reper $\widetilde{E} = \Omega E$:

$$\widetilde{E}' = (\Omega E)' = \Omega E' + \Omega' E = \big(\Omega A + \Omega'\big) E = \big(\Omega A \Omega^{-1} + \Omega' \Omega^{-1}\big) \widetilde{E} \tag{6}$$

Der erste Term spiegelt die Bewegung des Repers E - ausgedrückt im Reper $\widetilde{E}$ - wieder, der zweite Term die durch Ω hinzukommende Bewegung. Der Darboux-Vektor ist absolut, d.h. vom Bezugssystem unabhängig und deshalb seine Transformationsformel einfacher[3]. Als direkte Konsequenz aus (5) erhalten wir skalare Invarianten der Kurve:

3 Lemma (Krümmung und Torsion). *Sei γ eine Kurve mit begleitenden Reperen $E, \widetilde{E}$ wie oben und gelte $\omega^\perp \neq 0$. Dann lässt sich (ω_1, ω_2) bzw. $(\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2)$ in Polarkoordinaten (r, φ) bzw. $(\widetilde{r}, \widetilde{\varphi})$ darstellen und wir erhalten folgende Relation:*

$$\widetilde{r} = r \qquad \widetilde{\varphi} = \varphi - \psi \tag{7}$$

Ferner sind die folgende Größen vom gewählten begleitenden Reper unabhängige:

$$\kappa = \sqrt{{\omega_1}^2 + {\omega_2}^2}, \qquad \tau = \omega_0 + \frac{\omega_1 {\omega_2}' - \omega_2 {\omega_1}'}{{\omega_1}^2 + {\omega_2}^2} \tag{8}$$

κ heißt Krümmung und τ Torsion. An Kurvenpunkten mit $\omega^\perp = 0$ setzten wir $\kappa = \tau = 0$.

Beweis. Gleichung (7) ergibt sich aus $\widetilde{\omega}^\perp = \omega^\perp$ und Abb.1. Also sind $\sqrt{{\omega_1}^2 + {\omega_2}^2} = r$ sowie $\omega_0 + \varphi'$ Invarianten, denn $\widetilde{\omega}_0 + \widetilde{\varphi}' = \omega_0 + \psi' + \varphi' - \psi' = \omega_0 + \varphi'$ wegen (5). Schließlich lässt sich φ' in Termen der ω_i ausdrücken in der Formel $\varphi' = \frac{\omega_1 {\omega_2}' - \omega_2 {\omega_1}'}{{\omega_1}^2 + {\omega_2}^2}$. □

2.5 Bishop-Reper

Wir suchen nun für eine beliebige Kurve begleitende Repere $\widetilde{E}$ mit der Eigenschaft $\widetilde{\omega}_0 = 0$. Ein Reper mit dieser Eigenschaft heiße *Bishop-Reper*. Wählen wir zunächst ein beliebiges Reper E und transformieren dieses durch drehen um $\psi\vec{t}$ in ein Reper $\widetilde{E}$. Nach (5) gilt dann $\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 + \psi'$, d.h.

$$\widetilde{\omega}_0 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \psi' = -\omega_0$$

Durch diese Differentialgleichung ist ψ bis auf eine Konstante eindeutige bestimmt. Mit der Umbenennung $\vec{p}_i = \widetilde{V}_i$ und $\kappa_i = \omega_i$ lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_2 & -\kappa_1 \\ -\kappa_2 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

[3] Die Transformationsformel (6) findet sich auch in Cartans allgemeiner Theorie der Reper-Bündeln wieder.

Aus (9) lässt sich auch eine mehr geometrische Charakterisierung des Bishop-Reper ableiten[4]:

$$\vec{p}_i \perp \vec{t} \qquad \text{und} \qquad \vec{p}_i{}' \parallel \vec{t} \tag{10}$$

Krümmung und Torsion berechnen sich im Bishop-Reper nach folgenden Formeln:

$$\kappa = \sqrt{{\kappa_1}^2 + {\kappa_2}^2} \qquad \tau = \frac{\kappa_1 {\kappa_2}' - \kappa_2 {\kappa_1}'}{{\kappa_1}^2 + {\kappa_2}^2}$$

Mit anderen Worten

4 Lemma. *Für $\kappa \neq 0$ sind $\left(\kappa, \int \tau\right)$ die Polarkoordinaten der Kartesischen Koordinaten (κ_1, κ_2).*

2.6 Frenet-Serret-Reper

Nun suchen wir ausgehend von einem beliebigen Reper E ein um $\psi\vec{t}$ gedrehtes Reper $\widetilde{E}$ mit $\widetilde{\omega}_1 = 0$. Ein Reper mit dieser Eigenschaft heiße *Frenet-Serret-Reper*. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $\omega^\perp \neq 0$. Dann sind die Polarkoordinaten (r, φ) von (ω_1, ω_2) wohldefiniert und mit $\psi = \varphi - \frac{\pi}{2}$ erhalten wir nach (7) $\widetilde{\varphi} = \varphi - \psi = \frac{\pi}{2}$, also $\widetilde{\omega}_1 = 0$, $\widetilde{\omega}_2 = \kappa$ und $\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 + \psi' = \omega_0 + \varphi' = \tau$. Dieses Reper ist das in der Kurventheorie üblicherweise verwendete. $\vec{n} = \widetilde{V}_1$ heißt *Normale*, $\vec{b} = \widetilde{V}_2$ *Binormale*. Die Bewegungsgleichungen lauten:

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$\vec{n}$ lässt sich bis auf ein Vorzeichen auch durch die geometrische Bedingung $\vec{n} \parallel \vec{t}'$ charakterisieren. Dabei wählt man im Fall $\kappa \neq 0$ das Vorzeichen so, dass $\vec{t}' = \kappa\vec{n}$. Gibt es hingegen Punkte auf der Kurve mit verschwindenen Krümmungsvektor $\vec{t}'(s) = 0$, so existiert nicht in jedem Fall ein Frenet-Serret-Reper und auch dessen Eindeutigkeit kann im Falle $\kappa \neq 0$ verloren gehen. Eine notwendige und hinreichend Bedingung ist offensichtlich, dass man $\frac{\vec{t}'}{|\vec{t}'|}$ zu einer stetigen Funktion modulo Vorzeichen fortsetzen kann:

5 Lemma (Existenz). *Sei γ eine Kurve versehen mit einem beliebigen begleitenden Reper E. Ferner seien (r, φ) die Polarkoordinaten von (ω_1, ω_2) dort wo diese definiert sind. Dann existiert ein Frenet-Serret-Reper für γ genau dann wenn sich $\varphi \mod \pi$ auf den ganzen Definitionsbereich von γ stetig fortsetzen lässt.*

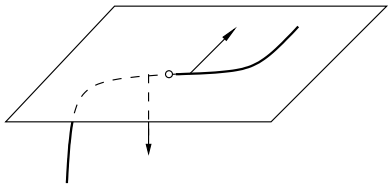


Abb.2 *$\vec{n}$ nicht stetig fortsetzbar*

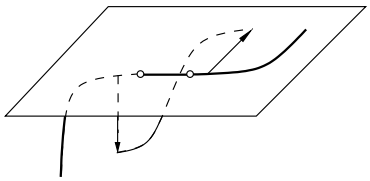


Abb.3 *$\vec{n}$ stetig fortsetzbar*

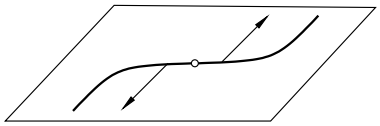


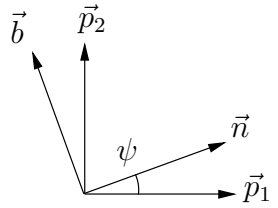
Abb.4 *$\vec{n}$ stetig fortsetzbar modulo Vorzeichen*

6 Bemerkung (Ko-Frenet). Aus einem Frenet-Serret-Reper ($\omega_1 = 0$) lässt sich durch vertauschen von $\vec{n}$ und $\vec{b}$ sofort ein Reper konstruieren, dass der Bedingung $\omega_2 = 0$ genügt und umgekehrt. Aus jetziger Sicht erscheint eine Unterscheidung überflüssig. Diese wird aber notwendig, falls das Reper durch weitere Bedingungen festgelegt ist. Daher wollen wir ein Reper mit $\omega_2 = 0$ als *Ko-Frenet-Reper* bezeichnen.

[4] Betrachte $\vec{t} : [0, l] \to S^2$ als sphärische Kurve, dann ist die Bedingung $\vec{p}_i \perp \vec{t}$ äquivalent zu $\vec{p}_i \in T_{\vec{t}}S^2$ und $\vec{p}_i{}' \parallel \vec{p}$ besagt $\vec{p}_i{}' \perp T_{\vec{t}}S^2$ - also ist $\vec{p}_i$ parallelverschoben längs $\vec{t}$ wie wir in Abschnitt 2.10 sehen werden. Ferner könne die $\vec{p}_i$ als eine Basis paralleler Schnitte im Normalenbündel der Kurve verstanden werden.

2.7 Bishop versus Frenet-Serret

Setzten wir $\kappa \neq 0$ für eine Kurve γ voraus, existieren sowohl ein Bishop-Reper $E = \{\vec{t}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ als auch ein Frenet-Serret-Reper $\widetilde{E} = \{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ und wir können diese mithilfe der allgemeinen Transformationsformel zueinander in Beziehung setzen. Gehe also $\widetilde{E}$ aus E durch drehen um $\psi\vec{t}$ hervor. Betrachten wir in beiden Reperen den Krümmungsvektor $\vec{t}'$ so ergibt sich mit (9) und (11):



$$\begin{aligned} \kappa\vec{n} &= \kappa_2\vec{p}_1 - \kappa_1\vec{p}_2 \\ \kappa\vec{b} &= \kappa_1\vec{p}_1 + \kappa_2\vec{p}_2 \\ \psi' &= \tau \qquad \text{(nach Lemma 2)} \end{aligned}$$

7 Beispiel (Helix). Betrachten wir eine Schraubenlinie $h_{R,\alpha}(t) = (R\cos t, R\sin t, \alpha t)^t$ vom Radius R und Anstieg α. Man errechnet leicht das Frenet-Serret-Reper:

$$\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\alpha^2}}\begin{pmatrix} R\sin t \\ -R\cos t \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\alpha^2}}\begin{pmatrix} -R\cos t \\ -R\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\alpha^2}}\begin{pmatrix} \alpha\sin t \\ -\alpha\cos t \\ R \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$\kappa = \frac{R}{R^2+\alpha^2}, \qquad \tau = \frac{\alpha}{R^2+\alpha^2}$$

Betrachten wir etwa einen Stab, dessen Längsachse wir mit $\gamma(t) = t$ parametrisieren und dessen Profil von den Vektoren V_1, V_2 aufbespannt werde. Nun formen wir den Stab so um, dass seine Längsachse zu einer beliebigen Kurve γ wird. V_1, V_2 beschreiben dabei, wie sich das Profil des Stabs verhält. $\{\vec{t}, V_1, V_2\}$ ist dann ein den Stab begleitendes Reper und nach der allgemeinen Formel (3)

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}\vec{t} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

beschreibt ω_0 seine *Verdrillung* sowie $-\omega_2$ bzw. ω_1 seine *Verbiegung* in Richtung V_1 bzw. V_2 Das Frenet-Serret-Reper beschreibt den Spezialfall, bei dem das Profil des Stabes nur in Richtung V_1 verbogen ist - dies tritt auf wenn der Stab in Richtung V_1 wesentlich dünner ist als in Richtung V_2. Dagegen beschreibt das Bishop-Reper den Fall, bei dem die Verbiegung des Stabes ständig die Richtung ändert, der Stab dafür aber nicht verdrillt wird - dies tritt zum Beispiel bei einem Rohr mit runden Querschnitt auf.

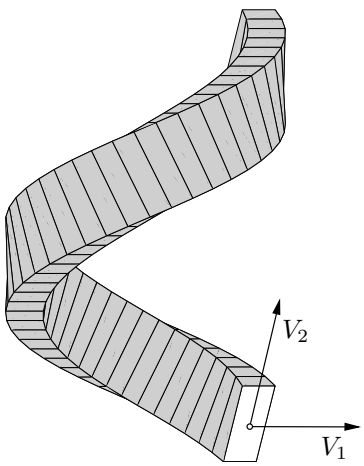


Abb.5 *Frenet-Reper - einseitig verbogen, verdrillt*

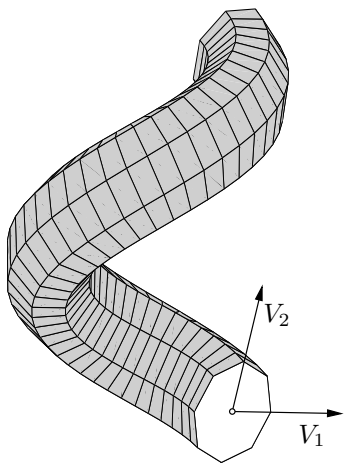


Abb.6 *Bishop-Reper - beiseitig verbogen, unverdrillt*

Bei der Helix stimmen Bishop-Reper und Frenet-Serret-Reper überein, wenn die Kurve in einer Ebene liegt. Dies gilt ganz allgemein:

8 Lemma (Ebene Kurven). *Eine Kurve ist eben, genau dann wenn sie ein begleitendes Reper besitzt, dass sowohl Frenet-Serret-Reper als auch Bishop-Reper ist. Unter der Voraussetzung $\kappa \neq 0$ ist dies äquivalent zu $\tau = 0$.*

Beweis. Beginnen wir mit einer ebenen Kurve $\gamma \subset P$. Sei $V_2 \perp P$ ein normierter Vektor, der senkrecht auf der Ebene P steht. Dann bildet $E = \{\vec{t}, V_2 \times \vec{t}, V_2\}$ ein Reper und wegen ${V_2}' = 0$ ist E sowohl ein Bishop- als auch ein Frenet-Serret-Reper. Umgekehrt existiere für γ ein begleitendes Reper E mit dieser Eigenschaft. Dann können wir die Argumente zurückverfolgen und erhalten $\vec{t} \perp V_2$, d.h. $\gamma(s) - \gamma(0) \perp V_2$ mittels Integration. Siehe auch Satz 15. □

2.8 Navigation von Fisch und Vogel

Wir stellen uns jetzt folgende Frage: wie muss ein Körper gesteuert werden, damit er sich entlang einer vorgegebenen Kurve bewegt? Wir setzten dabei voraus, dass die Bewegungsrichtung e_0 sein möge. Ferner betrachten wir zunächst nur den Fall konstanter Geschwindigkeit - allgemeine Formeln ergeben sich daraus mit den im Abschnitt 2.3 gemachten Überlegungen. Die steuerbaren Größen sind die ω_i bzw. A. Durch Integration von (1) erhalten wir zunächst:

9 Satz (Integration). *Für ein gegebenes Anfangs-Reper E(0) und eine 1-parametrische Schar schiefsymmetrischer Matrizen $A(s)$ existiert genau eine 1-parametrische Schar von Reperen $E(s)$, die der Gleichung $E'(s) = A(s)E(s)$ genügen.*

Beweis. Man rechnet direkt nach, dass $E(s) = \exp\left(\int_0^s A(\tau)\, d\tau\right)$ eine Lösung der Differentialgleichung $E' = AE$ ist. Ferner ist der Exponent schiefsymmetrisch, mithin $E(s)$ für alle s orthogonal. □

In einem zweiten Integrationsschritt erhalten wir dann die Kurve γ aus $\gamma'(s) = e_0(s)$. Fazit: γ ist durch Vorgabe von A bestimmt bis auf eine Drehung $E(0)$ und eine Translation $\gamma(0)$.

Zu einer gegebenen Kurve γ gibt es aber eine ganze Schar begleitender Reper, wie wir gesehen haben. Mit einem Segelflugzeug lassen sich im Prinzip alle diese realisieren, da es ja alle Steuerparameter ω_i beliebig variieren kann. Anders sieht es z.B. bei Fischen aus: Mit ihrer hinteren Flosse variieren sie den Gierwinkel ω_2 (rechts-links) während sie mit ihre seitlichen Flossen hauptsächlich den Neigungswinkel ω_1 (oben-unten) beeinflussen[5] Die Bedingung $\omega_0 = 0$ besagt aber, dass sich ein Fisch entlang seiner Bahn wie das Bishop-Reper verhält und zur Steuerung nur die Parameter (κ_1, κ_2) benutzt. Diese bestimmen die Bahnkurve im wesentlichen eindeutig:

10. Hauptsatz der Fische. *Zwei Kurven γ und $\widetilde{\gamma}$ sind kongruent genau dann wenn sich bzgl. ihrer Bishop-Repere die Krümmungsfunktionen (κ_1, κ_2) und $(\widetilde{\kappa_1}, \widetilde{\kappa_2})$ nur durch eine konstante Drehung in der Ebene unterscheiden.*

Vögel hingegen können durch unterschiedlichen Auftrieb an ihren Flügeln probelmelos den Kippwinkel ω_0 variieren, sowie durch die Schwanzfedern den Neigungswinkel ω_1. Hingegen wird im allgemeinen $\omega_2 = 0$ gelten wegen des Fehlens eines Seitensuders. Damit realisieren Vögel im wesentlichen das Ko-Frenet-Reper (vgl. Bemerkung 6) und es gilt $\kappa = |\omega_1|$ sowie $\tau = \omega_0$ (für $\kappa \neq 0$). Nicht jede Kurve kann auf diese Art durchflogen werden, denn das setzt ja die Existenz eines Frenet-Serret-Repers voraus. Für die Eindeutigkeitsaussage brauchen wir sogar die noch restriktivere Bedingung $\kappa \neq 0$:

[5] Dies ist natürliche eine grobe Vereinfachung. Zum einen ist ein Fisch natürlich kein starrer Körper und seine Navigation beruht weniger auf einer festen Stellung der Flossen als deren geschickter Bewegung (Undulation). Zum anderen sind Fische sehrwohl in der Lage durch gegensätzliches Verhalten der seitlichen Flossen sich um ihre Längsachse zu drehen, d.h. $\omega_0 \neq 0$ - sie scheinen dies aber mehr als Korrekturinstument zum Aufrichten denn als Navigationsmittel einzusetzen.

11. Hauptsatz der Vögel. *Zwei Kurven γ und $\widetilde{\gamma}$ mit nirgends verschwindender Krümmung sind kongruent genau dann wenn ihre Krümmung und ihre Torsion übereinstimmen.*

Aber auch ein Flugzeug tut gut daran das Seitenruder sparsam einzusetzten, also mit kleinen Gierwinkel ω_2 zu fliegen, da für den Beschleunigungsvektor γ'' gilt:

$$\gamma'' = \left(\gamma'\right)' = \left(|\gamma'| \cdot \vec{t}\right)' = |\gamma'|' \, \vec{t} + |\gamma'|^2(\omega_2 V_1 - \omega_1 V_2)$$

Der erste Term ist die Beschleunigung in Richtung der Bahnkurve, hervorgerufen durch eine Veränderung der Geschwindigkeit. Der zweite Term ist quadratisch in der Geschwindigkeit und von der Krümmung der Kurve abhängig. Er wird also durch eine Richtungsänderung hervorgerufen und als sogenannte *Fliehkraft* empfunden. Für $\omega_2 = 0$ zeigt diese in Richtung V_2, also nach oben oder unten, während man für $\omega_2 \neq 0$ auch seitliche Kräfte verspürt.

2.9 Darboux-Reper, Geodäten und Krümmungslinien

Als nächstes betrachten wir Kurven, die in einer Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ verlaufen. In dieser Situation lässt sich der Kurve ein im wesentlichen eindeutig bestimmtes Reper $\{\vec{t}, \vec{h}, N\}$ zuordnen, wobei die *Flächennormale* N durch die Bedingung $N(s) \perp T_{\gamma(s)}M$ charakterisiert ist, d.h. der Tangentialraum $T_{\gamma(s)}M$ wird von den Vektoren $\vec{t}$ und $\vec{h}$ aufgespannt.. Die Bewegungsgleichungen dieses Repers entsprechen der allgemeinen Form, wobei wir folgende Bezeichnung festlegen wollen:

$$\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{h} \\ N \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\kappa_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{h} \\ N \end{pmatrix} \tag{12}$$

κ_g heißt *geodätische Krümmung*, κ_n *Normalkrümmung* und τ_g *geodätische Torsion*. Krümmung und Torsion der Kurve berechnen sich nach Lemma 3 aus

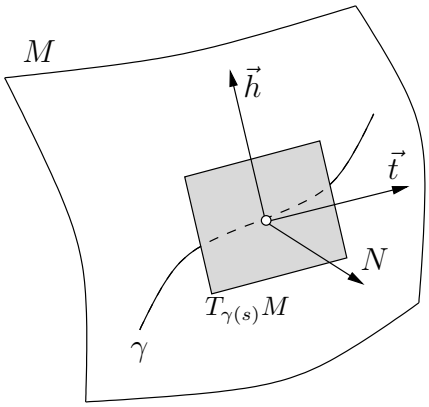


Abb.7 *Darboux-Reper*

$$\kappa = \sqrt{{\kappa_g}^2 + {\kappa_n}^2} \qquad \tau = \tau_g + \frac{\kappa_n \kappa_g' - \kappa_g \kappa_n'}{{\kappa_g}^2 + {\kappa_n}^2}$$

und wir fragen uns , inwieweit man die Krümmung der Kurve variieren kann wenn sie dabei in der Fläche verbleiben und ihre Richtung beibehalten soll. Die Antwort auf diese Frage führt uns in die Geburtsstunde der Flächentheorie (siehe z.B. [5][S. 72]):

12 Satz (Meusnier). *Sei $\gamma \subset M$ eine Kurve, die in einer Fläche M durch den Punkt p verläuft. Dann stimmen für alle Kurven in M, die im Punkt p die Tangente mit der Kurve γ gemeinsam haben, auch die Normalkrümmung und geodätische Torsion überein.*

Beweis. In der unterste Zeile von (12) steht die Richtungsableitung der Flächennormale $N' = DN(\vec{t}) = -\kappa_n \vec{t} - \tau_g \vec{h}$ in Richtung $\vec{t}$. Diese ist zwar von $\vec{t}$, nicht aber von der Krümmung der Kurve abhängig[6]. □

An dieser Stelle haben wir ganz wesentlich die Schiefsymmetrie von $A = E^{-1}E'$ ausgenutzt. κ_n und τ_g sind demnach Größen, die der Geometrie der Fläche zugeschrieben werden müssen und deshalb durch die Wahl der Kurve nicht beeinflusst werden können. Kurven mit $\kappa_g = 0$ minimieren also an jedem Punkt der Kurve deren Krümmung bei vorgegebener Richtung und werden *Geodäten* genannt. Sie verallgemeinern das Konzept der Geraden im Euklidischen Raum als der *am wenigsten gekrümmten* Linien auf Flächen. Die Bedingung $\kappa_g = 0$ ist äquivalent zu $\vec{t}' \parallel N$ oder nach Bemerkung 6:

[6] Die Bilinearform $II(v, w) = -\langle DN(v), w\rangle$ heißt *zweite Fundamentalform* der Fläche. Sie ist symmetrisch (Euler), siehe z.B. [5] und $\kappa_n = -\langle N', \vec{t}\rangle = II(\vec{t}, \vec{t})$ sowie $\tau_g = -\langle N', \vec{h}\rangle = II(\vec{t}, \vec{h})$.

13 Lemma (Geodäte). *Eine Kurve $\gamma \subset M$ ist genau dann eine Geodäte, wenn das Darboux-Reper ein Ko-Frenet-Reper ist.*

Ein Teilchen, dass sich ohne Einwirken anderer Kräfte in einer Fläche bewegt, beschreibt eine geodätische Bahn, da genau dann seine Beschleunigung senkrecht zur Fläche ist. Der Fliehkraft wirkt dann die Zwangskraft des *in-der-Fläche-Verbleibens* entgegen. Diese Beobachtung macht es auch plausibel, warum es zu einem beliebig vorgegebenen Tangentialvektor $V \in T_pM$ genau eine Geodäte γ mit $\gamma'(0) = V$ gibt.

Als nächstes beleuchten wir den Fall, dass das Darboux-Reper mit dem Bishop-Reper übereinstimmt, also $\tau_g = 0$. Kurven, die dieser Bedingung genügen, heißen *Krümmungslinien.* Die geodätische Torsion $\tau_g(s)$ - also das Kippen der Flächennormale nach rechts oder links - misst ganz allgemein, wie die Normalkrümmung $\kappa_n(s)$ im Punkt $p = \gamma(s)$ von der Richtung $\vec{t}$ abhängt[7]Für $\tau_g = 0$ ist die Normalkrümmung κ_n in Richtung $\vec{t}$ entweder extremal oder aber die Normalkrümmung im Punkt p ist gänzlich unabhängig von der Richtung. Solche Punkte einer Fläche werden *umbilisch* genannt. Auf einer Fläche, die nur aus umbilisch Punkten besteht, ist also jede beliebige Kurve Krümmungslinie. Beispiele hierfür kennen wir:

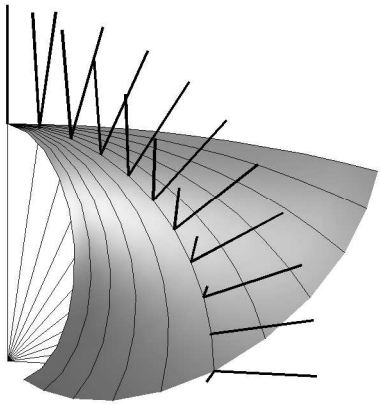


Abb.8 *Veranschaulichung der geodätischen Torsion als Änderung der Normalkrümmung*

14 Beispiel (Sphäre und Ebene). Bezeichne $S_R \subset \mathbb{R}^3$ eine Sphäre vom Radius R bzw. eine Ebene für $R = \infty$. Für jede Kurve $\gamma \subset S_R$ ist dann das Darboux-Reper auch ein Bishops-Reper und die Bewegungsgleichungen nehmen folgende Gestalt an:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{h} \\ N \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \frac{1}{R} \\ -\kappa_g & 0 & 0 \\ -\frac{1}{R} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{h} \\ N \end{pmatrix}}_{\text{sphärischen Kurve } \gamma \subset S_R} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{h} \\ N \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & 0 \\ -\kappa_g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{h} \\ N \end{pmatrix}}_{\text{ebene Kurve } \gamma \subset S_\infty} \tag{13}$$

Im Fall der Sphäre folgt dies aus $N = -\frac{\gamma}{R}$, bei der Ebene aus $N' = 0$. Die Krümmungsfunktion $(\kappa_1, \kappa_2) = \left(\kappa_g, \frac{1}{R}\right)$ liegt also auf einer Geraden mit Abstand $\frac{1}{R}$ zum Ursprung. Erstaunlicherweise ist auch die Umkehrung nicht schwer zu beweisen:

15 Satz (Sphärische und ebene Kurven). *Sei γ eine Kurve, so dass bzgl. ihres Bishop-Repers (κ_1, κ_2) auf einer Geraden mit Abstand d zum Ursprung liegen, dann ist γ in einer Sphäre vom Radius $\frac{1}{d}$ oder einer Ebene ($d = 0$) enthalten.*

Beweis. Zunächst können wir das Bishop-Reper $\{\vec{t}, \vec{p}_2, \vec{p}_1\}$ so wählen, dass $-\kappa_1 = d$ gilt. D.h. A hat genau die Gestalt wie in (13) mit $d = 0$ bzw. $d = \frac{1}{R}$. Im ersten Fall folgt aus (13) sofort $\vec{t} \perp \vec{p}_2$, d.h. $\gamma(s) - \gamma(0) \subset \vec{p}_2{}^{\perp}$. Im Fall $d \neq 0$ betrachten wir die sphärische Kurve $\widetilde{\gamma} = -R\vec{p}_2$. Dann gilt $\widetilde{\gamma}' = -R\vec{p}_2{}' = \vec{t}$, d.h. $\widetilde{\gamma}$ ist ebenfalls nach Bogenlänge parametrisiert und hat dieselbe Ableitung wie γ. Also ist $\widetilde{\gamma} - \gamma$ konstant. □

16 Korollar. *γ ist genau dann eine sphärische Kurve wenn $\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2 \tau}\right)^2 = R^2$.*

Beweis. Die Polarkoordinaten (r, φ) eines Punktes $(\frac{1}{R}, \kappa_2)$ erfüllen die Relation $\cos\varphi = \frac{1}{Rr}$. Ableiten dieser Identität ergibt $\varphi' \sin\varphi = \frac{r'}{Rr^2}$, also $\frac{1}{r^2} + \left(\frac{r'}{r^2\varphi'}\right)^2 = R^2$. Lemma 4 liefert nun die gewünschte Formel. □

[7]Sei $V(\varphi) = \cos\varphi\vec{t} + \sin\varphi\vec{h}$ eine Familie von Einheitsvektor in T_pM. Dann ist $II(V, V)$ die Normalkrümmung einer durch den Punkt p in Richtung V verlaufenden Kurve und unter Ausnutzung der Symmetrie von II sowie $V(0) = \vec{t}$, $V'(0) = \vec{h}$ erhält man $II(V, V)'(0) = 2II(V, V')(0) = 2II(\vec{t}, \vec{h}) = \tau_g$.

Es bleibt noch die Frage zu klären, ob bei einer Fläche M, die ausschließlich aus umbilischen Punkten besteht, die Normalkrümmung κ_n noch vom Punkt abhängen kann oder überhaupt konstant ist, wie im Beispiel der Sphäre oder Ebene. Zur Vorbereitung benötigen wir folgendes klassische Resultat:

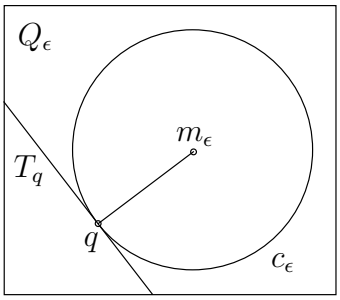
17 Satz (Joachimsthal). *Seien M_1, M_2 zwei Flächen die sich in einer Kurve $\gamma = M_1 \cap M_2$ schneiden. Ferner sei γ Krümmungslinie von M_1. Dann ist γ auch Krümmungslinie von M_2 genau dann wenn der Schnittwinkel der Flächen entlang γ konstant ist.*

Beweis. Wir betrachten die Darboux-Repere $D_i = \{\vec{t}, \vec{h}_i, N_i\}$ von γ in M_i. Nach Voraussetzung ist γ Krümmungslinie von M_1 als ist D_1 ein Bishop-Reper. Nun ist auch D_2 ein Bishop-Reper genau dann wenn es aus D_1 durch drehen um einen konstanten Winkel hervorgeht. Dies ist aber äquivalent dazu, dass der Winkel zwischen N_1 und N_2 konstant ist längs γ. □

18 Satz (Umbilische Flächen). *Sei M eine zusammenhängende Fläche, deren Punkte alle umbilisch sind, dann ist M Teil einer Sphäre oder Ebene.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Normalkrümmung in jedem Punkt der Fläche verschwindet. Sei nun $\gamma \subset M$ eine beliebige Kurve durch einen Punkt $p \in M$, so ist diese wegen $\kappa_n = \tau_g = 0$ in einer Ebene senkrecht zur Flächennormalen enthalten, also $\gamma \subset T_pM$ und damit $M \subset T_pM$. Bleibt also der Fall zu untersuchen, wo ein Punkt $p \in M$ mit $\kappa_n(p) \neq 0$ existiert.

Sei P eine Ebene durch p, die die Flächennormale $N(p)$ enthält, dann schneiden sich M und P in allen Punkten längs der Schnittkurve $\gamma \subset M \cap P$ senkrecht, also $N \circ \gamma \in P$. Denn sowohl in M als auch in P ist jeder Punkt umbilisch, mithin jede Kurve Krümmungslinie. Insbesondere also auch γ und nach Satz 17 ist der Schnittwinkel von M und P längs γ konstant.



Damit zeigen wir, dass der Schnitt von M mit einer Ebene parallel zur Tangentialebene T_pM ein Kreis ist, genauer: sei Q_ϵ die Ebene senkrecht zu $N(p)$ durch den Punkt $m_\epsilon = p + \epsilon\,\kappa_n(p)N(p)$. Dann ist für kleines $\epsilon > 0$ der Schnitt $c_\epsilon = M \cap Q_\epsilon$ nicht-leer wegen $\kappa_n \neq 0$ und eine Kurve, da $N(q) \nparallel N(p)$ für $q \in M \cap Q_\epsilon$. Wir zeigen, dass c_ϵ ein Kreis mit Mittelpunkt m_ϵ in der Ebene Q_ϵ ist. Nach Konstruktion der Kurve c_ϵ ist ihre Tangente im Punkt q gerade $T_q = T_qM \cap Q_\epsilon$. Sei P die Ebene durch die Punkte p, q, m_ϵ, dann gilt nach der Vorbemerkung $N(p), N(q) \in P$, d.h. T_qM und Q_ϵ schneiden P senkrecht. Daraus folgt $T_q \perp P$ und insbesondere $T_q \perp \overline{m_\epsilon q}$. Die Radien $\overline{m_\epsilon c_\epsilon}$ stehen also senkrecht auf der Kurventangente, was nur für einen Kreis möglich ist.

Damit ist M rotationssymmetrisch um p mit Rotationsachse $N(p)$. Insbesondere ist κ_n konstant längs der Kreise $c_\epsilon = M \cap Q_\epsilon$. Dies gilt nun aber für jeden Punkt der Fläche und mit etwas 'rangieren' kann man je zwei Punkte durch kleine Kreisbögen miteinander verbinden (M zusammenhängend), d.h. κ_n ist auf ganz M konstant. Mit Satz 15 folgt nun sofort $M \subset S_{\frac{1}{\kappa_n}}$. Die Tatsache ansich, dass M um jede seiner Normalen $N(p)$ rotationssymmetrisch ist, legt anschaulich bereits den Schluss nahe, dass M Teil einer Sphäre oder Ebene ist. □

Ist die Schnittkurve γ einer Fläche M mit einer Ebene P Krümmungslinie von M, so ist der Schnittwinkel von$M$ und P längs γ nach Satz 17 konstant, denn in P ist jede Kurve Krümmungslinie. Ist der Schnittwinkel in einem und daher in allen Schnittpunkten $\frac{pi}{2}$, so ist γ sogar Geodäte. Umgekehrt gilt:

19 Lemma. *Ist eine Krümmungslinie auch Geodäte, so ist sie in einer Ebene enthalten. Ferner schneidet diese Ebene die Fläche in jedem Punkt senkrecht.*

Beweis. Eine Kurve ist nach Lemma 13 eine Geodäte, falls das Darboux-Reper ein Ko-Frenet-Reper ist. Ferner ist die Kurve eine Krümmungslinie, falls ihr Darboux-Reper ein Bishop-Reper

ist. Damit ist das Frenet-Reper auch ein Bishop-Reper und nach Lemma 8 ist die Kurve eben. Die zweite Aussage folgt sofort aus $\vec{t}' \parallel N$. □

20 Korollar. *Die Geodäten der Sphäre sind Schnitte derselben mit Ebenen durch ihren Mittelpunkt, d.h. Großkreise.*

Kurven mit verschwindender ...	**Kurvenbezeichnung**	**Darboux-Reper entspricht ...**
Geodätischer Krümmung: $\kappa_g = 0$	Geodäte	Ko-Frenet-Reper
Normalkrümmung: $\kappa_n = 0$	Asymptotenlinie	Frenet-Reper
Geodätischer Torsion: $\tau_g = 0$	Krümmungslinie	Bishop-Reper

2.10 Parallel-Reper und Parallelverschiebung

Eine Gerade in der Ebene kann auch als Kurve beschrieben werden, deren Tangente an jedem ihrer Punkte in dieselbe Richtung weist. Diese uns so vertraute Beobachtung macht davon Gebrauch, dass wir Richtungen an verschiedenen Punkten der Ebene vergleichen können: Sei g eine Gerade durch einen Punkt p der Ebene und p' ein weiterer Punkt, so liegt p' entweder auf der Geraden selbst oder es existiert eine eindeutig bestimmte zu g parallel Gerade g' durch p'. In beiden Fällen können wir also von 'derselben Richtung' in p und p' sprechen [8]. Das Konzept der Geraden haben wir bereits im letzten Abschnitt durch den Begriff der Geodäten auf gekrümmte Flächen übertragen. Dahingegen wird der Versuch, zu einer Geodäten in jedem Punkt der Fläche *genau eine* parallele, d.h. diese nicht schneidende Geodäte zu finden, auf einer gekrümmten Fläche im allgemeinen fehlschlagen. In manchen Fällen gibt es garkeine wie z.B. auf der Sphäre, in anderen undendlich viele. Außerdem kann dies noch von Punkt zu Punkt auf der Fläche variieren. Auch wenn wir hier das Konzept eines globalen Parallelismus aufgeben müssen, kann man sich fragen, ob man wenigstens längs Kurven sich eine Richtung 'merken' kann. Gegeben sei also eine Kurve $\gamma : [0, l] \to M$ in einer Fläche und ein tangentialer Vektor $V \in T_{\gamma(0)}M$ in ihrem Anfangspunkt. Die Frage ist nun: wie lässt sich V längs γ fortsetzen wenn wir fordern, dass der Vektor einerseits in jedem Punkt der Kurve tangential an die Fläche, andererseits aber seine Änderung so gering wie möglich ist. Stellen wir den Vektor mittels des Darboux-Repers dar, so kommt beim ableiten (12) ins Spiel. Bei genauerer Betrachtung kennen wir aber das Resultat des folgenden Lemmas bereits, wie die darauffolgende Bemerkung verdeutlicht:

21 Lemma. *Sei $\gamma \subset M$ eine Kurve in einer Fläche, $\{\vec{t}, \vec{h}, N\}$ ihr Darboux-Reper und κ_g die geodätische Krümmung der Kurve. Ferner betrachte eine beliebige Schar tangentialer Vektoren $V = R\cos\varphi\vec{t} + R\sin\varphi\vec{h}$ längs γ. Dann ist $|V'|$ in jedem Punkt minimal genau dann wenn $R' = 0$ und $\varphi' = -\kappa_g$. Diese dynamische Bedingung lässt sich geometrisch charakterisieren durch*

$$V' \parallel N \tag{14}$$

V heißt dann parallelverschoben längs γ.

Beweis. Die Ableitung V' kann man direkt ausrechnen. Das Ergebnis ist nach Lemma 2 nicht erstaunlich:

$$V' = \frac{R'}{R}V + (\omega + \varphi' N) \times V \tag{15}$$

wobei ω den Darboux-Vektor des Darboux-Reper bezeichne. Da sowohl beide Summanden senkrecht zueinander sind als auch $N \perp V$, folgt für den Betrag:

$$|V'|^2 = |R'|^2 + \left(R^2|\omega + \varphi' N|^2 - \langle \omega, V\rangle^2\right)$$

[8] Diese Eigenschaft ist einer von fünf Grundpfeilern - das sogenannte 'Parallelenaxiom' - auf denen Euklid die ebene Geometrie errichtete. Trotzdem es so selbstverständlich erscheint, ließ es sich nicht aus den andere Axiomen herleiten und es dauerte länger als zwei Jahrtausende bis man erkannte warum: es gibt Geometrien, in denen es nicht erfüllt ist.

Dann ist $|V'|$ minimal genau dann wenn $R' = 0$ und $|\omega + \varphi' N|$ minmal ist. Wegen $\omega + \varphi' N = \tau_g + \vec{t} - \kappa_n \vec{h} + (\kappa_g + \varphi')N$ ist letzteres äquivalent zu $\kappa_g + \varphi' = 0$. Natürlich hängt auch $\langle \omega, V \rangle$ über V von φ ab, nicht aber von φ'. Genau hier unterscheiden sich *punktweise* und *globale* Minimierung von $|V'|$, vgl. Bemerkung 24. Schließlich ist aus (15) leicht zu ersehen, dass $V' \parallel N$ genau dann wenn $R' = \varphi' + \kappa_g = 0$. □

Ein Reper der Gestalt $\{V_1, V_2, N\}$ heißt *parallel*, falls die V_i parallelverschoben sind längs γ. Ein solches Reper ergibt sich aus dem Darboux-Reper durch drehen um $\left(-\int \kappa_g\right) N$ und ist eindeutig bestimmt bis auf einen konstanten Winkel. Ein Vektor V ist also paralleverschoben längs γ genau dann wenn V konstant ist bzgl. eines parallelen Reper.

22 Beispiel (Breitenkreis). Sei $\gamma_\beta(s) = R(\cos\beta\cos s, \cos\beta\sin s, \sin\beta)$, $s \in [0, \pi]$ ein Breitenkreis einer Sphäre vom Radius R. Seine Krümmung ist $\kappa = \frac{1}{R\cos\beta}$, der Kehrwert seines Radius, die Normalkrümmung $\kappa_n = \frac{1}{R}$ und damit die geodätische Krümmung

$$\kappa_g = \sqrt{\kappa^2 - {\kappa_n}^2} = \frac{\tan\beta}{R} \tag{16}$$

Ein parallelverschobenes Reper längs γ_β ist nach einer Umrundung gegenüber dem Darboux-Reper also um

$$-\int_0^{2\pi} \nu\kappa_g = -2\pi\sin\beta \tag{17}$$

gedreht. Am Äquator ($\beta = 0$) stimmen beide Repere überein (vgl. Korollar 25), ein Vektor ist hier also genau dann parallel verschoben, wenn er einen konstanten Winkel zum Äquator einnimmt. An den Polen ($\beta = \pm\frac{\pi}{2}$) entartet der Breitenkreis zu einem Punkt, das Darboux-Reper dreht sich um 2π. Das parallele Reper ist hier konstant, denn die scheinbare Drehung um -2π ist in Wirklichkeit auf die Drehung des Bezugs-Repers zurückzuführen.

23 Bemerkung (Paralleles Reper/Bishop-Reper). Sei $\{V_1, V_2\}$ ein paralleles Reper längs einer Kurve $\gamma \subset M$, so ist $\{N, V_1, V_2\}$ ein Bishop-Reper längs der Kurve $\int N$. Umgekehrt induziert ein Bishop-Reper $\{\vec{t}, \vec{p}_1, \vec{p}_2\}$ einer Kurve $\widetilde{\gamma}$ ein paralleles Reper längs der sphärischen Kurve $\vec{t}$ - der sogenannten *Tangenten-Indikatrix*. Dies ergibt sich sofort aus der Entsprechung von (10) und (14). Ferner entspricht dem Frenet-Reper von $\widetilde{\gamma}$ das Darboux-Reper von $\vec{t}$:

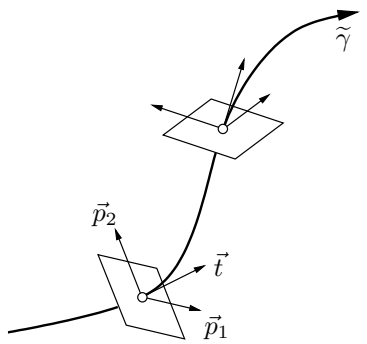


Abb.9 *Bishop-Reper längs* $\widetilde{\gamma}$

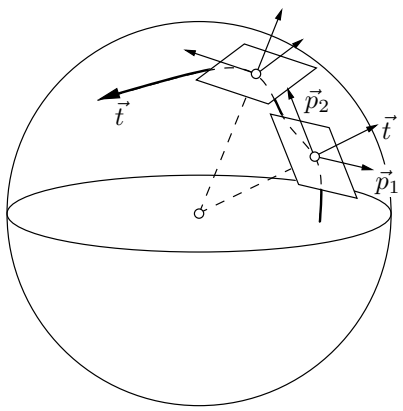


Abb.10 *Paralleles Reper längs* $\vec{t}$

Zum Beispiel entspricht der Helix $\widetilde{\gamma} = h_{R,\alpha}$ aus Beispiel (7) der Breitenkreis $\vec{t} = \gamma_\beta$ auf der Einheitssphäre mit $\beta = \arctan\frac{\alpha}{R}$ parametrisiert mit $\nu = |\vec{t}'| = \frac{R}{\sqrt{R^2+\alpha^2}}$, der *Krümmung* der Helix. Ein paralleles Reper längs γ_β dreht sich daher mit der Winkelgeschwindigkeit $\nu\kappa_g = \nu\tan\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{R^2+\alpha^2}}$ gegenüber dem Darboux-Reper. Dies wiederum ist gerade die *Torsion* der Helix, die Winkelgeschwindigkeit zwischen ihrem Bishop- und Frenet-Reper.

24 Bemerkung. Ein parallelverschobener Vektor V minimiert in jedem Punkt $\gamma(s)$ die Ableitung $|V'(s)|$ bei festem $V(s)$. Eine bezüglich der Kurve *globale* Minimierung dieser Ableitung führt z.B. auf kritische Punkte des Energie-Funktionals $\int \langle V', V' \rangle$. Wir werden im Abschnitt 3.2 sehen, dass die Lösung dieses dynamischen Systems im allgemeinen wohl keine rein geometrische Interpretation zulässt.

Auch die zu Beginn dieses Abschnitts gegebene Charakterisierung der Geraden überträgt sich auf Geodäten einer beliebige Flächen:

25 Korollar. *Eine Kurve $\gamma \subset M$ ist Geodäte genau dann wenn ihr Darboux-Reper parallel ist, d.h. $\vec{t}$ ist parallel längs γ.*

3 Dynamik starrer Körper mit 1 oder 2 Freiheitsgraden

Ein frei schwingendes Fadenpendel in einem homogenen, d.h. ortsunabhängigen Schwerefeld, behält unter geeigneten Anfangsbedingungen im wesentlichen seine Schwingungsebene bei - auch wenn man seinen Aufhängepunkt langsam variiert. Auf der Erdoberfläche unterliegt ein solches Pendel jedoch einem zentralen Schwerefeld, d.h. in Ruhe wird es immer zum Erdmittelpunkt zeigen. Wird es nun um die Erde herumbewegt, wie das z.B. für ein auf der Erde fest montiertes Pendel durch die Erdrotation stets der Fall ist, wird es gezwungen, von seiner konstanten Schwingungsebene abzuweichen, denn diese würde im allgemeinen nicht mehr die Achse zum Erdmittelpunkt enthalten. Diese Korrektur wird in einem mit der Erde mitrotierenden Bezugssystem als Drehung wahrgenommen. Diese wurde zuerst von Foucault beobachtet und als Beweis für die Rotation der Erde herangezogen. Das Beharrungsvermögen der Schwingungsebene und die gleichzeitige Notwendigkeit der veränderlichen Kraftrichtung zu folgen, lässt einen Zusammenhang zum Paralleltransport vermuten. Die allgemeine Bewegungsgleichung eines Oszillators in Tangentialebenen längs einer Kurve wird in [1] behandelt.

Aus folgenden Gründen wollen wir hier jedoch ein etwas modifiziertes mechanisches System untersuchen: zum einen kann ein gravitationsgetriebenes Pendel auf handlichen, geometrischen Modellflächen, wie etwa einem Ball seine Wirkungsweise nicht entfalten. Ferner reagiert das Pendel auf Störungen mit komplexen Bewegungen, die sich nicht allein durch eine Drehung der Schwingungsebene beschreiben lassen. Dies zeigt sich auch daran, dass die Bewegungsgleichungen nur näherungsweise gelöst werden können. Dabei werden Terme, die in höherer Ordung von der Geschwindigkeit abhängen, vernachlässigt.

Beleuchten wir zunächst die Rolle der Gravitation beim Fadenpendel, um sie dann durch eine geeignete Kraft zu ersetzen: zum einen bringt sie das Pendel dazu um seine Ruhelage zu oszillieren, zum anderen sorgt sie dafür, dass der Pendelfaden in Ruhe *normal*, seine Schwingungsrichtung also *tangential* zur Erdoberfläche ist. Daher können wir die Schwerkraft durch eine *Zwangskraft* ersetzen, die es der Pendelmasse nur noch erlaubt, sich tangential zur sphärischen Oberfläche zu bewegen. Ferner zeigt das Experiment bzw. eine Analyse der Bewegungsgleichungen, dass der Effekt der Parallelverschiebung bereits für eine unbewegliche Massenverteilung auftritt[9]. Unser mechanisches System ist also schlicht ein starrer Körper, der sich, einer Kompass-Nadel gleich, nur in tangentialer Richtung bewegen kann. Im folgenden werden wir es als *Foucault'sche Hantel* bezeichnen. Im Vergleich zum Pendel haben wir die Bewegung auf einen Freiheitsgrad reduziert.

3.1 Kinetische Energie eines starren Körper

In diesem Abschnitt leiten wir kurz die Formel für kinetische und potentielle Energie eines starren Körpers her. Wir modellieren ihn durch eine endliche Anzahl Massepunkte r_i der Masse m_i. Beschreibe γ die Bahn seines Massenschwerpunkts $\gamma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i$ und sei $E = \{e_0, e_1, e_2\}$ ein

[9] Eine anschauliche Erklärung hierfür liefern die Coriolis-Kraft 2.Art - siehe Abschnitt 3.3.

mit dem Körper starr verbundenes, mitbewegtes Reper, dessen Ursprung wir uns an die Stelle γ denken, so hat jeder Massepunkt bzgl. E konstante Koordinaten ${v_i}^t = (v_{i0}, v_{i1}, v_{i2})$ und

$$r_i = \gamma + {v_i}^t E \qquad \Rightarrow \qquad {r_i}' = \gamma' + \omega \times {v_i}^t E$$

Wegen $\sum_{i=1}^n m_i v_i = 0$ ergibt sich daraus für die kinetische Energie:

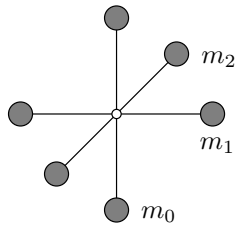
$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i \langle {r_i}', {r_i}' \rangle \\ &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i |\gamma'|^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n m_i \big(|\omega|^2 |v_i|^2 - \langle \omega, v\rangle^2\big) + \sum_{i=1}^n m_i \langle \gamma', \omega \times {v_i}^t E\rangle \\ &= \tfrac{1}{2} M |\gamma'|^2 + \tfrac{1}{2}\omega^t J \omega \\ &= T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} \end{aligned}$$

Dabei ist $T_{\text{trans}} = \frac{1}{2}M|\gamma'|^2$ die *Translationsenergie*, $T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega^t J\omega$ die *Rotationsanenergie* mit

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \qquad J = \sum_{i=1}^n m_i \Big(|v_i|^2 Id - {v_i}^t v_i\Big) = \sum_{i=1}^n m_i \begin{pmatrix} v_{i1}^2 + v_{i2}^2 & -v_{i0}v_{i1} & -v_{i0}v_{i2} \\ -v_{i1}v_{i0} & v_{i0}^2 + v_{i2}^2 & -v_{i1}v_{i2} \\ -v_{i2}v_{i0} & -v_{i2}v_{i1} & v_{i0}^2 + v_{i1}^2 \end{pmatrix} \tag{18}$$

M ist die *Gesamtmasse*, J der *Trägheitstensor* des starren Körpers. J ist eine symmetrisch Bilinearform. Wählt man als Reper E ein *Hauptachsensystem* bestehend aus normierten Eigenvektoren von J, so hat J Diagonalgestalt und für die *Hauptträgheitsmomente* J_i auf der Diagonalen gilt[10]:

$$J_i + J_j \geq J_k \quad i, j, k \text{ paarweise verschieden} \tag{19}$$



Tritt in einem Fall von (19) Gleichheit ein, ist der Körper eben, für $J_i = 0$ sogar linienförmig. Ferner erlaubt die Relation (19) immer eine Lösung des Gleichungssystems $(m_i + m_j)/2 = J_k$ und ein beliebiger starrer Körper kann durch ein Gebilde bestehend aus 6 Massen m_i auf den Hauptachsen in den Punkten $\pm e_i$ ersetzt werden, ohne dabei sein Trägheitsmoment und damit die dynamischen Eigenschaften des Körpers zu verändern.

Die potentielle Energie V bzgl. eines homogenen Schwerefeldes in z-Richtung gleicht der potentiellen Energie der Gesamtmasse vereinigt im Schwerpunkt γ:

$$V = \sum_{i=1}^n m_i (r_i)_z = M\gamma_z$$

3.2 Foucault'sche Hantel

Betrachten wir einen starren Körper, dessen Schwerpunkt entlang einer vorgegebenen Kurve $\gamma(t)$[11] auf einer Fläche M geführt wird. Dabei möge er sich in tangentialer Richtung beliebig drehen können. Ferner beschränken wir uns auf den Fall, dass eine der Hauptachsen N des Körpers senkrecht zu der Fläche ist, die anderen V_1, V_2 damit tangential. Insgesamt ergibt sich also das mit dem Körper assoziierte Hauptachsen-Reper $\widetilde{E} = \{V_1, V_2, N\}$ aus dem Darboux-Reper $E = \{\vec{t}, \vec{h}, N\}$ durch eine noch zu bestimmende Rotation um φN. Für die Darboux-Vektoren $\omega, \widetilde{\omega}$ der beiden Repere $E, \widetilde{E}$ gilt $\widetilde{\omega} = \omega + \varphi' N$ (vgl. Lemma 2 bzw.21) und $\omega = \nu\big(\tau_g \vec{t} + \kappa_n \vec{h} + \kappa_g N\big)$ mit $\nu = |\gamma'|$ (vgl. Abschnitt 2.3). Stellen wir $\widetilde{\omega}$ bezüglich $\widetilde{E}$ dar, ergibt sich

$$\widetilde{\omega} = \nu\big(\kappa_n \sin\varphi + \tau_g \cos\varphi\big)V_1 + \nu\big(\kappa_n \cos\varphi - \tau_g \sin\varphi\big)V_2 + (\nu\kappa_g + \varphi')N$$

[10] Für die Diagonalelemente jeder der Matrizen aus (18) gilt dies bezüglich einer beliebigen Basis, also auch im Hauptachsensystem. Dies auf direkten Weg für die Eigenwerte J_i zu verifizieren scheint schwierig zu sein.

[11] Wir fordern an dieser Stelle nicht mehr, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert sei.

Damit ist die Rotationsenergie der Foucault'schen Hantel in Abhängigkeit der Winkelfunktion φ

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}}(\varphi) &= \tfrac{1}{2}\,\widetilde{\omega}^t J \widetilde{\omega} \\ &= \tfrac{1}{2}\big[J_0\widetilde{\omega}_0^2 + J_1\widetilde{\omega}_1^2 + J_2\widetilde{\omega}_2^2\big] \\ &= \tfrac{1}{2}\big[J_0(\varphi' + \nu\kappa_g)^2 + J_1\nu^2(\kappa_n \sin\varphi + \tau_g\cos\varphi)^2 + J_2\nu^2(\kappa_n\cos\varphi - \tau_g\sin\varphi)^2\big] \end{aligned} \tag{20}$$

Nun bilden wir die Lagrange-Funktion $L = T - V$ in Abhängigkeit von φ, φ' und t. Die physikalisch realisierte Bewegung φ des mechanischen Systems ist dann stationärer Punkt des Wirkungsintegrals $S(\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L(\varphi, \varphi', t)\,dt$ bezüglich Variationen mit festen Endpunkten $\varphi(t_i)$. Dazu äquivalent ist, dass φ die die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \tag{21}$$

In unserem Fall hängen T_{trans} und V nicht von φ, φ' ab und wir erhalten die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \varphi'}\right) - \frac{\partial T_{\text{rot}}}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt}\left(\widetilde{\omega}^t J\,\tfrac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \varphi'}\right) - \widetilde{\omega}^t J\,\tfrac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \varphi} \\ &= J_0\,\frac{d}{dt}(\nu\kappa_g + \varphi') - \widetilde{\omega}^t J\,\tfrac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{22}$$

Es lohnt sich hier vorallem zwei Spezialfälle zu betrachten:

Rad $J_1 = J_2$:
In diesen Fall ist das Trägheitsmoment des Körpers für alle tangentialen Richtungen gleich, wie z.B. bei einem Rad, dessen Achse längs γ mit der Flächennormalen $N \circ \gamma$ zusammenfällt. Mithin ist die Lagrange-Funktion gänzlich unabhänig von φ und die Euler-Lagrange-Gleichung (22) liefert eine Erhaltungsgröße, sofern das Rad nicht zu einer bloßen Achse entartet, d.h. $J_0 \neq 0$:

$$\varphi' + \nu\kappa_g = k_0, \qquad k_0 = \text{konstant} \tag{23}$$

Befinde sich das Rad zum Zeitpunkt $t = 0$ in Ruhe und gelte für die Kurve $\lim_{t\to 0}\nu(t) = 0$ bzw. $\kappa_g(0) = 0$, so erhält man aus der Anfangsbedingung $\varphi'(0) = 0$ die Konstante $k_0 = 0$. Die resultierende Bewegungsgleichung $\frac{\varphi'}{\nu} + \kappa_g = 0$ zeigt, dass φ eine geometrische Grösse, also unabhängig von der Bahngeschwindigkeit ν ist und mit Lemma 21 erhalten wir schließlich:

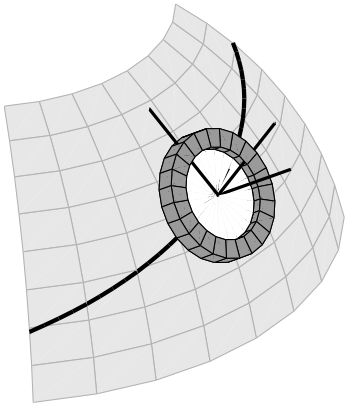


Abb.11 *Foucault'sches Rad*

26 Satz. *Ein zu Beginn ruhendes Rad, das entlang einer Kurve γ in einer Fläche so geführt wird, dass seine Achse stets senkrecht zur Fläche steht, verhält sich wie ein paralleles Reper längs γ.*

Stab $J_1 = 0$:
Dieser Fall wird z.B. durch einen Stab realisiert, dessen Mittelpunkt längs γ geführt wird und der dabei zu allen Zeiten - einer Kompassnadel gleich - tangential zur Fläche gehalten wird. Bemerke, dass hier automatisch $J_0 = J_2$ gilt wegen (19). Damit gleicht die Rotationsenergie des Stabes der kinetischen Energie einer Masse J_0 im Punkt V_1 (vgl. Bem. 24):

$$T_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2}J_0\big(|\widetilde{\omega}|^2 - \langle\widetilde{\omega}, V_1\rangle^2\big) = \tfrac{1}{2}J_0|V_1{}'|^2$$

und wir erhalten in (22) den zusätzlichen Term

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}^t J\,\tfrac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \varphi} &= J_1\nu^2(\kappa_n\cos\varphi - \tau_g\sin\varphi)(-\kappa_n\sin\varphi - \tau_g\cos\varphi) \\ &= J_1\nu^2\left(-\kappa_n\tau_g\cos(2\varphi) + ({\tau_g}^2 - {\kappa_n}^2)\frac{\sin(2\varphi)}{2}\right) \end{aligned}$$

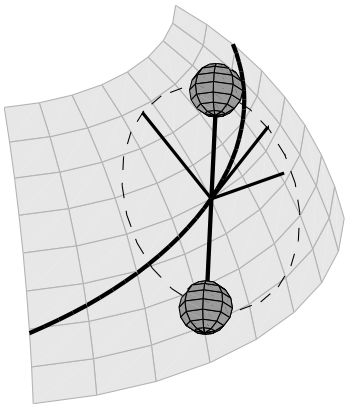


Abb.12 *Foucault'scher Stab*

Begnügen wir uns, die Situation auf einer Sphäre vom Radius R zu beschreiben, so vereinfacht sich die Bewegungsgleichung (22) wegen $\tau_g = 0$ zu

$$\varphi'' + (\nu\kappa_g)' - (\nu\kappa_n)^2 \frac{\sin(2\varphi)}{2} = 0 \tag{24}$$

Den ersten Teil der Gleichung kennen wir bereits - er entspricht unter geeigneten Anfangsbedingungen dem Paralleltransport des Stabes längs γ. Der quadratische Term in ν ist die Gleichung eines mathematischen Pendels bezüglich der Winkelfunktion 2φ mit stabilen stationären Zustand $\varphi = 0, \pi$ (Stab in Richtung $\vec{t}$) und instabilen stationären Zustand $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ (Stab in Richtung $\vec{h}$).

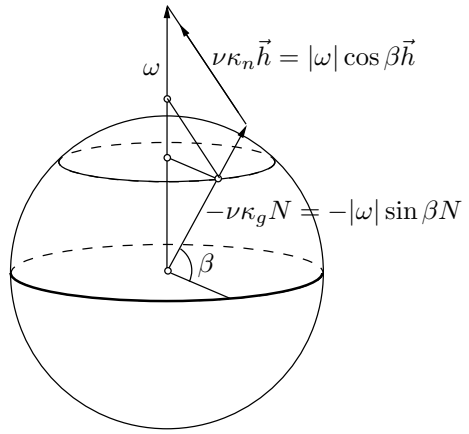


Abb.13 *Komponenten der Erddrehung*

Betrachte die zum Foucault'schen Pendel analoge Situation: der Rotationsvektor ω der Erde zeigt in Richtung Süd-Nord. Die Bahngeschwindigkeit eines auf geographischer Breite β fixierten Darboux-Repers ist $\nu = R|\omega|\cos\beta$, damit ist $\nu\kappa_n = |\omega|\cos\beta$ die *Tangentialkomponente* von ω. Diese bewirkt beim Stab eine Schwingung um die Ost-West-Richtung, deren Periode $|\omega|\cos\beta$ von den Polen zum Äquator hin zunimmt. Die *Normalkomponente* $|\omega|\sin\beta = \nu\kappa_g$ von ω macht sich hingegen unter geeigneten Anfangsbedingungen als Winkelgeschwindigkeit einer Drehung des Stabes bemerkbar, die wir oben als Parallelverschiebung gedeutet haben. $\nu\kappa_g$ verschwindet am Äquator, da dieser eine Geodäte, sein Darboux-Reper also selbst parallel ist. Gemeinhin wird angenommen, dass das Foucault'sche Pendel am Äquator seine Schwingungsebene beibehält. Theoretisch stimmt dies jedoch nur für eine Schwingung in Ost-West-Richtung - alle anderen Schwingungsrichtungen sind instabil. Gewöhnlich wird der für diese Instabilität verantwortliche Term beim Foucault'schen Pendel jedoch vernachlässigt, da er quadratisch in ν ist.

3.3 Interpretation mit Coriolis- und Fliehkraft

Wir betrachten ein beliebiges Reper E als *rotierendes* Bezugssystem gegenüber der Standardbasis im $\mathbb{R}^3$. Sei $\gamma = E\lambda$ eine beliebige Kurve, dann sind λ ihre Koordinaten im Bezugssystem E. Wir berechnen die Beschleunigung der Kurve, wie sie in beiden Bezugssystemen wahrgenommen wird:

$$\begin{aligned} \gamma' &= E'\lambda + E\lambda' = \omega \times E\lambda + E\lambda' \\ \gamma'' &= \omega' \times E\lambda + \omega \times (\omega \times E\lambda) + 2\omega \times E\lambda' + E\lambda'' \end{aligned}$$

γ'' ist die *reale* Beschleunigung, der eine physikalisch reale Kraft zugrunde liegt. $E\lambda''$ ist die Beschleunigung wie sie uns im Bezugssystem E *erscheint*. Die Differenz erklärt sich einem Beobachter in E durch zusätzliche Kräfte, die daher auch manchmal *Scheinkräfte* genannt werden[12]:

$\omega \times (\omega \times E\lambda)$	Fliehkraft
$2\omega \times E\lambda'$	Coriolis-Kraft 1.Art
$\omega' \times E\lambda$	Coriolis-Kraft 2.Art

Auf der Erde erfährt man meistens die Auswirkungen der Coriolis-Kraft 1.Art bezüglich der Normalkomponente $R|\omega|\sin\beta N$ der Erddrehung (vgl. Abb.13): Auf der Nordhalbkugel wird ein sich in beliebige Richtung bewegendes Teilchen γ scheinbar in Richtung $N \times \gamma'$, also nach *rechts* abgelenkt - auf der Südhalbkugel nach links, da am Äquator das Vorzeichen von $\sin\beta$ wechselt. Dies ist genau die Kraft, die die Schwingungsebene des Foucault'schen Pendels maßgeblich dreht.

Die Coriolis-Kraft 2.Art erfährt man hingegen nur, wenn sich die Winkelgeschwindigkeit ändert, also zum Beispiel, wenn man den Breitengrad und damit κ_g bzw. die Bahngeschwindigkeit ν

[12] Ob diese Kräfte tatsächlich vorhanden sind, ist philosophisch eine knifflige Frage und eng mit dem Begriff der Trägkeit verknüpft. Im Alltag, sind die Scheinkräfte jedoch meistens sehr real.

variiert. Dies drückt sich direkt in Gleichung (23) $\varphi'' + (\nu\kappa_g)' = 0$ aus und ist der Mechanismus der Foucault'schen Hantel.

Das Rad ist aufgrund seiner Symmetrie unempfindlich gegenüber tangentialen Fliehkräften. Nicht so der Foucault'sche Stab. Er unterliegt der Einwirkung der durch $|\omega|\cos\beta\vec{h}$ hervorgerufenen Beschleunigung in Richtung $\vec{t}$.

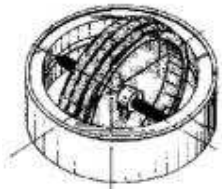
3.4 Das Geheimnis des Gyrotwisters

Dieser merkwürdige Kreisel hat sicherlich schon viele Leute fasziniert und wir wollen hier seine Bewegungsgleichung herleiten, da wir den nötigen Formalismus bereits zur Hand haben. Eine plausible Erklärung seiner Funktionsweise findet man z.B. in [4]. Zunächst formulieren wir Satz 26 nochmals etwas allgemeiner[13]:

27 Satz (Gyroskop). *Betrachte einen symmetrischen Kreisel mit Drehachse N und ergänze diese zu einem Bishop-Reper $E = \{N, \vec{p_1}, \vec{p_2}\}$. Dann ist die Winkelgeschwindigkeit ψ' des Kreisels gemessen bezüglich des Repers E konstant.*

Beweis. Sei $\omega = \kappa_1\vec{p_1} + \kappa_2\vec{p_2}$ der Darboux-Vektor des Repers E dann ist die kinetische Energie des Kreisels $T = \frac{1}{2}\big(J({\kappa_1}^2 + {\kappa_2}^2) + J_0{\psi'}^2\big)$ unabhängig von ψ und $\frac{\partial T}{\partial \psi'} = J_0\psi'$ ist eine Erhaltungsgröße nach (21). □

In diesem Sinne kann ein Gyroskop also weder von außen beschleunigt werden, noch durch eine von ihm selbst verursachte Bewegung seine Rotationsgeschwindigkeit ψ' beeinflussen. Warum also wird der Gyrotwister immer schneller?



Betrachten wir seinen Aufbau etwas näher. Die Achse des Schwungrades ist im Gehäuse in einer Führungsschiene eingelassen, kann sich also nur in dieser Ebene bewegen. Durch die Bewegung der Hand beschreibt die Normale dieser Ebene die Mantellinien eines Kegels. Das ist aber gleichbedeutend damit, dass diese Ebene die Tangentialebene längs eines Breitenkreises auf einer Sphäre ist. Die Kreiselachse lässt sich also darstellen durch den tangentialen Vektor $V_2 = -\sin\varphi\vec{t} + \cos\varphi\vec{h}$ eines Repers $\widetilde{E} = \{V_1, V_2, N\}$, das durch drehen um φN aus dem Darboux-Reper $\{\vec{t}, \vec{h}, N\}$ längs eines Breitenkreises hervorgeht. Wir nehmen hier der Einfachheit halber an, dass der Kreisel vollständig Rund sei, also $J = J_i$.

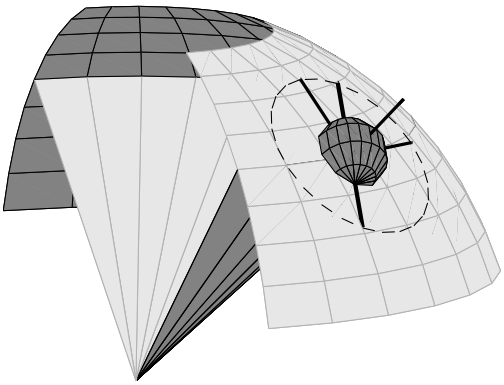


Abb.14 *Gyrotwister oder Kreiselkompass*

Ferner betrachten wir die Rotationsgeschwindigkeit des Schwungrades ψ' bezüglich des Repers $\widetilde{E}$ als konstant, auch wenn $\widetilde{E}$ im allgemeinen nicht parallel ist. Für großes ψ' ist der Fehler gering. Die kinetische Energie ist dann

$$T(\varphi, \varphi') \;=\; \tfrac{1}{2}J\,|\nu\omega + \psi' V_2 + \varphi' N|^2 \;=\; \tfrac{1}{2}J|\widetilde{\omega}|^2$$

wobei $\nu\omega = -\nu\kappa_n\vec{h} + \nu\kappa_g N$ die Drehung des Darboux-Repers und $\widetilde{\omega} = \nu\omega + \psi' V_2 + \varphi' N$ die Gesamt-Rotation des Kreisels beschreibt. Die Euler-Lagrange-Gleichung ergibt dann wegen $\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial\varphi} = -\psi'(\cos\varphi\vec{t} + \sin\varphi\vec{h})$ und $\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial\varphi'} = N$:

$$(\varphi' + \nu\kappa_g)' + \nu\kappa_n\psi'\sin\varphi = 0$$

Für $\nu' = \kappa_g' = 0$ ist dies wiederum die Gleichung eines mathematischen Pendels mit stabiler Ruhelage $\varphi = 0$. Dabei entspricht die Periode der Tangentialkomponente der Erdrotation im Unterschied zum Foucault'schen

[13] Dies ist die physikalische Entsprechung von Bemerkung 23: Zum Beispiel verhält sich eine Perle, die wir einen Draht entlang gleiten lassen, genau wie das Foucault'sche Rad.

Stab. Die Kreiselachse schwingt also um die Nord-Süd-Richtung, bis sie durch Reibung schließlich in dieser Position verharrt. Dieses Prinzip ist schon lange bekannt und wird in der Schiffahrt als *Kreisel-Kompass* genutzt, der sich durch die Erdrotation automatisch nach Norden ausrichtet und zwar um so schneller, je näher man sich am Äquator aufhält (vgl. Abb.13).

Mit dem Gyrotwister verhält es sich genauso, nur dass wir die Erdrotation durch unsere Handbewegung ersetzt haben. Da das Gehäuse fest in unserer Hand liegt, muss sich die Kreiselachse also beständig in der Führungsschiene des Gehäuses drehen und genau hier ist der Antrieb des Schwungrades verborgen. Dazu betrachten wir die Zwangskräfte, die die Führungsschiene auf die Kreiselachse ausübt[14]. Eine Drehung ω übt ganz allgemein ein *Drehmoment* auf einen starren Körper aus, dessen *Drehimpuls*, sich dementsprechend ändert. Hat ein Körper bereits einen Drehimpuls, wie etwa ein Kreisel, führt das dazu, dass sich seine Drehachse in Richtung des wirkenden Drehmoments verschiebt. Dieser Effekt wird *Präzzesion* genannt. Er spiegelt die Drehimpulserhaltung wider, kann aber auch ganz elementar mit Trägkeitskräften verdeutlich werden. In unserem Fall zerlegen wir die Rotation ω gemäß Abb.13. Das tangentiale Drehmoment $\nu\kappa_n\vec{h} = |\omega|\cos\beta\vec{h}$ bewirkt, wie wir gerade gesehen haben das Ausrichten des Kreisels in Richtung $\vec{h}$. Das normale Drehmoment $-\nu\kappa_g N = -|\omega|\sin\beta N$ hingegen wirkt als Zwangskraft auf die Kreiselachse, da diese ja nach Konstruktion in der Tangentialebene verbleiben muss. Das eine Ende der Achse wird dabei nach oben, das andere nach unten gepresst. Durch Reibung erfährt das Schwungrad nun eine Drehmoment. Eine optimale Kraftübertragung findet dann statt, wenn die Achse ohne Schlupf in der Führungsschiene abrollt. Es ist jedoch nicht ganz offensichtlich, dass das Schwungrad auf diese Weise tatsächlich angetrieben und nicht abgebremst wird. Dies zu erkennen ist eine Erfinderleistung, die sich wohl bezahlt gemacht hat. Wir fassen das Ergebniss nocheinmal zusammen:

28 Satz (Kreiselkompass). *Wird ein Kreisel entlang eines Breitenkreises auf einer Sphäre so geführt, dass seine Achse stets tangential ist, so verhält sie sich wie ein mathematisches Pendel um die Nord-Süd-Richtung. Die Ruhelage ist stabil, wenn die Drehung des Kreisels um sich selbst und um die Sphäre herum gleich orientiert sind. Die Periode nimmt von den Polen zum Äquator hin zu, wohingegen die Zwangskraft auf seine Achslager in gleicher weiser abnimmt.*

Je kleinere Bewegungen man also mit dem Gyrotwister macht, desto schwieriger wird es, seine Achse in der stabilen Ruhelage zu halten. Gleichzeitig wächst aber deren Druck auf die Führungsschiene, was wiederum eine bessere Kraftübertragung auf das Schwungrad bedeutet.

Foucault'sches Rad	Parallelverschiebung	Coriolis-Kraft
Foucault'scher Stab	Schwingung um $\vec{t}$	Fliehkraft
Kreiselkompass	Schwingung um $\vec{h}$	Präzision

3.5 Schlussbemerkung

Auf der einen Seite haben wir systematisch die begleitenden Repere räumlicher Kurven untersucht. Dieser Zugang scheint uns davon geprägt zu sein, dass er dynamisch miterlebt werden kann und der Kurventheorie hoffentlich etwas von dem ihr oft anhaftenden 'Lehrbuchcharakter' nimmt. Weiterhin haben wir versucht anzudeuten, dass die Idee Cartans auch in ihrer einfachsten Anwendung am Beispiel der Kurven vorzüglich der Beschreibung aktueller Probleme dient und von Anwendern auch genutzt wird.

Auf der anderen Seite haben wir uns die Frage gestellt, wie grundlegende Konzepte der Flächentheorie dynamische interpretiert werden können. Der Ausgangspunkt unserer Bestrebungen war eigentlich eine physikalische Realisierung des Paralleltransports. Auch hier drängt sich einem früher oder später die Beschreibung mittels Reperen auf, insbesondere bei der Behandlung starrer Körper. Der Paralleltransport liegt uns deshalb so am Herzen, weil sich mit seiner Hilfe auch in abstrakten, d.h. höherdimensionalen, nicht in Euklidische Räume eingebetteten Mannigfaltigkeiten die

[14] Nach dem D'Alembert-Prinzip haben die Zwangskräfte keinen Einfluss auf die Bewegung und der Lagrange-Formalismus setzt dieses Prinzip in eine von Zwangskräften unabhängige Bewegungsgleichung um.

Krümmung definieren lässt. Nachdem Gauß 1827 zeigen konnte, dass die Krümmung von Flächen zu deren *inneren* Eigenschaft zählt, verallgemeinerte Riemann 1827 den Begriff der Krümmung auf abstrakte Mannigfaltigkeit, der durch Einsteins allgemeine Relativitätstheorie physikalisch relevant wurde. Wir denken, dass sich mit der intuitiv erfahrbaren Dynamik der Foucault'schen Hantel auf einer Fläche ohne größere geistige Anstrengungen auch die Abhängigkeit der Bewegung von Materie- und Lichtteilchen von der Krümmung einer Raumzeit in der allgemeinen Relativitätstheorie plausibel machen lässt. Ein Vortrag im Rahmen des Einstein-Jubiläumsjahres vor einer allgemeinen Zuhörerschaft hat dies bestätigt. Aber auch innermathematisch ist das Studium der durch Paralleltransport entlang geschlossener Kurven erzeugten *Holonomiegruppe* ein aktuelles Forschungsthema und wichtiges Werkzeug, die Lösbarkeit von Feldgleichungen zu untersuchen.

Literatur

[1] W. Dittrich and B. Nash. Geometric phase of a transported oscillator. *SLAC-PUB-10354*, 2004.

[2] A.D. Drozdov and Y. Rabin. Elasticity of thin rods with spontaneous curvature and torsion - beyond geometrical lines. `http//arxiv.org/abs/cond-mat/0002004`, 2000.

[3] É. Cartan. La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisées. *Actual. scient. et industr.*, 194, 1935.

[4] H.J. Schlichting and Chr. Ucke. Faszinierendes dynabee. *Physik in unserer Zeit*, 33(5), 2002.

[5] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*, volume 2. Publish Perish, 1979.