

# Kennwertmethoden für stochastische Volterrasche Integralgleichungen

Werner Römisch und Reinhard Schulze

## 1. Einleitung

Die Aufgabenstellung dieser Arbeit resultiert aus den Anforderungen der Praxis nach mathematischer Behandlung dynamischer Systeme mit zufälligen Einflüssen. Solche Anforderungen entstanden z. B. in der Mechanik, der Elektronik, der Regelungstheorie und der Ökonomie. Typische Problemstellungen dafür sind:

- Untersuchung von Fundamenten bei (zufälligen) Bodenerschütterungen, von hohen Gebäuden bei (zufälligen) Windinflüssen, oder der Bewegung von Fahrzeugen bei (zufälligen) Bodenunebenheiten (Zufallsschwingungen);
- Rauschanalyse elektrischer Netzwerke und Optimalfilterung von Rauschvorgängen;
- Konstruktion von Reglern bei Vorliegen zufälliger Störereignisse;
- optimale Steuerung von Produktionsprozessen.

Es treten also sowohl Analyse-, Synthese- als auch Optimierungsprobleme mit zufälligen Parametern auf. Dabei sind die Analyseaufgaben meist Ausgangspunkt für inverse Problemstellungen. Typisch für viele solcher Aufgabenstellungen ist, daß das Verhalten des dynamischen Systems durch eine im allgemeinen nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung mit stochastischen Parametern beschrieben wird. Stochastische Differentialgleichungen dieser Art werden ausführlich in [2] und [19] untersucht. Eine zentrale Aufgabe bei der Untersuchung stochastischer Differentialgleichungen besteht in der Behandlung des sog. Kennwert-Analyseproblems. Hierunter versteht man die statistische Charakterisierung der Lösung der stochastischen Differentialgleichung mit Hilfe statistischer Kenngrößen der stochastischen Eingangsparameter. Die Behandlung des Kennwert-Analyseproblems in dieser Allgemeinheit stößt aber auf große mathematische Schwierigkeiten. Lediglich unter starken Voraussetzungen an die Differentialgleichung und die stochastischen Eingangsparameter sind (Teil-)Lösungen und Näherungsmethoden bekannt. Einige dieser Ergebnisse sollen hier kurz angeführt werden:

- Bei linearen Differentialgleichungen mit stochastischer rechter Seite können Mittelwerts- und Korrelationsfunktion der stochastischen Lösung aus den entsprechenden statistischen Kenngrößen der rechten Seite berechnet werden (vgl. [2, 19]). Für Gaußsche Eingangsparameter ist deshalb für diesen Fall das allgemeine Kennwert-Analyseproblem gelöst. Wesentlich für dieses Vorgehen sind Linearitätseigenschaften von Gleichung und Kennwert (vgl. dazu auch [13]).
- Im Fall nichtlinearer Differentialgleichungen mit stochastischem Anfangswert wird in [19] unter Regularitätsvoraussetzungen eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die Verteilungsdichtefunktion der Lösung abgeleitet.
- Anwendung von Linearisierungsmethoden auf Differentialgleichungen mit „schwachen“ Nichtlinearitäten. Erwähnt sei dabei besonders die Methode der statistischen Linearisierung (vgl. [2] und die dort zitierte Literatur). In [9] wurden beliebige Nichtlinearitäten in Reihen nach sog. orthogonalen stochastischen Polynomen entwickelt und die statistische Linearisierung

als erste Stufe einer solchen Approximation gedeutet. Dieses Vorgehen ist allerdings in [9] zunächst nur auf den Fall statischer Nichtlinearitäten angewandt worden. Schließlich sei auch noch auf den in [13] verwendeten Linearisierungszugang hingewiesen.

- Sind die stochastischen Eingangsparameter ein vektorieller Markov-Prozeß  $u$ , so wird in [2] unter gewissen Regularitätsvoraussetzungen an die Nichtlinearität für den Lösungsprozeß  $x$  bewiesen, daß  $(x, u)^T$  ebenfalls Markovsch mit bekannter Übergangswahrscheinlichkeit ist. In diesem Zusammenhang weisen wir auf die Methoden zur Behandlung stochastischer ITÖ-Differentialgleichungen hin, die auf Markov-Eigenschaften beruhen. Im Rahmen dieser Arbeit sollen allerdings ITÖ-Differentialgleichungen nicht untersucht werden.

- Häufig werden in der Praxis sog. Simulationsmethoden angewendet. Sie besitzen den Vorteil, daß sie vom Typ der Nichtlinearitäten in Gleichung und Kennwerten relativ unabhängig sind. Sie beruhen auf folgendem Prinzip: Zunächst wird eine endliche Anzahl von Realisierungen der stochastischen Eingangsparameter näherungsweise bestimmt, dann werden für diese endliche Familie von Eingangsrealisierungen jeweils die zugehörigen determinierten Gleichungen gelöst und abschließend aus den erhaltenen Ausgangsrealisierungen durch Mittelwertbildung statistische Charakteristiken der stochastischen Lösung approximativ berechnet. Aus der Literatur bekannte Verfahren zur Simulation beruhen meist auf Reihenentwicklungen stochastischer Prozesse mit zufälligen Koeffizienten, wobei sich Mittelwerte und Varianzen dieser Koeffizienten aus Mittelwerts- und Kovarianzfunktion des zu simulierenden Prozesses berechnen lassen (vgl. z. B. [4] und die dort zitierte Literatur). Die Berechnung von Verteilungsfunktionen der Koeffizienten ist im allgemeinen unmöglich. Deshalb stellt dieses Vorgehen faktisch eine Beschränkung auf Gaußsche Prozesse dar bzw. ist im nichtlinearen Fall nicht anwendbar. Hinzu kommt, daß zur praktischen Simulation des Prozesses der Einsatz von (Pseudo-) Zufallsgeneratoren für die numerische Simulation der Koeffizienten unumgänglich ist. Aus diesem Grund sind Konvergenz- bzw. Näherungsaussagen schwierig abzuleiten und von der Güte der jeweils verwendeten Zufallsgeneratoren abhängig.

Bei Betrachtung der hier nur angedeuteten Vielzahl verschiedener Behandlungsmöglichkeiten des Kennwert-Analyseproblems bei stochastischen Differentialgleichungen unter großenteils einschneidenden Voraussetzungen entsteht der Wunsch nach einem universellen Verfahren. Wir verstehen dabei unter Universalität einerseits den Verzicht auf wesentliche Einschränkungen an die stochastischen Eingangsparameter, an den Gleichungstyp und den Typ der zu berechnenden statistischen Charakteristika der Lösung und andererseits die Gewährleistung von Konvergenzaussagen. Wünschenswert ist außerdem, daß ein solches Verfahren ohne Hilfe von (Pseudo-)Zufallsgeneratoren arbeitet und daß es unmittelbar in effektive numerische Algorithmen umgesetzt werden kann. Die Autoren stellen in der vorliegenden Arbeit ein Verfahren mit solchen Eigenschaften zur Diskussion. Dessen Grundidee gleicht der der oben beschriebenen Simulationsmethoden: Ausgangspunkt ist die Approximation der stochastischen Eingangsparameter durch solche mit endlich

vielen Realisierungen. Diese Approximation beruht auf gewissen wahrscheinlichkeitstheoretischen Eigenschaften stochastischer Prozesse. Darauf gehen wir im Kapitel 3 näher ein. Vorher stellen wir einleitend einige mathematische Grundlagen zusammen und untersuchen auch die hier betrachtete Aufgabenklasse von stochastischen Volterraschen Integralgleichungen. In Kapitel 2 schließt sich Definition und Diskussion eines Kennwertbegriffes an. Kapitel 4 beinhaltet die bereits erwähnte Konstruktion von Approximationen stochastischer Prozesse einschließlich Konvergenzaussagen für große Prozeßklassen. In Kapitel 5 erfolgt die Anwendung auf die Berechnung von Kennwerten der Lösungen stochastischer Volterrascher Integralgleichungen. Kapitel 6 enthält Bemerkungen zur numerischen Berechnung der Approximation stochastischer Prozesse und einen vollständigen Algorithmus für den Fall Gaußscher Prozesse. Abschließend weisen wir in Kapitel 7 auf Beispiele hin und werten bisherige Ergebnisse und Erfahrungen. Alle folgenden Darlegungen basieren wesentlich auf [13] und erweitern die dortigen Ergebnisse, wie auch die in [17]. Der Simulationsaspekt wurde in [14, 15] besonders hervorgehoben. [16, 18] enthalten auch bereits Verallgemeinerungen.

Im weiteren sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $(R^m, \mathfrak{B}^m)$  der Borelsche Maßraum über dem  $R^m$  und  $I$  eine Teilmenge des  $R^1$ .  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) bezeichne den Raum aller  $p$ -fach integrierbaren ( $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^m$ -meßbaren) vektoriiellen Zufallsvariablen über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ .  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ist mit der Norm

$$\|z\|_p := \left( \int_{\Omega} |z(\omega)|^p dP \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

bzw.

$\|z\|_{\infty} := \text{ess sup} \{|z(\omega)| \mid \omega \in \Omega\}$  ( $p = \infty$ ) ein Banachraum ( $|\cdot|$  bezeichnet dabei die euklidische Norm des  $R^m$ ).

In üblicher Weise werden dabei  $P$ -fast überall gleiche Zufallsvariablen identifiziert. Zur Definition dieser Räume verweisen wir auf [1, 12].

$x: I \times \Omega \rightarrow R^m$  bezeichne stets einen (vektoriellen) stochastischen Prozeß über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  mit der Parametermenge  $I$ . Wir werden in der Regel stochastische Prozesse betrachten, deren Zufallsvariable Elemente der Banachräume  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  sind. Man sagt, daß  $x$  ein stochastischer Prozeß  $p$ -ter Ordnung ist, falls  $x(t, \cdot) \in L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  für alle  $t \in I$  und schreibt  $x: I \rightarrow L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ . Die Funktionen  $x(\cdot, \omega): I \rightarrow R^m$ ,  $\omega \in \Omega$ , nennen wir Realisierungen des stochastischen Prozesses  $x$ . Schließlich verwenden wir drei Stetigkeitsbegriffe für stochastische Prozesse.

Man nennt einen stochastischen Prozeß  $x: I \times \Omega \rightarrow R^m$

- stochastisch stetig, falls für alle  $t_0 \in I$  und  $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(\{\omega \mid |x(t, \omega) - x(t_0, \omega)| > \varepsilon\}) = 0,$$

-  $R$ -stetig, falls für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$   $x(\cdot, \omega): I \rightarrow R^m$  stetig ist,

- stetig im  $p$ -ten Mittel, falls  $x$  Prozeß  $p$ -ter Ordnung und für alle  $t_0 \in I$  gilt:  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|x(t) - x(t_0)\|_p = 0$ .

Bekanntlich sind  $R$ -stetige Prozesse und im  $p$ -ten Mittel stetige Prozesse auch stochastisch stetig. Ferner ist ein stochastischer Prozeß genau dann im quadratischen Mittel stetig (q. M.-stetig;  $p = 2$ ), wenn seine Korrelationsfunktion stetig ist. Als Literatur weisen wir hierbei auf [3, 7, 12, 22] hin. Auf Grund der bereits oben angedeuteten Betrachtungsweise stochastischer Prozesse als abstrakte Funktionen mit Werten in gewissen Banachräumen von Zufallsvariablen findet hier die Theorie abstrakter Funktionen und die Theorie der Gleichungen in abstrakten Funktionen Anwendung (vgl. [5, 24]). Ist  $B$  ein Banachraum mit der Norm  $\|\cdot\|$  und  $I \subset R^1$  ein kompaktes Intervall, so bezeichne  $(I \rightarrow B)$  wie in [5] die Menge aller abstrakten Funktionen mit Definitionsbereich  $I$  und Wertebereich  $B$ . Wir betrachten nun folgende Räume von abstrakten Funktionen (vgl. [5]):

$$C(I, B) := \{x \in (I \rightarrow B) \mid x \text{ ist stetig bezüglich der Norm } \|\cdot\|\},$$

$$L_p(I, B) := \left\{ x \in (I \rightarrow B) \mid x \text{ ist Bochner-meßbar, } \int_I \|x(t)\|^p dt < \infty \right\}$$

$$(1 \leq p < \infty).$$

$C(I, B)$  bildet mit jeder der Normen

$$\|x\|_{c,k} := \max_{t \in I} \{e^{-kt} \|x(t)\|\} \quad (k \geq 0)$$

einen Banachraum.  $L_p(I, B)$  wird mit der Norm

$$\|x\|_{L_p} := \left( \int_I \|x(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p < \infty)$$

ebenfalls ein Banachraum. Für den Fall der oben eingeführten Banachräume von Zufallsvariablen entstehen hierbei Banachräume stochastischer Prozesse, z. B. ist  $C(I, L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  der Raum aller im  $p$ -ten Mittel stetigen stochastischen Prozesse.

Abschließend betrachten wir nun abstrakte Volterrasche Integralgleichungen. Es seien dazu Banachräume  $B_1$  und  $B_2$  mit den Normen  $\|\cdot\|_{(1)}$  bzw.  $\|\cdot\|_{(2)}$ ,  $I := [t_0, T]$  und  $f: I \times I \times B_1 \times B_2 \rightarrow B_1$ ,  $u \in (I \rightarrow B_2)$ ,  $x_0 \in B_1$  gegeben. Für die folgende Gleichung

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in I, \quad (1)$$

geben wir eine Existenz-, Eindeutigkeits- und Korrektheitsaussage an.

**Satz 1:**

Vor.:  $f: I \times I \times B_1 \times B_2 \rightarrow B_1$  sei stetig und erfülle die folgende Lipschitz-Bedingung: es existiert  $L > 0$ , so daß für alle  $t, s \in I$ ,  $x_1, x_2 \in B_1$ ,  $u_1, u_2 \in B_2$  gilt:

$$\|f(t, s, x_1, u_1) - f(t, s, x_2, u_2)\|_{(1)} \leq L(\|x_1 - x_2\|_{(1)} + \|u_1 - u_2\|_{(2)}).$$

Beh.: a) Für jedes  $x_0 \in B_1$  und jedes  $u \in L_1(I, B_2)$  existiert genau eine Lösung  $x \in C(I, B_1)$  von (1). Dabei ist das Integral in (1) als Bochner-Integral zu verstehen.

b) Sind  $x_0, y_0 \in B_1$  und  $u, v \in L_1(I, B_2)$  beliebig gewählt, so gilt für die zugehörigen Lösungen  $x, y \in C(I, B_1)$ :

$$\|x(t) - y(t)\|_{(1)} \leq e^{L(t-t_0)} (\|x_0 - y_0\|_{(1)} + L \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\|_{(2)} ds), \quad t \in I.$$

**Beweis:**

a) Auf Grund der Eigenschaften von  $f$ , speziell da für beliebige  $t, s \in I$ ,  $x \in C(I, B_1)$ ,  $u \in L_1(I, B_2)$  aus der Lipschitz-Bedingung eine Abschätzung der folgenden Gestalt resultiert:

$$\|f(t, s, x(s), u(s))\|_{(1)} \leq \text{const.} + L(\|x(s)\|_{(1)} + \|u(s)\|_{(2)})$$

existiert das Bochner-Integral

$$\int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in I$$

(vgl. [5], S. 126).

Deshalb ist der folgende Operator definiert:

$$K: C(I, B_1) \rightarrow C(I, B_1)$$

mit

$$(Kx)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in I, \quad x \in C(I, B_1).$$

Man zeigt nun analog zu [5], S. 160/161 daß  $K$  auf  $C(I, B_1)$  strikt kontraktiv bzgl. der Normen  $\|\cdot\|_{c,k}$ ,  $k \geq L$ , ist. Die Behauptung ergibt sich folglich aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

b) Ebenfalls aus der Lipschitzbedingung resultiert die folgende Abschätzung:

$$\|x(t) - y(t)\|_{(1)} \leq \|x_0 - y_0\|_{(1)} + L \int_{t_0}^t \|u(s) - v(s)\|_{(2)} ds + L \int_{t_0}^t \|x(s) - y(s)\|_{(1)} ds, \quad t \in I.$$

Die Behauptung ist nun eine Folgerung aus dem Gronwall-Lemma (vgl. [24], S. 37).

**Bemerkung 1:**

a) Im für uns wichtigen Fall  $B_1 := L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P), B_2 := L_p^r(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ( $m, r \in \mathbb{N}$ ) stellt Satz 1 eine Existenz- und Einzigkeitsaussage für Volterrasche Integralgleichungen des Typs (1) mit den stochastischen Parametern  $x_0 \in L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P), u \in L_1(I, L_p^r(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  dar. Dabei wird  $f: I \times I \times B_1 \times B_2 \rightarrow B_1$  mit Hilfe einer Funktion  $\hat{f}: I \times I \times R^m \times R^r \rightarrow R^m$  nach der Vorschrift  $f(t, s, z, v)(\omega) := \hat{f}(t, s, z(\omega), v(\omega))$  für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega, z \in B_1, v \in B_2, t, s \in I$ , erzeugt. Die Voraussetzung von Satz 1 ist erfüllt, wenn  $\hat{f}: I \times I \times R^m \times R^r \rightarrow R^m$

stetig ist und eine Lipschitz-Bedingung der Gestalt  $|\hat{f}(t, s, z_1, v_1) - \hat{f}(t, s, z_2, v_2)|_{R^m} \leq L(|z_1 - z_2|_{R^m} + |v_1 - v_2|_{R^r})$   $t, s \in I, z_i \in R^m, v_i \in R^r, i = 1, 2$  ( $L > 0$ ) erfüllt (vgl. [10], S. 340ff.). Stochastische Integralgleichungen ähnlichen Typs wurden z. B. in [20] untersucht.

b) Der in a) auftretende Lösungsbegriff für solche stochastischen Gleichungen ist eine Verallgemeinerung der sog. q. M.-Lösungen in [2]. Setzt man für den stochastischen Prozeß  $u$  noch voraus, daß für  $P$ -fast alle Realisierungen  $u(\cdot, \omega) \in L_1(I, R^r)$  gilt, so liefert Satz 1 mit  $B_1 := R^m, B_2 := R^r$  die eindeutige Existenz von sog.  $R$ -Lösungen  $\hat{x}(\cdot, \omega) \in C(I, R^m)$  für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  (vgl. [2]). Setzt man schließlich sogar voraus, daß  $u \in C(I, L_p^r(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  und  $u(\cdot, \omega) \in C(I, R^r)$   $P$ -f. ü., so läßt sich mit Hilfe der Methoden in [13], Abschn. 3, die Äquivalenz beider Lösungsbegriffe, d. h.  $P(\{\omega | x(t, \omega) = \hat{x}(t, \omega)\}) = 1$  für alle  $t \in I$  zeigen. Diese Tatsache wird in [16] als Determiniertheit des Lösungsoperators von (1) bezeichnet.

c) Für die Konvergenz des in den folgenden Kapiteln abzuleitenden Verfahrens ist es ausreichend zu fordern: (1) ist für jedes  $x_0 \in B_1$  und jedes  $u \in L_1(I, B_2)$  eindeutig lösbar und die Zuordnung  $[x_0, u] \rightarrow x$  ist als Abbildung von  $B_1 \times L_1(I, B_2)$  in  $C(I, B_1)$  stetig. Satz 1 b) liefert für diese Zuordnung sogar die Lipschitzstetigkeit. Folglich ist eine wesentliche Abschwächung der Voraussetzungen (vgl. auch Bemerkung 1 a)) möglich.

## 2. Kennwertbegriff, Beispiele

Anliegen dieses Kapitels ist es, den Begriff des Kennwertes in einer so allgemeinen Form zu definieren, daß sich eine einheitliche Darstellungsmöglichkeit ergibt und sich gleichzeitig viele in der Praxis auftretende statistische Charakteristiken stochastischer Prozesse in dieser Form ausdrücken lassen. Dadurch wird es später leichter möglich, das Verfahren zur Lösung des Kennwert-Analyseproblems für (1) einheitlich darzustellen und die Klasse von Kennwerten zu charakterisieren, für die das Verfahren anwendbar ist. Dabei nehmen wir in der Formulierung des Kennwertbegriffs eine geringfügige Modifizierung gegenüber [13] vor. Im folgenden bezeichne  $E: L_1^m(\Omega, \mathfrak{A}, P) \rightarrow R^m$  die Erwartungswertbildung bei vektoriiellen Zufallsvariablen über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , d. h.  $E(z) := \int_{\Omega} z(\omega) dP$ .

**Definition 1:**

Ist  $J$  eine Indexmenge,  $I \subseteq R^1, l, m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty, D \subseteq (I \rightarrow L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  und  $K: D \times J \rightarrow L_1^l(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , so heißt  $F_K: D \times J \rightarrow R^l, F_K(x, j) := E(K(x, j))$ ,  $x \in D, j \in J$ ,  $K$ -Kennwert.  $F_K(x, \cdot): J \rightarrow R^l$  heißt  $K$ -Kennwert des stochastischen Prozesses  $x \in D$ .

**Beispiele:**

a)  $I \subseteq R^1, l = m \in \mathbb{N}, J := I, D := (I \rightarrow L_1^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)), K(x, t) := x(t)$ . Dann ist  $F_K(x, \cdot) = E(x(\cdot)) = m_x(\cdot)$  gerade die Mittelwertfunktion eines vektoriiellen stochastischen Prozesses  $x$  1. Ordnung mit Parametermenge  $I$ .

b)  $I \subseteq R^1, J := I \times I, D := (I \rightarrow L_2^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)), K((x, y), (t, s)) := x(t)y(s), F_K((x, y), (t, s)) := E(x(t)y(s)), x, y \in D, t, s \in I$ . Das heißt  $F_K((x, y), (\cdot, \cdot)) = R_{xy}(\cdot, \cdot): I \times I \rightarrow R^1$  ist die Kreuzkorrelationsfunktion von  $x$  und  $y$ .

c)  $I \subseteq R^1, J := \{j\}, D := L_1(I, L_1^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)), K(x, j) := \int_I x(t) dt, x \in D$ , wobei es sich um das Bochner-Integral handelt,  $F_K(x, j) = \int_I E(x(t)) dt = \int_I m_x(t) dt$ .

d)  $I \subseteq R^1, k \in \mathbb{N}, s_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k s_i = s, J := I^k, D := (I \rightarrow L_s(\Omega, \mathfrak{A}, P)), K(x, (t_1, \dots, t_k)) := x^{s_1}(t_1) \dots x^{s_k}(t_k), x \in D, (t_1, \dots, t_k) \in I^k$ . Das heißt,  $F_K(x, \cdot)$  ist eine sog. gemischte Momentfunktion der Ordnung  $s$  des stochastischen Prozesses  $x$ . Für  $k = 1, s_1 = s = 1$  entsteht die Mittelwertfunktion, für  $k = 2, s_1 = s_2 = 1$  die Autokorrelationsfunktion von  $x$ .

e)  $I \subseteq R^1, k \in \mathbb{N}, J := I^k \times R^k, D := (I \rightarrow L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)), K: D \times J \rightarrow L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

$$K(x, (t_1, \dots, t_k; a_1, \dots, a_k))(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x(t_i, \omega) < a_i \\ & i = 1, \dots, k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$F_K(x, (t_1, \dots, t_k; a_1, \dots, a_k)) = P(\{\omega | x(t_i, \omega) < a_i, i = 1, \dots, k\})$ . Das heißt  $F_K(x, \cdot)$  ist die Verteilungsfunktion  $k$ -ter Ordnung von  $x$ .

f) Keine  $K$ -Kennwerte im Sinne von Definition 1 sind Verteilungsdichtefunktionen und bedingte Erwartungswerte u. ä. Charakteristische Funktionen lassen sich als  $K$ -Kennwerte interpretieren, wenn nur die Räume  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  allgemeiner als komplexe Banachräume aufgefaßt und  $F_K$  als Abbildung in den  $C^m$  verstanden wird.

**Definition 2:**

a) Ein  $K$ -Kennwert  $F_K: D \times J \rightarrow R^l, D \subseteq (I \rightarrow L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  heißt determiniert, falls eine Abbildung  $k: D_k \times J \rightarrow R^l, D_k \subseteq (I \rightarrow R^m)$  existiert, so daß

- (i)  $K(x, j)(\omega) = k(x(\cdot, \omega), j)$ , für alle  $x \in N := \{x \in D \mid \omega(\cdot) \in D_k, P\text{-f. ü.}\}$ , alle  $j \in J$  und  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ ,  
(ii)  $N = D$  oder  $N$  ist dicht in  $D$  bzgl. eines auf  $D$  gegebenen Konvergenzbegriffes  $q$ .

b) Es sei auf  $D \subseteq (I \rightarrow L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  ein Konvergenzbegriff  $q$  gegeben. Ein  $K$ -Kennwert  $F_K: D \times J \rightarrow R^l$  heißt stetig in  $x_0$  (auf  $D$ ) bzgl.  $q$ , wenn für alle  $j \in J$  der Operator  $K(\cdot, j): D \rightarrow L_1^l(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  stetig in  $x_0$  (auf  $D$ ) bzgl.  $q/\|\cdot\|_1$  ist.

c) Es seien  $D \subseteq (I \rightarrow L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  und  $R(K) \subseteq L_1^l(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  lineare (normierte) Räume. Ein  $K$ -Kennwert  $F_K: D \times J \rightarrow R^l$  heißt linear (beschränkt), wenn für alle  $j \in J$  der Operator  $K(\cdot, j): D \rightarrow R(K)$  linear (beschränkt) ist.

**Bemerkung 2:**

a) Die Determiniertheit eines Kennwertes ist ein Analogon zur „Determiniertheit“ der betrachteten Volterraschen Integralgleichungen mit stochastischen Parametern (vgl. Bem. 1 a) und b)). Es zeigt sich, daß z. B. alle Kennwerte in den Beispielen a) bis e) determiniert sind. So ist z. B. ein gemischtes Moment (vgl. Beispiel d)) ein determinierter  $K$ -Kennwert, wenn  $k: D_k \times J \rightarrow R^l, D_k = (I \rightarrow R^1) k(y, (t_1, \dots, t_k)) := y^{s_1}(t_1) \dots y^{s_k}(t_k)$  gewählt wird. Dann gilt  $N = D = (I \rightarrow L^s(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ .

Für den Kennwert aus Beispiel c) wird  $D_k := L_1(I, R^m), k(y, j) := \int_I y(t) dt$  gewählt. Es ist eine spezielle Folgerung aus Satz 4,

daß  $N = \{x \in D \mid x(\cdot, \omega) \in D_K, P\text{-f. ü.}\}$  dicht in  $D = L_1(I, L_1^m \times (\Omega, \mathfrak{A}, P))$  bzgl.  $\|\cdot\|_{L_1}$  ist.

Weitere Beispiele für determinierte (dort: reguläre) Kennwerte findet man in [13]. In [16] wird für gewisse Versagenswahrscheinlichkeiten von Bauwerken die Determiniertheit nachgewiesen. Unter geeigneten Stetigkeitsforderungen an die Operatoren  $K(\cdot, j), j \in J$ , determinierter Kennwerte  $F_K$  ist es möglich,  $F_K(\cdot, j)$  zunächst auf  $N$  mittels  $k(\cdot, j), j \in J$ , zu definieren und anschließend auf  $D$  fortzusetzen.

b) In [13] werden große Klassen nichtlinearer, determinierter (lokal oder global) stetiger Kennwerte angegeben. Als Konvergenzbegriff  $\varrho$  fungiert dort stets die Konvergenz bzgl. der Norm in linearen normierten Räumen  $D$  (in der Regel  $D = C(I, L_p \times (\Omega, \mathfrak{A}, P))$ ). Es zeigt sich, daß z. B. gemischte Momentfunktionen in diesem Sinne stetig sind. Betrachtet man als Konvergenzbegriff  $\varrho$  die punktweise Konvergenz in  $D = (I \rightarrow L_1 \times (\Omega, \mathfrak{A}, P))$ , so ist bekannt, daß die Verteilungsfunktion 1. Ordnung (vgl. Beispiel e))  $F_K(x, (\cdot, \cdot)) = F_x(\cdot, \cdot)$  stetig in  $x_0 \in D$  ist, wenn für jedes  $t \in I$   $F_{x_0}(t, \cdot) : R^1 \rightarrow R^1$  eine stetige reellwertige Funktion darstellt. Wesentliches Ergebnis von Kapitel 5 wird sein, daß das abzuleitende Verfahren gerade zur approximativen Berechnung determinierter, (in der Lösung von (1)) stetiger  $K$ -Kennwerte der Lösung von (1) anwendbar ist.

c) In [13], Abschnitt 6.5., ist ein Darstellungssatz für lineare, beschränkte, determinierte  $K$ -Kennwerte  $F_K : D \times J \rightarrow R^1, D = C(I, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  angegeben. Im Vergleich zu Definition 1 ist zu beachten, daß im dortigen Kennwertbegriff eine mit einer Zufallsvariablen „gewichtete“ Erwartungswertbildung vorgenommen wird.

### 3. Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Im folgenden sollen Hilfsmittel aus der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Theorie stochastischer Prozesse zusammengestellt werden, die der Vorbereitung der wesentlichen Ergebnisse über die Approximation stochastischer Prozesse in Kapitel 4 dienen. Auf folgende Literatur sei dabei besonders hingewiesen: [1, 3, 6, 8, 12].  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  sei wieder ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $2^\Omega$  die Potenzmenge von  $\Omega$ . Dann bezeichne  $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$  für eine beliebige Menge  $\mathfrak{M} \subset 2^\Omega$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathfrak{M}$  enthält.  $\mathfrak{G} \subset 2^\Omega$  heißt Erzeuger einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}'$  über  $\Omega$ , wenn  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ . Eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}'$  über  $\Omega$  heißt separabel, wenn  $\mathfrak{A}'$  einen abzählbaren Erzeuger besitzt. Ist  $z$  eine vektorielle  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}^m)$ -meßbare Zufallsvariable über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , so bezeichne  $\mathfrak{A}_z$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$  bzgl. der  $z$  meßbar ist, d. h.  $\mathfrak{A}_z = \{z^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}^m\}$ . Auf Grund der Eigenschaften der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}^m$  ist  $\mathfrak{A}_z$  stets separabel. Eine Familie  $\{A_j\}_{j \in J}$  von Ereignissen heißt vollständige Ereignisdisjunktion, wenn  $A_j \in \mathfrak{A}, j \in J, A_j \cap A_{j'} = \emptyset, j \neq j', \bigcup_{j \in J} A_j = \Omega$ . Für zwei in  $\mathfrak{A}$  enthaltene  $\sigma$ -Algebren  $\mathfrak{A}_1$  und  $\mathfrak{A}_2$  definieren wir  $\mathfrak{A}_1 \subseteq_P \mathfrak{A}_2$  („ $\mathfrak{A}_1$  ist  $P$ -fast enthalten in  $\mathfrak{A}_2$ “), falls zu jedem  $A_1 \in \mathfrak{A}_1$  ein Ereignis  $A_2 \in \mathfrak{A}_2$  mit  $P((A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)) = 0$  existiert. Weiterhin erklärt man  $\mathfrak{A}_1 =_P \mathfrak{A}_2$  („ $P$ -fast gleich“), wenn sowohl  $\mathfrak{A}_1 \subseteq_P \mathfrak{A}_2$  als auch  $\mathfrak{A}_2 \subseteq_P \mathfrak{A}_1$  erfüllt ist. Schlußfolgerungen daraus sind, daß für zwei  $P$ -fast überall gleiche Zufallsvariable  $z_1, z_2$  über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  stets  $\mathfrak{A}_{z_1} =_P \mathfrak{A}_{z_2}$  gilt und daß aus  $\mathfrak{A}_1 =_P \mathfrak{A}_2$  auch  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}_1, P) = L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}_2, P)$  resultiert.

#### Lemma 1:

Konvergiert eine Folge  $\{z_n\}_n$  von Zufallsvariablen über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  in Wahrscheinlichkeit gegen eine Zufallsvariable  $z$ , so gilt  $\mathfrak{A}_z \subseteq_P \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{z_n}$ .

#### Beweis:

Es bezeichne  $\mathfrak{A}' := \mathfrak{A}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{z_n})$ , und wir betrachten die Folge  $\{z_n\}_n$  über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathfrak{A}', P|_{\mathfrak{A}'})$ . Da  $\{z_n\}_n$

über  $(\Omega, \mathfrak{A}', P|_{\mathfrak{A}'})$  in Wahrscheinlichkeit in sich konvergent ist, konvergiert  $\{z_n\}_n$  in Wahrscheinlichkeit gegen eine  $\mathfrak{A}'$ -meßbare Zufallsvariable  $\hat{z}$ . Daraus ergibt sich  $z = \hat{z}$   $P$ -f. ü. und demnach  $\mathfrak{A}_z =_P \mathfrak{A}' \subseteq_P \mathfrak{A}$ , d. h.  $\mathfrak{A}_z \subseteq_P \mathfrak{A}$ . q. e. d.

Die folgende Aussage stellt nun den Zusammenhang zwischen der Separabilität der  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  eines Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  und der Separabilität der Banach-Räume  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  her.

#### Satz 2:

a) Ist  $\mathfrak{A}$  separabel, so ist auch  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) separabel.

b) Ist  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) separabel, so existiert eine separable  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}$  mit  $\mathfrak{A}_1 =_P \mathfrak{A}$ .

Für den Beweis von Satz 2 verweisen wir auf [13], S. 164/165. Dabei wird im Beweis von Teil a) ein Kriterium über die Separabilität von  $L_p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ , wobei  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Maß über dem Meßraum  $(\Omega, \mathfrak{A})$  darstellt, verwendet, das in [23] zu finden ist. Zum Beweis von Teil b) wird Lemma 1 genutzt. Aussage a) gilt im allgemeinen nicht für  $L_\infty^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  (vgl. ebenfalls [23]).

Es sei nun  $x$  ein stochastischer Prozeß über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  mit Parametermenge  $I \subseteq R^1$  und Zustandsraum  $R^m$ . Dann bezeichne  $\mathfrak{A}_x$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra bzgl. der jede Zufallsvariable  $x(t), t \in I$ , des Prozesses meßbar ist, d. h.

$$\mathfrak{A}_x := \mathfrak{A}(\{[x(t)]^{-1}(B) \mid B \in \mathfrak{B}^m, t \in I\}).$$

Wir untersuchen als folgendes, ob sich die Struktur der  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}_x$  für eine größere Klasse von Prozessen näher beschreiben läßt und ob speziell  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}_x, P)$  separabel ist.

#### Satz 3:

Ist  $x : I \times \Omega \rightarrow R^m$  ein stochastisch stetiger Prozeß und  $S \subseteq I$  eine in  $I$  dichte, abzählbare Menge, so gilt:

$$\mathfrak{A}_x =_P \mathfrak{A}(\bigcup_{t \in S} \mathfrak{A}_{x(t)}).$$

#### Beweis:

Nach Voraussetzung existiert zu jedem  $t_0 \in I$  eine Folge  $\{s_n\}_n, s_n \in S, s_n \rightarrow t_0$ . Deshalb konvergiert  $\{x(s_n)\}_n$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $x(t_0)$ , und es folgt aus Lemma 1:

$$\mathfrak{A}_{x(t_0)} \subseteq_P \mathfrak{A}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{x(s_n)}) \subseteq \mathfrak{A}(\bigcup_{t \in S} \mathfrak{A}_{x(t)}) =: \mathfrak{A}'.$$

Daraus resultiert  $\mathfrak{A}_{x(t)} \subseteq_P \mathfrak{A}'$  für alle  $t \in I$  und folglich nach Definition  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}_x \subseteq_P \mathfrak{A}'$ , d. h.  $\mathfrak{A}_x =_P \mathfrak{A}'$ . q. e. d.

#### Bemerkung 3:

a) Eine Folgerung aus den Sätzen 2 und 3 ist, daß für stochastisch stetige Prozesse  $x$  die Räume  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}_x, P)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) separabel sind. Dies resultiert daraus, daß mit  $\mathfrak{A}_{x(t)}, t \in S$ , auch  $\mathfrak{A}(\bigcup_{t \in S} \mathfrak{A}_{x(t)})$  eine separable  $\sigma$ -Algebra ist. Satz 3 ist speziell

auch für  $R$ -stetige und im  $p$ -ten Mittel stetige Prozesse gültig.

b) Die Separabilität der Räume  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}_x, P)$  ist eine funktionalanalytische Motivierung für die Approximationsmethoden der Kapitel 4 und 5. Sie ermöglicht es nämlich, den Prozeß  $x$  durch eine abzählbare Menge von Zufallsvariablen zu approximieren, die sämtlich bzgl.  $\mathfrak{A}_x$  meßbar und folglich durch die Verteilung von  $x$  bestimmt sind. Schließlich sei auf die große Bedeutung der Räume  $L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}_x, P)$  für die nichtlineare Theorie stochastischer Prozesse hingewiesen. Denn ist  $f : R^m \rightarrow R^m$  eine Borel-meßbare

Funktion und eine Abschätzung der Form  $|f(u)|_{R^m} \leq a + b |u|_{R^m}^q, u \in R^m, a, b > 0, 1 \leq p, q < \infty$ , gültig, so resultiert aus  $x \in (I \rightarrow L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}_x, P)) f(x(\cdot)) \in (I \rightarrow L_q^m(\Omega, \mathfrak{A}_x, P))$  (vgl. [3,10]).

Für beliebige  $z \in L_1^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  und Ereignisse  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $P(A) > 0$  nennt man  $E(z|A) := \frac{1}{P(A)} \int_A z(\omega) dP$  den bedingten Erwartungswert von  $z$  bzgl.  $A$ . Ist  $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$  eine weitere  $\sigma$ -Algebra, so

bezeichne  $E^{\mathfrak{A}}z \in L_1^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  die bedingte Erwartung von  $z \in L_1^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  bzgl. der  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ . Die bedingte Erwartung von  $z$  bzgl.  $\mathfrak{A}$  ist durch folgende Relation eindeutig bestimmt:

$$\int_A (E^{\mathfrak{A}}z)(\omega) dP = \int_A z(\omega) dP, \text{ f\u00fcr alle } A \in \mathfrak{A}.$$

Zu Definition und Eigenschaften beider Begriffe verweisen wir auf die eingangs erw\u00e4hnte Literatur sowie auf [11]. Wir beschr\u00e4nken uns hier auf die f\u00fcr den weiteren Aufbau wesentlichen Eigenschaften der bedingten Erwartung.

**Lemma 2** (vgl. [1, 7, 12]):

a)  $E^{\mathfrak{A}}: L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P) \rightarrow L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ist ein linearer, beschr\u00e4nkter, idempotenter Operator mit  $\|E^{\mathfrak{A}}\| = 1$ . F\u00fcr  $p = 2$  ist  $E^{\mathfrak{A}}$  die orthogonale Projektion im Hilbertraum  $L_2^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  auf den Unterraum  $L_2^m(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ .

b) Ist  $\{A_l\}_{l=1, \dots, s}$  eine endliche vollst\u00e4ndige Ereignisdisjunktion \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  und  $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\{A_l\}_{l=1, \dots, s})$ , so gilt  $E^{\mathfrak{A}}z = \sum_{l=1}^s E(z|A_l) \times 1_{A_l}$ , ( $1_A$  bezeichnet die charakteristische Funktion von  $A \in \mathfrak{A}$ ).

c) Ist  $\{\mathfrak{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von  $\sigma$ -Algebren mit  $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}_{n+1} \subseteq \mathfrak{A}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt mit

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_n\right) : z \in L_1^m(\Omega, \mathfrak{A}, P) : \lim_{n \rightarrow \infty} E^{\mathfrak{A}_n}z = E^{\mathfrak{A}}z, \text{ P-f. \u00f6.},$$

$$z \in L_p^m(\Omega, \mathfrak{A}, P) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|E^{\mathfrak{A}_n}z - E^{\mathfrak{A}}z\|_p = 0 \quad (1 \leq p < \infty).$$

#### 4. Approximation stochastischer Prozesse $x \in (I \rightarrow L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P))$

Ziel der Untersuchungen dieses Kapitels ist die Approximation stochastischer Prozesse  $x \in (I \rightarrow L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  durch Prozesse  $x_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , mit einer endlichen Anzahl von Realisierungen,

d. h. durch Prozesse der Gestalt  $x_m(t) = \sum_{l=1}^{s(m)} a_l^{(m)}(t) 1_{A_l^{(m)}}$ ,  $t \in I$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , wobei  $a^{(m)}: I \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ , und  $\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}$  eine vollst\u00e4ndige Ereignisdisjunktion \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  darstellt. Die Bedeutung dieser Gestalt der N\u00e4herungsprozesse  $x_m$  f\u00fcr die nichtlineare Theorie stochastischer Prozesse wird sofort deutlich, weil f\u00fcr jede Funktion  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  gilt:

$$f(x_m(t)) = \sum_{l=1}^{s(m)} f(a_l^{(m)}(t)) 1_{A_l^{(m)}}, \quad t \in I.$$

Die Beschr\u00e4nkung auf stochastische Prozesse mit Zustandsraum  $\mathbb{R}^1$  ist dabei zeitweiliger Natur und wird nur zur Vereinfachung der Darstellung vorgenommen (vgl. Bemerkung 4e)).

Die anschlie\u00dfenden \u00dcberlegungen liefern erste Ergebnisse f\u00fcr die Wahl von  $a_l^{(m)}$ ,  $A_l^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ :

a) Wahl von  $\{a_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}$  bei gegebener Ereignisdisjunktion  $\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}$ : Definiert man  $\mathfrak{A}_m := \mathfrak{A}(\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)})$  und  $H_m := L_2(\Omega, \mathfrak{A}_m, P)$ , so gilt f\u00fcr die Prozesse  $x_m$  der obigen Gestalt offenbar  $x_m \in (I \rightarrow H_m)$ . Es ist nun sicher im Fall  $x \in (I \rightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$

am g\u00fcnstigsten, f\u00fcr jedes  $t \in I$   $x_m(t)$  im quadratischen Mittel optimal zu w\u00e4hlen, d. h.  $\|x(t) - x_m(t)\|_2 = \min_{z \in H_m} \|x(t) - z\|_2$ ,

$t \in I$ .

Auf Grund der Orthoprojektoreigenschaft der bedingten Erwartung im Hilbertraum  $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  resultiert daraus wegen Lemma 2a) und b):

$$x_m(t) = E^{\mathfrak{A}_m}(x(t)) = \sum_{l=1}^{s(m)} E(x(t)|A_l^{(m)}) 1_{A_l^{(m)}}, \quad t \in I, m \in \mathbb{N}.$$

Als geeignete Wahl erweist sich also:

$$a_l^{(m)}(t) = E(x(t)|A_l^{(m)}), \quad t \in I, l = 1, \dots, s(m), m \in \mathbb{N}.$$

b) Bedingungen an die Wahl von  $\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}$ :

Gem\u00e4\u00df Lemma 2c) erscheinen die Bedingungen  $\mathfrak{A}_m \subseteq \mathfrak{A}_{m+1}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{A}_x = \mathfrak{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_m\right)$  g\u00fcnstig f\u00fcr die Konvergenz des

Vorgehens. Denn daraus ergibt sich im Sinn von Lemma 2c):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} E^{\mathfrak{A}_m}(x(t)) = E^{\mathfrak{A}_x}(x(t)) = x(t), \quad t \in I.$$

Stellen wir also die Forderungen an  $A_l^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  zusammen:

- $\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}$  ist vollst\u00e4ndige Ereignisdisjunktion \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,
- $\mathfrak{A}_m \subseteq \mathfrak{A}_{m+1}$ ,  $\mathfrak{A}_m := \mathfrak{A}(\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,
- $\mathfrak{A}_x \subseteq \mathfrak{P}\left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_m\right)$  (als etwas allgemeinere Bedingung als oben).

Nach diesen \u00dcberlegungen verbleibt als offene Frage: F\u00fcr welche Proze\u00dfklassen existieren solche Folgen vollst\u00e4ndiger Ereignisdisjunktionen  $\{\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}_x$  mit den Eigenschaften (i) bis (iii) und wie k\u00f6nnen sie erzeugt werden. Dabei ist die konkrete Erzeugung besonders wichtig f\u00fcr die praktische Anwendung dieser Approximationsmethode, da  $P(A_l^{(m)})$  und  $E(x(t)|A_l^{(m)})$ ,  $t \in I$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ , aus gegebenen Kennwerten von  $x$  berechenbar sein m\u00fcssen. Wir kommen zun\u00e4chst zur Charakterisierung einer geeigneten Proze\u00dfklasse.

**Definition 3:**

a) Ein stochastischer Proze\u00df  $x$  \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  hei\u00dft  $k$ -konstruierbar, falls  $k$  Zufallsvariable  $z_1, \dots, z_k$  \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  derart existieren, da\u00df

$$\mathfrak{A}_x \subseteq \mathfrak{P}\left(\bigcup_{i=1}^k \mathfrak{A}_{z_i}\right).$$

b)  $x$  hei\u00dft separabel konstruierbar, falls abz\u00e4hlar viele reelle Zufallsvariable  $z_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  existieren, so da\u00df  $\mathfrak{A}_x \subseteq \mathfrak{P}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{z_i}\right)$ .

Die f\u00fcr uns wesentliche Eigenschaft in Definition 3 ist, da\u00df  $\mathfrak{A}_x$   $P$ -fast enthalten in  $\sigma$ -Algebren ist, die von endlich oder abz\u00e4hlar vielen Zufallsvariablen erzeugt werden. Dies sichert nach Satz 2 gerade die Separabilit\u00e4t der Banachr\u00e4ume  $L_p(\Omega, \mathfrak{A}_x, P)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) und (vgl. Satz 4) auch die Konvergenz der Approximation.

**Beispiele:**

a)  $I \subseteq \mathbb{R}^1$ ,  $g: I \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^1$  besitze die Eigenschaft, da\u00df f\u00fcr alle  $t \in I$   $g(t, \cdot)$  ( $\mathfrak{B}^k, \mathfrak{B}^1$ )-me\u00dfbar ist;  $z_1, \dots, z_k$  seien reelle Zufallsvariable \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ . Dann gilt f\u00fcr den stochastischen

Proze\u00df  $x(t) := g(t, z_1, \dots, z_k)$ ,  $t \in I$ , da\u00df  $\mathfrak{A}_x \subseteq \mathfrak{P}\left(\bigcup_{i=1}^k \mathfrak{A}_{z_i}\right)$ . In

[19] nennt man  $x$  einen Proze\u00df mit  $k$  Zuf\u00e4lligkeitsgraden.

b) Eine  $k$ -dimensionale Zufallsvariable \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , aufgefa\u00dft als stochastischer Proze\u00df mit Parametermenge  $I = \{1, \dots, k\}$ , ist  $k$ -konstruierbar.

c) In [13], S. 175ff., wird gezeigt, da\u00df der L\u00f6sungsproze\u00df einer gew\u00f6hnlichen Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung mit zuf\u00e4lligen Anfangswerten  $x_0^{(i-1)}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k$ -konstruierbar mit  $z_i = x_0^{(i-1)}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , ist. Dabei wird lediglich vorausgesetzt, da\u00df f\u00fcr eine solche Anfangswertaufgabe Existenz- und Einzigkeitsaussagen erf\u00fcllt sind.

d) Ist  $x: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$  ein stochastisch stetiger Proze\u00df \u00fcber  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  und  $S \subseteq I$  eine in  $I$  dichte, abz\u00e4hlabare Menge, so ist  $x$  separabel konstruierbar mit  $\{x(t)\}_{t \in S}$  (vgl. Satz 3).

e) Ist  $x \in (I \rightarrow L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) ein Bochner-me\u00dfbarer (vgl. [5]) stochastischer Proze\u00df, so existiert ein separabel konstruierbarer Proze\u00df  $\hat{x} \in (I \rightarrow L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  mit  $\hat{x}(t) = x(t)$  f\u00fcr fast alle  $t \in I$ . Zum Beweis dieser Aussage verwenden wir, da\u00df wegen der Bochner-Me\u00dfbarkeit von  $x$  stochastische Prozesse  $x_i \in (I \rightarrow L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , existieren, die jeweils genau endlich viele Werte  $z_1^{(i)}, \dots, z_{s_i}^{(i)} \in L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  annehmen und f\u00fcr die gilt:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x(t)\|_p = 0$  f\u00fcr fast alle  $t \in I$ . Nach Lemma 1

folgt daraus  $\mathfrak{A}_{x(t)} \subseteq_P \mathfrak{A} := \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in nz} \bigcup_{j=1}^{s_i} \mathfrak{A}_{z_i^{(j)}} \right)$  für fast alle  $t \in I$ . Definiert man nun  $\hat{x} \in (I \rightarrow L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  so, daß  $x(t) = \hat{x}(t)$  für fast alle  $t \in I$  und an den Ausnahmestellen  $\hat{x}(t)$  bzgl.  $\mathfrak{A}$  meßbar wird, so gilt  $\mathfrak{A}_{\hat{x}} \subseteq_P \mathfrak{A}$ .

f) Es sei  $I \subset \mathbb{R}^1$  ein kompaktes Intervall,  $x \in C(I, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  und  $m_x$  bzw.  $K_{xx}$  seien die Mittelwerts- bzw. Kovarianzfunktion von  $x$ .

$x(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) z_i$ ,  $t \in I$ , sei die in  $C(I, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  konvergente Karhunen/Loève-Entwicklung des stochastischen Prozesses  $x$  (vgl. [12, 22]), d. h.

-  $z_i := \int_I (x(t) - m_x(t)) c_i(t) dt$ ,  $i \in nz$  (Riemann-Integral im

q. M.-Sinn),

-  $\{c_i\}_{i \in nz} \subset L_2(I, \mathbb{R}^1)$  ist das Orthonormalsystem der Eigenfunktionen (zu den Eigenwerten  $\lambda_i$ ) des Fredholm-Operators, dessen Kern die Kovarianzfunktion darstellt.

Dabei gilt  $E(z_i) = 0$ ,  $E(z_i z_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ ,  $i, j \in nz$ . Nach Definition der  $z_i$  und des Integrals bzw. wegen der Reihenentwicklung folgt aus Lemma 1:

$\mathfrak{A}_{z_i} \subseteq_P \mathfrak{A}_x$ ,  $i \in nz$ , und  $\mathfrak{A}_x \subseteq_P \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in nz} \mathfrak{A}_{z_i} \right)$ , d. h.  $\mathfrak{A}_x =_P \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in nz} \mathfrak{A}_{z_i} \right)$ .

g) In Kapitel 6 wird eine weitere Möglichkeit der Auswahl von  $\{z_i\}_{i \in nz}$  für stochastisch stetige Gaußsche Prozesse beschrieben, die in der Anwendung ein sehr einfaches Approximationsverfahren für solche Prozesse ergibt.

Wir kommen nun zur Konstruktion von Prozessen mit endlich vielen Realisierungen zu einem gegebenen (mit  $\{z_i\}_{i \in nz}$ ) separabel konstruierbaren Prozeß  $x \in (I \rightarrow L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ :

(A)  $\mathfrak{C}_i := \{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1, \dots, n}, n \in nz \subseteq \mathfrak{B}^1$ ,  $i \in nz$ , seien Familien von Intervallen mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle  $i, n \in nz$  ist  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1, \dots, n}$  eine paarweise disjunkte, vollständige Zerlegung von  $\mathbb{R}^1$ , d. h.  $I_{j,i}^{(n)} \cap I_{j',i}^{(n)} = \emptyset$ ,  $j \neq j'$ ,  $\bigcup_{j=1}^n I_{j,i}^{(n)} = \mathbb{R}^1$ ;

(ii)  $\mathfrak{A}(\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1, \dots, n}) \subseteq \mathfrak{A}(\{I_{j,i}^{(m)}\}_{j=1, \dots, m})$  für  $m > n$ , d. h., die Zerlegungen  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1, \dots, n}$  werden mit wachsendem  $n$  immer „feiner“ ( $i \in nz$ );

(iii)  $\mathfrak{A}(\mathfrak{C}_i) = \mathfrak{B}^1$ , für jedes  $i \in nz$ .

(Hierbei bezeichne  $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ ,  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{B}^1$ , wieder die kleinste  $\sigma$ -Algebra in  $\mathfrak{B}^1$ , die  $\mathfrak{M}$  enthält.)

(B) Für alle  $n, k \in nz$  und jedes  $l = 1, \dots, n^k$  definieren wir die

Ereignisse  $A_l^{(n,k)} = \bigcap_{i=1}^k z_i^{-1}(I_{j,i}^{(n)})$ , wobei jedem  $l = 1, \dots, n^k$

eindeutig ein Multiindex  $(l_1, \dots, l_k)$ ,  $l_i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , zugeordnet sei (Bezeichnung:  $l \leftrightarrow (l_1, \dots, l_k)$ ). Eine mögliche solche Zuordnung wird durch die Beziehung

$$l = 1 + \sum_{i=1}^k (l_i - 1) n^{i-1}$$

definiert.

(C) Für alle  $n, k \in nz$  definieren wir folgende Prozesse mit endlich vielen Realisierungen:

$$x_{n,k}(t) := \sum_{l=1}^{n^k} E(x(t) | A_l^{(n,k)}) 1_{A_l^{(n,k)}}, \quad t \in I.$$

Der Einfachheit halber führen wir eine geeignete Numerierung von  $\{(n, k) | n, k \in nz\}$  durch und bezeichnen den neuen Index mit  $m$  (z. B.  $n = m$ ,  $k = k(m)$ ) monoton wachsend mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} k(m) = \infty$ ). Die Ereignisse in (B) bzw. die Prozesse in (C) bezeichnen wir dann mit  $A_l^{(m)}$  bzw.  $x_m$ , und wir definieren  $s(m) := n^k$  und  $\mathfrak{A}_m := \mathfrak{A}(\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)})$ ,  $m \in nz$ .

Auf Grund der Eigenschaften (i) bis (iii) in (A) und nach Konstruktion erfüllen die  $\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}$ ,  $\mathfrak{A}_m$ ,  $m \in nz$  die Forde-

rungen (i) bis (iii) in den einleitenden Betrachtungen dieses Kapitels.

Satz 4:

Vor.:  $x \in (I \rightarrow L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  sei separabel konstruierbar mit  $\{z_i\}_{i \in nz}$ ;  $x_m$ ,  $m \in nz$ , sei gemäß obiger Konstruktionsvorschrift (A) bis (C) definiert.

Beh.: a) Für alle  $t \in I$  gilt:

$\lim_{m \rightarrow \infty} |x_m(t, \omega) - x(t, \omega)| = 0$ , für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ ,

$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m(t) - x(t)\|_p = 0$ , falls  $x(t) \in L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

b) Ist  $I$  meßbar und beschränkt und

$x \in L_q(I, L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  ( $1 \leq q < \infty$ ,  $1 \leq p < \infty$ ),

so

$\lim_{m \rightarrow \infty} \int I \|x_m(t) - x(t)\|_p^q dt = 0$ .

c) Ist  $I$  ein kompaktes Intervall und  $x \in C(I, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ , so gilt

$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in I} \|x_m(t) - x(t)\|_2 = 0$ .

Beweis:

Nach Konstruktion gilt  $\mathfrak{A}_m \subseteq \mathfrak{A}_{m+1}$ ,  $x_m(t) = E^{\mathfrak{A}_m}(x(t))$ ,  $t \in I$ ,  $m \in nz$ , und nach Voraussetzung

$\mathfrak{A}_x \subseteq_P \mathfrak{A} := \mathfrak{A} \left( \bigcup_{m \in nz} \mathfrak{A}_m \right) = \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in nz} \mathfrak{A}_{z_i} \right)$ .

Deshalb folgt Beh. a) aus Lemma 2c) wegen  $E^{\mathfrak{A}_m}(x(t)) = E^{\mathfrak{A}_x}(x(t)) = x(t)$ . Eine Schlußfolgerung aus Lemma 2a) ist, daß

$\|x_m(t)\|_p = \|E^{\mathfrak{A}_m}(x(t))\|_p \leq \|x(t)\|_p$ ,

für alle  $m \in nz$  und alle  $t \in I$  (falls  $x(t) \in L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ). Deshalb gilt für  $x \in L_q(I, L_p(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  nach a)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m(t) - x(t)\|_p = 0$

und  $\|x_m(t)\|_p \leq \|x(t)\|_p$  für alle  $t \in I$ , d. h. Beh. b) resultiert aus dem Lebesgueschen Satz über die Integration von Folgen. Auf Grund der Orthoprojektoreigenschaft der bedingten Erwartung (Lemma 2a)) gilt für  $x \in C(I, L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  und für  $m > n$ :

$$\|x_m(t) - x(t)\|_2 = \min_{z \in L_2(\Omega, \mathfrak{A}_m, P)} \|z - x(t)\|_2 \leq \|x_n(t) - x(t)\|_2,$$

$t \in I$ .

Folglich stellt  $\{\|x_m(\cdot) - x(\cdot)\|_2\}_{m \in nz}$  eine punktweise monoton fallende Nullfolge stetiger Funktionen aus  $C(I, \mathbb{R}^1)$  dar. Die gleichmäßige Konvergenz dieser Folge liefert der Satz von Dini. q. e. d.

Bemerkung 4:

a) In Kapitel 6 gehen wir ausführlich auf die Berechnung der Realisierungen  $E(x(\cdot) | A_l^{(m)})$  der approximierenden Prozesse und ihrer Wahrscheinlichkeiten  $P(A_l^{(m)})$  ( $l = 1, \dots, s(m)$ ) ein.

b) Unter der Voraussetzung  $x \in C(I, L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  bzw.  $x \in L_p(I, L_1(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  gilt für die Realisierungen  $E(x(\cdot) | A_l^{(m)}) \in C(I, \mathbb{R}^1)$  bzw.  $\in L_p(I, \mathbb{R}^1)$  ( $l = 1, \dots, s(m)$ ).

c) Ist der Prozeß  $x \in (I \rightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  sogar Hölder-stetig und sind alle seine Realisierungen gleichmäßig beschränkt, so kann für den Fall  $z_i = x(t_i)$ ,  $\{t_i\}_{i \in nz}$ , eine Abschätzung für den Ausdruck  $\max_{t \in I} \|x_m(t) - x(t)\|_2$  angegeben werden (vgl. [13], Kap.

6.3.3., [15]). Durch diese Fehlerabschätzung erhält man erste Hinweise für die konkrete Wahl der Intervallzerlegungen  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1, \dots, n}$ . Und zwar sollte man diese Zerlegung dort möglichst fein wählen, wo  $z_i$  mit großer Wahrscheinlichkeit Werte annimmt, und kann sie dort gröber wählen, wo diese Wahrscheinlichkeit geringer ist. Als günstiges Kriterium erscheint die Bedingung  $P(z_i^{-1}(I_{j,i}^{(n)})) = \frac{1}{n}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i \in nz$  (vgl. Kap. 6).

d) Für die praktische Realisierung der oben dargelegten Approximation sind die geeignete Wahl von  $\{z_i\}_{i \in nz}$  und  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1, \dots, n}\}_{i \in nz}$  entscheidend. Dies betrifft einerseits günstige numerische Verfahren zur Berechnung der Realisierungen und andererseits Effektivitätsprobleme, da der Aufwand mit  $n^k$  schnell anwächst (vgl. a), c)).

e) Das oben dargelegte Approximationsprinzip läßt sich un-

mittelbar auf vektorielle stochastische Prozesse  $x \in (I \rightarrow L_1^s(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,  $s > 1$ , verallgemeinern. Man fordert dazu analog  $(*) \mathfrak{A}_x \subseteq \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{z_i} \right)$ , wobei die  $z_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , reelle Zufallsvariable über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  darstellen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn jede Komponente des Prozesses  $x$  separabel konstruierbar (vgl. Def. 3) ist. Weitere Verallgemeinerungen sind für Prozesse mit allgemeineren Zustandsräumen  $(X, \mathfrak{B})$  mit separabler  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}$  denkbar, wenn nur die Zerlegungen  $\mathfrak{G}_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , als Teilmengen von  $\mathfrak{B}$  gewählt werden und die  $z_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ -meßbar sind und  $(*)$  erfüllen.

### 5. Kennwertmethoden für stochastische Volterrasche Integralgleichungen

Auf der Grundlage der Ergebnisse des vorigen Kapitels wird nun ein Verfahren zur approximativen Berechnung von  $K$ -Kennwerten der Lösungen von stochastischen Volterraschen Integralgleichungen abgeleitet. Wir betrachten dazu Gleichungen vom Typ

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in [t_0, T], \quad (1)$$

wobei  $x_0$  und  $u$  stochastische Eingangsparameter darstellen. Dabei wird generell für dieses Kapitel folgendes vorausgesetzt:

(V): a)  $f: [t_0, T] \times [t_0, T] \times R^s \times R^r \rightarrow R^s$  sei stetig und erfülle eine Lipschitzbedingung

$$|f(t, s, x, u) - f(t, s, y, v)|_{R^s} \leq L(|x - y|_{R^s} + |u - v|_{R^r})$$

mit geeignetem  $L > 0$  und für alle  $t, s \in [t_0, T]$ ,  $x, y \in R^s$ ,  $u, v \in R^r$ .

b)  $u \in L_1([t_0, T], L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ ,  $x_0 \in L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ .

Ist (V) erfüllt, so kann diese stochastische Volterrasche Integralgleichung (1) (gemäß Bem. 1a)) wie in Kapitel 1 als Gleichung in abstrakten Funktionen aufgefaßt und Satz 1 angewendet werden. Wir setzen ferner voraus, daß reelle Zufallsvariable  $z_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  existieren, so daß

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_{x_0} \cup \mathfrak{A}_u) \subseteq \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{z_i} \right)$$

(vgl. Bem. 4e)). Es sei allerdings vermerkt, daß auf Grund der Beispiele b) und e) zu Def. 3 die Existenz solcher Zufallsvariablen gesichert und lediglich ihre konkrete Wahl von Bedeutung ist. Analog zu Kapitel 4 betrachten wir  $\mathfrak{G}_i := \{I_{j,i}^{(n)}\}_{j=1, \dots, n}, n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , mit den Eigenschaften (i) bis (iii) und die Ereignisse:

$$A_i^{(n,k)} := \bigcap_{l=1}^k z_i^{-1}(I_{l,i}^{(n)}), \quad l = 1, \dots, n^k,$$

$$l \leftrightarrow (l_1, \dots, l_k), \quad l_i \in \{1, \dots, n\}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Nach einer geeigneten Numerierung erhält man wie in Kapitel 4  $\{A_l^{(m)}\}_{l=1, \dots, s(m)}$ ,  $\mathfrak{A}_m := \mathfrak{A}(A_1^{(m)}, \dots, A_{s(m)}^{(m)})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Ferner führen wir folgende Bezeichnungen für die Approximationen der stochastischen Eingangsparameter ein ( $m \in \mathbb{N}$ ):

$$a_l^{(m)}(t) := E(u(t) | A_l^{(m)}), \quad t \in [t_0, T], \quad l = 1, \dots, s(m),$$

$$u_m \in L_1([t_0, T], L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}, P)), \quad u_m(t, \omega) := a_l^{(m)}(t), \quad \text{falls } \omega \in A_l^{(m)},$$

$$c_l^{(m)} := E(x_0 | A_l^{(m)}), \quad l = 1, \dots, s(m),$$

$x_{0,m} \in L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ,  $x_{0,m}(\omega) := c_l^{(m)}$  falls  $\omega \in A_l^{(m)}$ , und betrachten die Gleichungen

$$x_m(t) = x_{0,m} + \int_{t_0}^t f(t, s, x_m(s), u_m(s)) ds, \quad t \in [t_0, T], \quad (1m) \quad m \in \mathbb{N}.$$

Satz 5:

Vor.: Es sei (V) erfüllt und es gelte

$$\mathfrak{A} := \mathfrak{A}(\mathfrak{A}_{x_0} \cap \mathfrak{A}_u) \subseteq \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{z_i} \right);$$

$a_l^{(m)}$ ,  $c_l^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ ,  $u_m$ ,  $x_{0,m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , seien wie oben erklärt.

Beh.: a) Die stochastische Volterrasche Integralgleichung (1) besitzt genau eine Lösung

$$x^* \in C([t_0, T], L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}, P)).$$

b) Für alle  $m \in \mathbb{N}$  besitzt (1m) genau eine Lösung

$$x_m^* \in C([t_0, T], L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}_m, P)),$$

deren Realisierungen  $b_l^{(m)}(\cdot) := x_m^*(\cdot, \omega) \in C([t_0, T], R^s)$ , falls  $\omega \in A_l^{(m)}$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ , einzige Lösungen der gewöhnlichen Volterraschen Integralgleichungen

$$x(t) = c_l^{(m)} + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), a_l^{(m)}(s)) ds, \quad t \in [t_0, T],$$

sind.

c) Folgende Fehlerabschätzung und Konvergenzaussage sind gültig:

$$\|x_m^*(t) - x^*(t)\|_p \leq e^{Lt} \left( \|x_{0,m} - x_0\|_p + \int_{t_0}^t \|u_m(s) - u(s)\|_p ds \right),$$

$$t \in [t_0, T], \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [t_0, T]} \|x_m^*(t) - x^*(t)\|_p = 0.$$

Beweis:

Die eindeutige Existenz der Lösungen von (1) und (1m),  $m \in \mathbb{N}$ , sowie die Abschätzung in Beh. c) resultieren unmittelbar aus Satz 1. Die Konvergenzaussage ist eine Schlußfolgerung aus der

Abschätzung und aus Satz 4 wegen  $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T \|u(s) - u_m(s)\|_p ds$

= 0. Beh. b) ergibt sich aus einer Anwendung der Funktionale

$$\int dP, \quad l = 1, \dots, s(m), \quad \text{auf Gleichung (1m) und aus den Eigen-$$

schaften des Bochner-Integrals (vgl. [5], S. 126). q. e. d. Das folgende Lemma beantwortet nun die Frage nach der approximativen Berechnung von  $K$ -Kennwerten der Lösung  $x^*$  von (1).

Lemma 3:

Vor.:  $F_K: D \times J \rightarrow R^s$ ,  $D \subseteq (I \rightarrow L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}, P))$ , sei determinierter  $K$ -Kennwert, d. h.

$$F_K(x, j) := \int_{\Omega} k(x(\cdot, \omega), j) dP,$$

$$x \in N := \{x \in D | x(\cdot, \omega) \in D_k, \text{ P-f. ü.}\}, \quad j \in J,$$

wobei

$$k: D_k \times J \rightarrow R^s, \quad D_k \subseteq (I \rightarrow R^s).$$

Beh.: a) Hat  $y \in D$  die Gestalt  $y(t, \omega) = d_l(t)$ ,  $t \in I$ ,  $\omega \in A_l$ ,  $d_l \in D_k$ , wobei  $\{A_l\}_l$  eine endliche vollständige Ereignisdisjunktion über  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  darstellt, so gilt:

$$F_K(y, j) = \sum_l k(d_l, j) P(A_l), \quad j \in J.$$

b) Es seien die Vor. von Satz 5 erfüllt, und es gelte speziell  $I = [t_0, T]$ ,

$$D \subseteq C([t_0, T], L_p^s(\Omega, \mathfrak{A}, P)), \quad D_k \subseteq C([t_0, T], R^s).$$

Dann gilt:

$$F_K(x_m^*, j) = \sum_{l=1}^{s(m)} k(b_l^{(m)}, j) P(A_l^{(m)}), \quad j \in J.$$

Ist  $F_K$  stetig in der Lösung  $x^*$  von (1) (bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_{C,0}$ ) so

$$F_K(x^*, j) = \lim_{m \rightarrow \infty} F_K(x_m^*, j), \quad j \in J.$$

Beweis:

$$a) F_K(y, j) = \int_{\Omega} k(y(\cdot, \omega), j) dP = \sum_l \int_{A_l} k(y(\cdot, \omega), j) dP$$

$$= \sum_l \int_{A_l} k(d_l, j) dP = \sum_l k(d_l, j) P(A_l),$$

für alle  $j \in J$ .

Aussage b) ist eine Schlußfolgerung aus a), Satz 5 und Definition 2. q. e. d.

Bemerkung 5:

a) Zusammengefaßt ergibt sich aus den Ergebnissen dieses Kapitels folgendes Verfahren zur approximativen Berechnung

von  $K$ -Kennwerten der Lösung von (1) („Kennwertmethode“):

1. Berechnung von  $c_l^{(m)} = E(x_0 | A_l^{(m)})$ ,  $a_l^{(m)}(\cdot) = E(u(\cdot) | A_l^{(m)})$ ,  $P(A_l^{(m)})$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ , für geeignetes  $m \in \mathbb{N}$  als „Eingabegrößen“;

2. Berechnung der Lösungen  $b_l^{(m)}$  der determinierten Volterra-schen Integralgleichungen

$$x(t) = c_l^{(m)} + \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), a_l^{(m)}(s)) ds, t \in [t_0, T], l = 1, \dots, s(m);$$

3. Berechnung determinierter  $K$ -Kennwerte

$$\sum_{l=1}^{s(m)} k(b_l^{(m)}, j) P(A_l^{(m)}), j \in J,$$

als Näherungen für  $F_K(x^*, j)$ ,  $j \in J$ .

b) In Kapitel 2 wurden große Klassen von statistischen Charakteristiken als determinierte und (lokal) stetige  $K$ -Kennwerte erkannt. Für die Anwendung von Lemma 3 bedeutet dies, daß z. B. Moment- und Verteilungsfunktionen von  $x^*$  mit dem angegebenen Verfahren näherungsweise berechnet werden können.

*Beispiele:*

Autokorrelationsfunktion

$$R_{x^*}(t, s) \sim \sum_{l=1}^{s(m)} b_l^{(m)}(t) b_l^{(m)}(s) P(A_l^{(m)})$$

1-dim. Verteilungsfunktion

$$F_{x^*}(t, a) \sim \sum_{l=1}^I P(A_l^{(m)})$$

$b_l^{(m)}(t) < a$

c) Obiges Verfahren stellt ein universelles Prinzip zur approximativen Lösung des Kennwert-Analyseproblems für eine große Klasse nichtlinearer stochastischer Volterra-scher Integralgleichungen dar. Nach diesem Vorgehen ist eine statistische Charakterisierung der Lösung mit beliebiger Genauigkeit möglich, wenn nur die statistischen Kenngrößen  $E(x_0 | A_l^{(m)})$ ,  $E(u(\cdot) | A_l^{(m)})$ ,  $P(A_l^{(m)})$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ , der stochastischen Eingangsparameter  $x_0$  bzw.  $u$  für genügend großes  $m \in \mathbb{N}$  bekannt sind. (Dabei ist zu beachten, daß die Zufallsvariablen  $z_i$  durch  $x_0$  bzw.  $u$  bestimmt sind, vgl. Beispiele nach Definition 3.)

d) Die Gleichungen (1m) erweisen sich als die zu (1) gehörigen Galerkin-Gleichungen bzgl. der Unterräume

$$C([t_0, T], L_p^2(\Omega, \mathfrak{A}, P)).$$

Darauf wird in [13], Kap. 6.4., ausführlich eingegangen. Dort wird eine Satz 5 entsprechende Aussage als Schlußfolgerung aus allgemeinen Konvergenzaussagen für Projektionsmethoden abgeleitet. Dabei wird gleichzeitig die Stabilität des Verfahrens gegenüber Fehlern bei der Berechnung von  $x_{0,m}$  bzw.  $u_m$  nachgewiesen. Ferner wird in [13] auch auf die Möglichkeit eines Projektions-Iterationsverfahrens hingewiesen.

e) Die Fehlerabschätzung aus Satz 5c) kann gemeinsam mit Abschätzungen für die Konvergenz der Approximation der stochastischen Eingangsparameter (vgl. Bem. 4c) zu a-priori-Abschätzungen des Gesamtverfahrensfehlers genutzt werden.

f) In Bem. 1c) wurde bereits erwähnt, daß für die Konvergenz der Kennwertmethoden die Stetigkeit der Zuordnung  $[x_0, u] \rightarrow x$  als Abbildung von  $L_p^2(\Omega, \mathfrak{A}, P) \times L_1([t_0, T], L_p^2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  in  $C([t_0, T], L_p^2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  ausreichend ist.

g) Betrachtet man (1) nicht als Gleichung in abstrakten Funktionen und untersucht unter geeigneten Voraussetzungen an  $u$  sog.  $R$ -Lösungen (vgl. Bem. 1b))  $x^*$  von (1), so erhält man folgende Konvergenzaussage:  $\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{t \in [t_0, T]} |x_m^*(t, \omega) - x^*(t, \omega)|_{R^s} = 0$ , für fast alle  $\omega \in \Omega$ .

## 6. Numerische Berechnung der Approximation stochastischer Prozesse

Bei der numerischen Realisierung der Kennwertmethoden von Kapitel 5 entsteht zunächst die Frage nach der effektiven Berechnung der Eingabegrößen  $E(x_0 | A_l^{(m)})$ ,  $E(u(\cdot) | A_l^{(m)})$ ,  $P(A_l^{(m)})$ ,  $l = 1, \dots, s(m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . (Auf die numerische Behandlung der determinierten Volterra-schen Integralgleichungen und die Berechnung von  $K$ -Kennwerten soll an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.) Wir beschäftigen uns deshalb in diesem Kapitel mit Methoden zur numerischen Berechnung der Approximationen stochastische Prozesse (vgl. Kapitel 4). Damit ist sowohl die geeignete Auswahl von  $\{z_i\}_i$ ,  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_j$  für spezielle Prozesse bzw. Prozeßklassen als auch die Berechnung von Realisierungen und Wahrscheinlichkeiten bei gegebenen  $\{z_i\}_i$ ,  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_j$  gemeint. Aus diesem Grund schließen sich nun einige allgemeinere Bemerkungen an, und danach demonstrieren wir am Beispiel Gaußscher Prozesse eine mögliche Wahl der  $\{z_i\}_i$ ,  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_j$ . Es zeigt sich, daß als Ergebnis ein effektives Verfahren zur Approximation Gaußscher Prozesse entsteht (Simulation). Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei im folgenden auf Prozesse  $x$  mit Zustandsraum  $R^1$ .

*Bemerkung 6:*

a) Berechnung von Realisierungen  $E(x(\cdot) | A_l^{(n,k)})$  und Wahrscheinlichkeiten  $P(A_l^{(n,k)})$  ( $l = 1, \dots, n^k$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ ) aus geeigneten Verteilungsfunktionen:

Für festes  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $F_z: R^k \rightarrow R^1$  bzw.  $F_{xz}(t, \cdot): R^{k+1} \rightarrow R^1$ ,  $t \in I$ , die Verteilungsfunktion der vektoriellen Zufallsvariablen  $(z_1, \dots, z_k)$  bzw.  $(x(t), z_1, \dots, z_k)$ ,  $t \in I$  ( $x$  sei reeller stochastischer Prozeß mit Parametermenge  $I$ ). Dann ergeben sich nach Definition der Ereignisse  $A_l^{(n,k)}$  und des bedingten Erwartungswertes folgende Beziehungen:

$$P(A_l^{(n,k)}) = \int_{I_{l,1}^{(n)}} \dots \int_{I_{l,k}^{(n)}} dF_z(a_1, \dots, a_k)$$

$$E(x(t) | A_l^{(n,k)}) = \frac{1}{P(A_l^{(n,k)})} \int_{R^1} \dots \int_{I_{l,k}^{(n)}} a_0 dF_{xz}(t, a_0, \dots, a_k)$$

für  $l = 1, \dots, n^k$ ,  $l \leftrightarrow (l_1, \dots, l_k)$ ,  $l_i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $t \in I$ .

Analoge Formeln ergeben sich mit den entsprechenden Verteilungsdichtefunktionen. In [13], Kapitel 6.5., und [14, 15] sind diese Beziehungen für den Fall  $z_i = x(t_i)$ ,  $t_i \in I$ ,  $i = 1, \dots, k$ , abgeleitet worden. Bei der praktischen Realisierung der Kennwertmethoden in [13] wurden für den Fall eines Gaußschen Prozesses  $x$  und für  $z_i = x(t_i)$  die Realisierungen und Wahrscheinlichkeiten auf diese Art und Weise bestimmt (vgl. Kap. 6.5).

b)  $P(A_l^{(n,k)})$ ,  $E(x(\cdot) | A_l^{(n,k)})$ ,  $P(A_l^{(n,k)})$  ( $l = 1, \dots, n^k$ ) stellen in vielen Fällen (z. B. bei  $z_i = x(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ) selbst determinierte  $K$ -Kennwerte des stochastischen Prozesses  $x$  dar. Aus diesem Grund ist es möglich, sie direkt aus Messungen zu gewinnen. Dabei erfordert die praktische Messung dieser statistischen Charakteristiken nicht mehr Aufwand als die Messung vergleichbarer Verteilungsfunktionen (vgl. [13], Kap. 6.5.).

c) Unter weiteren Voraussetzungen an den Prozeß  $x$  und geeignet erfolgter Auswahl der  $\{z_i\}_i$  (z. B. statistisch unabhängig) können Realisierungen und Wahrscheinlichkeiten unter starken Vereinfachungen direkt aus den Definitionsbeziehungen berechnet werden. Wir veranschaulichen dies im folgenden für den Fall Gaußscher Prozesse. Ein solches Vorgehen erscheint aber z. B. auch für Markov-Prozesse und Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen möglich.

Für die Ableitung eines numerischen Verfahrens zur Approximation Gaußscher Prozesse formulieren wir nun die folgende Voraussetzung:

(VG)  $x \in (I \rightarrow L_2(\Omega, \mathfrak{A}, P))$  sei ein stochastisch stetiger Gaußscher Prozeß mit gegebener Mittelwertfunktion  $m_x$  und Kovarianzfunktion  $K_{xx}$ .

Als Vorbemerkung verweisen wir auf die folgende bekannte Aussage (vgl. [25], S. 17):  $w \in L_2^k(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ist genau dann normalverteilt mit  $N(m, K)$ , wenn  $w$  in der Form  $w = Ly + m$  darstellbar ist, wobei  $K = LDL^T$ ,  $L$  eine reguläre  $k \times k$ -Matrix,  $D$  eine Diagonalmatrix und  $y \in L_2^k(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  normalverteilt mit  $N(0, D)$  ist. Ist  $K$  regulär, so kann  $D$  als  $k$ -dimensionale Einheitsmatrix gewählt werden, und  $K = LL^T$  ist die sog. Cholesky-Zerlegung von  $K$ .

Wir kommen nun zur geeigneten Auswahl von  $\{z_i\}_i$  und  $\{I_{j,i}^{(n)}\}_j$ :

- a)  $\{t_i\}_{i \in N'} \subset I$  besitze folgende Eigenschaften:  
 -  $N' = \{1, \dots, k_0\}$  oder  $N' = nz$ ;  $t_i \neq t_j$ ,  $i \neq j$ ;  
 -  $K_x^{(k)} := (K_{xx}(t_i, t_j))_{i,j=1,\dots,k}$  sei regulär für alle  $k \in N'$ ;  
 - für  $N' = nz$  sei  $\{t_i\}_{i \in N'}$  dicht in  $I$ , für  $N' = \{1, \dots, k_0\}$  sei  $k_0$  die maximale Anzahl linear unabhängiger Elemente von  $\{x(t) - m_x(t)\}_{t \in I}$ .

Dann werden folgende Zufallsvariable  $z_i$ ,  $i \in N'$ , definiert:

$$x(t_i) = \sum_{j=1}^i l_{ij} z_j + m_x(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2a)$$

wobei

$$K_{xx}(t_i, t_j) = \sum_{r=1}^i l_{ir} l_{jr}, \quad 1 \leq j \leq i, \quad i = 1, 2, \dots. \quad (2b)$$

Dabei entspricht (2b) gerade der Cholesky-Zerlegung der symmetrischen und positiv definiten Kovarianzmatrizen  $K_x^{(k)}$ ,  $k \in N'$ . Der obigen Vorbemerkung entnimmt man, daß die durch (2a) definierten Zufallsvariablen  $z_i$ ,  $i \in N'$ , jeweils normalverteilt mit  $N(0, 1)$  und paarweise statistisch unabhängig sind.

b) Vereinfachend wählen wir  $I_{j,i}^{(n)} := I_j^{(n)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $i \in N'$ ,  $n \in nz$ , wobei an  $\{\{I_j^{(n)}\}_{j=1,\dots,n}\}_{n \in nz}$  die Bedingungen (i), (ii), (iii) aus Kapitel 4 gestellt werden. (Diese Wahl wird motiviert durch identische statistische Eigenschaften der  $z_i$ ,  $i \in N'$ .)

Gemäß (B) und (C) aus Kapitel 4 werden nun die Ereignisse und Realisierungen der approximierenden Prozesse definiert ( $n, k \in nz$ ):

$$A_l^{(n,k)} := \bigcap_{i=1}^k z_i^{-1}(I_i^{(n)}), \quad l = 1, \dots, n^k, \quad l \leftrightarrow (l_1, \dots, l_k);$$

$$a_l^{(n,k)} := E(x(t) | A_l^{(n,k)}), \quad l = 1, \dots, n^k, \quad t \in I.$$

Auf Grund der o. a. Eigenschaften der  $z_i$ ,  $i \in N'$ , ergibt sich:

$$P(A_l^{(n,k)}) = \prod_{i=1}^k P(z_i^{-1}(I_i^{(n)})) = \prod_{i=1}^k \int_{I_i^{(n)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr, \quad l = 1, \dots, n^k. \quad (2c)$$

Zur Berechnung der Realisierungen betrachten wir zunächst den Fall  $t = t_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Dafür gilt wegen (2a)

$$E(x(t_i) | A_l^{(n,k)}) = \sum_{j=1}^i l_{ij} E(z_j | A_l^{(n,k)}) + m_x(t_i) = \sum_{j=1}^i l_{ij} E(z_j | z_j^{-1}(I_j^{(n)})) + m_x(t_i) \quad (2d)$$

Für  $t \neq t_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , bei beliebig vorgegebenem  $k \in N'$  fügen wir als Hilfsbetrachtung zu den Gleichungen (2a) und (2b) (für  $i = 1, \dots, k$ ) folgende Gleichungen hinzu:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k+1} a_j(t) z_j + m_x(t), \quad \text{wobei } z_{k+1} = z_{k+1}(t),$$

$$K_{xx}(t, t_j) = \sum_{r=1}^j a_r(t) l_{jr}, \quad j = 1, \dots, k,$$

$$K_{xx}(t, t) = \sum_{r=1}^{k+1} a_r^2(t). \quad (2e)$$

Die Formeln (2e) entsprechen der Cholesky-Zerlegung von  $K_x^{(k+1)}$  mit  $t_{k+1} = t$ ;  $(a_1(t), \dots, a_{k+1}(t))$  ist die letzte Zeile der

entstehenden Cholesky-Dreiecksmatrix. Falls  $K_x^{(k+1)}$  mit  $t_{k+1} = t$  singular ist, ergibt sich  $a_{k+1}(t) = 0$ . Nutzt man nun wieder aus, daß  $E(z_{k+1}) = 0$  und  $z_{k+1}$  von  $z_1, \dots, z_k$  statistisch unabhängig ist, so ergibt sich für die Realisierungen:

$$a_l^{(n,k)}(t) = \sum_{j=1}^{k+1} a_j(t) E(z_j | A_l^{(n,k)}) + m_x(t) = \sum_{j=1}^k a_j(t) E(z_j | A_l^{(n,k)}) + m_x(t) + a_{k+1}(t) E(z_{k+1}), \quad \text{d. h.}$$

$$a_l^{(n,k)}(t) = \sum_{j=1}^k a_j(t) E(z_j | z_j^{-1}(I_j^{(n)})) + m_x(t), \quad (2f)$$

$$t \in I, \quad l = 1, \dots, n^k.$$

Vergleicht man (2b) und (2e), so zeigt sich

$$a_r(t_i) = l_{ir}, \quad r = 1, \dots, i, \quad a_r(t_i) = 0, \quad r = i + 1, \dots, k.$$

Folglich ergibt (2f) für  $t = t_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , gerade (2d), und man erhält insgesamt aus (2c) und (2f) folgende Ergebnisse für die Realisierungen der Näherungsprozesse und ihre Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A_l^{(n,k)}) = \prod_{j=1}^k \tilde{c}_j^{(n)},$$

$$a_l^{(n,k)}(t) = m_x(t) + \sum_{j=1}^k a_j(t) \tilde{c}_j^{(n)}, \quad l = 1, \dots, n^k,$$

$$l \leftrightarrow (l_1, \dots, l_k), \quad \text{wobei}$$

$$\tilde{c}_j^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{I_j^{(n)}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr, \quad \bar{c}_j^{(n)} := \frac{1}{\tilde{c}_j^{(n)} \sqrt{2\pi}} \int_{I_j^{(n)}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr,$$

$$j = 1, \dots, n,$$

$$K_{xx}(t, t_j) = \sum_{r=1}^j a_r(t) l_{jr}, \quad j = 1, \dots, k, \quad t \in I,$$

$$K_{xx}(t_i, t_j) = \sum_{r=1}^j l_{ir} l_{jr}, \quad 1 \leq j \leq i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2)$$

Folgerung:

Es sei die Voraussetzung (VG) erfüllt und gemäß obiger Konstruktion sei

$$x_{n,k}(t, \omega) := a_l^{(n,k)}(t), \quad t \in I, \quad \text{falls } \omega \in A_l^{(n,k)},$$

für alle  $n, k \in nz$  definiert (o. B. d. A.  $N' = nz$ ).

Beh.: Für alle  $t \in I$  gilt:

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} \|x_{n,k}(t) - x(t)\|_2 = 0 \quad \text{und}$$

$$\lim_{n,k \rightarrow \infty} x_{n,k}(t, \omega) = x(t, \omega) \quad \text{P-f. ü.}$$

Beweis:

Für die Anwendbarkeit von Satz 4 bleibt nur zu zeigen, daß  $x$  separabel konstruierbar mit  $\{z_i\}_{i \in N'}$  ist. Nach Konstruktion (2a) gilt aber sicherlich, daß  $\mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in N'} \mathfrak{A}_{x(t_i)} \right) = \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in N'} \mathfrak{A}_{z_i} \right)$ . Da  $\{t_i\}_{i \in N'}$  dicht in  $I$  und  $x$  stochastisch stetig ist, liefert Satz 3

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A} \left( \bigcup_{i \in N'} \mathfrak{A}_{z_i} \right). \quad \text{q. e. d.}$$

Bemerkung 7:

a) Ist  $\Phi$  die  $N(0, 1)$ -Verteilungsfunktion und wählt man für festes

$$n \in nz \quad c_j^{(n)} := \Phi^{-1} \left( \frac{j}{n} \right), \quad j = 0, \dots, n, \quad I_1^{(n)} := (c_0^{(n)}, c_1^{(n)}), \quad I_j^{(n)} := [c_{j-1}^{(n)}, c_j^{(n)}], \quad j = 2, \dots, n,$$

so vereinfacht sich (2). Wegen  $\tilde{c}_j^{(n)} := P(z_i^{-1}(I_j^{(n)})) = \frac{1}{n}$  entsteht:

$$P(A_l^{(n,k)}) = \frac{1}{n^k}, \quad a_l^{(n,k)}(t) = m_x(t) + \sum_{j=1}^k a_j(t) \tilde{c}_j^{(n)},$$

$$\tilde{c}_j^{(n)} = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-\frac{1}{2}(c_{j-1}^{(n)})^2} - e^{-\frac{1}{2}(c_j^{(n)})^2} \right). \quad (2')$$

b) Für den vereinfachten Fall (2') erhält man wegen der um Null symmetrischen Lage der  $\tilde{c}_j^{(n)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , für Mittelwert- und Kovarianzfunktion des Prozesses  $x_{n,k} := m_x^{(n,k)}(t) \equiv m_x(t)$ ,

$$K_{xx}^{(n,k)}(t, s) = \sigma_n^2 \sum_{j=1}^k a_j(t) a_j(s), \quad \sigma_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j^{(n)})^2.$$

Die einfache Berechnungsvorschrift für  $K_{xx}^{(n,k)}$  ermöglicht im Vergleich mit  $K_{xx}$  eine a-priori-Auswahl von  $n, k \in nz$ .

c) Betrachtet man als Beispiel den Wiener-Prozeß als q. M-stetigen Gaußschen Prozeß mit  $I := [0, T]$ ,  $m_x(t) \equiv 0$ ,  $K_{xx}(t, s) := \min(t, s)$  und wählt für  $k \in nz$   $t_0 := 0 < t_1 < \dots < t_k = T$ , so läßt sich die Cholesky-Zerlegung von  $K_x^{(k)}$  direkt angeben, und man erhält für die Realisierungen:

$$a_i^{(n,k)}(t) := \sum_{j=1}^i \sqrt{t_j - t_{j-1}} \bar{c}_j^{(n)} + \frac{t - t_i}{\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \bar{c}_{i+1}^{(n)}, t \in [t_i, t_{i+1}],$$

$$i = 0, \dots, k-1.$$

d) Für den Spezialfall Gaußscher Zufallsvektoren  $x \in L_2^k(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  ( $I = \{1, \dots, k\}$ ) liefert (2) bzw. (2)' ein sehr einfaches Simulationsprinzip. Man kann es als determiniertes, kombinatorisches Verfahren auf der Grundlage der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix charakterisieren. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß  $\bar{c}_j^{(n)}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , gerade Realisierungen einer  $N(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen darstellen, deren Varianz  $\sigma_n$  ist (es gilt:  $\sigma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ).

e) Im nachfolgenden Algorithmus wird das einfache Prinzip der Berechnung der Realisierungen noch einmal deutlich:

- Wahl von  $n, k \in nz$  und von  $t_i \in I$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;
- Cholesky-Zerlegung  $K_x^{(k)} = (K_{xx}(t_i, t_j))_{i,j=1, \dots, k} = L_k L_k^T$ ,  $L_k = (l_{ji})$ ;
- $c_j := \Phi^{-1}\left(\frac{j}{n}\right)$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $\Phi N(0, 1)$ -Verteilung;
- $\bar{c}_j := \frac{n}{\sqrt{2\pi}} \left( \exp\left(-\frac{1}{2} c_{j-1}^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2} c_j^2\right) \right)$ ,  $j = 1, \dots, n$ ;
- $a_j(t) := \frac{1}{l_{jj}} \left( K_{xx}(t, t_j) - \sum_{r=1}^{j-1} l_{jr} a_r(t) \right)$ ,  $j = 1, \dots, k$ ,  $t \in I$ ;
- Realisierungen:  $a_l^{(n,k)}(t) = m_x(t) + \sum_{j=1}^k a_j(t) \bar{c}_j^{(n)}$ ,  
 $l = 1, \dots, n^k$ ,  $l \leftrightarrow (l_1, \dots, l_k)$
- Wahrscheinlichkeiten:  $P(A_l^{(n,k)}) = \frac{1}{n^k}$ .

## 7. Bemerkungen zu Ergebnissen, Beispielen, Erfahrungen und Verallgemeinerungen

In der Einleitung bezeichneten wir es als Ziel der vorliegenden Arbeit, ein universelles, konvergentes Verfahren zur approximativen Lösung des Kennwert-Analyseproblems bei nichtlinearen stochastischen Differentialgleichungen vorzustellen. Eine weitere Anforderung an das Verfahren bestand darin, daß es in Spezialfällen in effektive numerische Algorithmen umgesetzt werden kann. Diesen Forderungen genügt das in den Kapiteln 4, 5 und 6 entwickelte Verfahren. Es gleicht vom Typ her den klassischen Simulationsmethoden (vgl. Kap. 1), unterscheidet sich aber von diesen auf Grund seiner universellen Anlage, der Art und Weise der Approximation und des Verzichts auf (Pseudo-) Zufallsgeneratoren. Als wesentlich an diesem Verfahren erscheinen auch die allgemeinen Konvergenzaussagen und das unter Ausnutzung des allgemeinen Ansatzes abgeleitete neuartige Vorgehen zur Simulation Gaußscher Prozesse (vgl. Kap. 6). Die Autoren haben in [13] gemeinsam mit D. Sohr

die Kennwertmethoden praktisch realisiert. Dazu wurde ein in [13], Kap. 8, beschriebenes ALGOL-Programm GINT erarbeitet und an einer Reihe von linearen, „schwach“ nichtlinearen und „stark“ nichtlinearen Differentialgleichungen mit Gaußschem Eingangsprozeß erprobt. Berechnet wurden dabei in der Regel Korrelations- und Verteilungsfunktionen der Lösungen. Die Testläufe erfolgten auf einer BESM-6, und die Ergebnisse wurden in [13] ausführlich ausgewertet. Einschränkend muß zunächst gesagt werden, daß in GINT die Approximation des Gaußschen Eingangsprozesses noch wie in Bemerkung 6a) angedeutet, d. h. relativ uneffektiv, vorgenommen wurde und auch keine Anpassung der Intervallzerlegung an den Eingangsprozeß (vgl. Bem. 4c) erfolgte. Jedoch waren die Ergebnisse durchaus befriedigend. In den Fällen (lineare und „schwach“ nichtlineare Differentialgleichungen), wo die Ergebnisse auch mit anderen Methoden erhalten werden konnten (vgl. Kap. 1), zeigte sich eine gute Übereinstimmung bereits bei einer geringen Zahl verwendeter Eingangsrealisierungen. Allerdings erweisen sich die speziellen Methoden, wie z. B. Korrelations- bzw. Linearisierungsmethoden, in ihrem Anwendungsbereich als effektiver als das dargelegte Verfahren vom Simulationstyp. Der im allgemeinen große Aufwand bei Simulationsmethoden ist bekannt, aber bei nichtlinearen Aufgaben im allgemeinen nicht zu umgehen. Den großen Anwendungsbereich der Kennwertmethoden veranschaulichen die guten Ergebnisse bei der Behandlung einer Transistor-Verstärkerstufe mit Demodulator und Gaußschem Eingangsprozeß, die als nichtlineares Differentialgleichungssystem 3. Ordnung modelliert wurde (vgl. [13, 17]), und bei der Berechnung von Versagenswahrscheinlichkeiten von Bauwerken bei zufälligen Windeinflüssen (vgl. [16]), wobei Differentialgleichung und Kennwert nichtlinear waren. Zur Zeit befinden sich neuere ALGOL-Programme der Autoren, z. B. eine neue Version des Programmes GINT, in der Testphase, die bereits den in Kap. 6 dargelegten Algorithmus zur Simulation Gaußscher Prozesse realisieren. Erste gute Ergebnisse liegen schon für den Fall Gaußscher Zufallsvektoren und des Wiener-Prozesses vor. Die Autoren werden über die numerische Erprobung dieses Algorithmus, über weitere Algorithmen für andere Prozeßklassen und Vergleiche mit Ergebnissen aus der Literatur an anderer Stelle ausführlich berichten. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß aussagekräftige Vergleichsergebnisse, die ebenfalls auf Simulationsbasis erzielt wurden, nur schwer zugänglich sind. Diese Tatsache beeinträchtigte bisher die Einschätzung der Effektivität der vorgestellten Verfahren wesentlich.

Erwähnt sei abschließend, daß das Grundprinzip des Verfahrens auch bei anderen nichtlinearen Aufgaben mit zufälligen Parametern angewendet werden kann. So untersuchten die Autoren Anwendungen auf stochastische Optimalsteuerungsprobleme mit quadratischer Zielfunktion, linearer stochastischer Differentialgleichung und Restriktionen für den Steuerbereich. Auch dieses Verfahren wurde in einem ALGOL-Programm GOST praktisch realisiert und an Beispielen mit gutem Erfolg getestet (vgl. [18]).

Anschrift der Verfasser:

Dr. Werner Römisch, Dr. Reinhard Schutze, Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, Bereich Numerische Mathematik, 1086 Berlin, PSF 1297

## Literatur

- [1] Bauer, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie. Berlin: de Gruyter 1964.
- [2] Bunke, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern. Berlin: Akad.-Verl. 1972.
- [3] Doob, J. L.: Stochastic Processes. New York: Wiley 1953.
- [4] Friedrich, H.: On the Calculation of Nonlinear Stochastically Forced Vibration Systems. VII. Int. Konf. nichtlineare Schwingungen. Berlin 1975. Bd. II, 1. Abh. Akad. Wiss. DDR, Jg. (1977) 5, S. 283–293.
- [5] Gajewski, H.; Gröger, K.; Zacharias, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator differentialgleichungen. Berlin: Akad.-Verl. 1974.
- [6] Gichman, I. I.; Skorochod, A. V.: Theorie stochastischer Prozesse. Bd. 1 (russ.). Moskau: Nauka 1971.
- [7] Gichman, I. I.; Skorochod, A. V.: Stochastische Differentialgleichungen. Berlin: Akad.-Verl. 1971.
- [8] Halmos, P. R.: Measure Theory. Princeton: Van Nostrand 1950.
- [9] Kempe, V.: Analyse stochastischer Systeme. T. 1. Berlin: Akad.-Verl. 1976.
- [10] Krasnoselski, M. A. u. a.: Integraloperatoren in Räumen summierbarer Funktionen (russ.). Moskau: Nauka 1966.
- [11] Lexikon der Stochastik, Berlin: Akad.-Verl. 1975.
- [12] Prochorov, Yu. V.; Rozanov, Yu. A.: Wahrscheinlichkeitstheorie (russ.). Moskau: Nauka 1973.
- [13] Römisch, W.; Schulze, R.; Sohr, D.: Kennwertmethoden für Volterrasche Integralgleichungen in stochastischen Prozessen. Diss., Humboldt-Universität Berlin 1976.
- [14] Römisch, W.; Schulze, R.: Ein Verfahren zur Simulation stochastischer Prozesse. Anwendung auf spezielle Prozessklassen. VIII. IKM Weimar 1978. Berichte Bd. 2. S. 266–272.
- [15] Römisch, W.; Schulze, R.: Ein Verfahren zur numerischen Simulation stochastischer Prozesse, ZIMM der AdW der DDR. Berichte der Tagung Stochastische Schwingungen und Zuverlässigkeit Eisenach 1976. Berlin (1977) 1, S. 25–31.
- [16] Schulze, R.; Römisch, W.: Numerische Methoden für stochastische Differentialgleichungen. Ebenda. S. 32–42.
- [17] Schulze, R.; Römisch, W.: Kennwertmethoden für nichtlineare Volterrasche Integralgleichungen in stetigen stochastischen Prozessen. VII. Int. Konf. nichtlineare Schwingungen Berlin 1975. Bd. I/2; Abh. Akad. Wiss. DDR (1977) 4, S. 245–251.
- [18] Schulze, R.; Römisch, W.: Numerische Methoden für stochastische Differentialgleichungen und stochastische Optimalsteuerungsprobleme. VIII. IKM Weimar 1978. Berichte Bd. 2. S. 259 bis 265.
- [19] Soong, T. T.: Random Differential Equations in Science and Engineering. New York, London: Acad. Pr. 1973.
- [20] Tsokos, C. P.; Padgett, W. J.: Random Integral Equations with Applications to Life Science and Engineering. New York, London: Acad. Pr. 1974.
- [21] Wentzel, A. D.: Kurs der Theorie stochastischer Prozesse (russ.). Moskau: Nauka 1975.
- [22] Wong, E.: Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems. New York (u. a.): McGraw-Hill 1971.
- [23] Zaenen, A. C.: Linear Analysis. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. 1953.
- [24] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I – Fixpunktsätze –. Leipzig: Teubner 1976.
- [25] Ash, R. B.; Gardner, M. F.: Topics in Stochastic Processes. New York, London: Acad. Pr. 1975.

## Zusammenfassung

Werner Römisch und Reinhard Schulze

### Kennwertmethoden für stochastische Volterrasche Integralgleichungen

Im Mittelpunkt stehen numerische Methoden zur Berechnung statistischer Charakteristiken der Lösungen nichtlinearer stochastischer Volterrascher Integralgleichungen. Es wird ein neues Verfahren vorgestellt, das auf einer Approximation stochastischer Prozesse durch Prozesse mit endlich vielen Realisierungen beruht. Im Unterschied zu den klassischen Simulationsmethoden ist das Vorgehen vollständig determiniert. Neben allgemeinen Konvergenzaussagen wird für den Fall Gaußscher Eingangsprozesse ein effektiver Algorithmus hergeleitet.

Вернер Рёмш и Райнхард Шульце

### Вычисление статистических характеристик для стохастических вольтерровских интегральных уравнений

В центре внимания находятся численные методы для подсчета статистических характеристик решений нелинейных стохастических вольтерровских интегральных уравнений. Предлагается новый метод, базирующийся на аппроксимации стохастических процессов процессами с конечным числом реализаций. В отличие от классических методов моделирования этот подход полностью детерминирован. Наряду с общими утверждениями о сходимости для случая входных Гауссовских процессов выводится эффективный алгоритм.

Werner Römisch and Reinhard Schulze

### Calculation of statistical characteristics for Stochastic Volterra Integral Equations

Numerical methods for the calculation of statistical characteristics of the solutions of non-linear stochastic Volterra integral equations are the central point of this paper. A new method is introduced which is based on an approximation of stochastic processes by processes with a finite number of realizations. In contrast to the classical methods of simulation the approach is completely deterministic. Besides general convergence statements, an effective algorithm for Gaussian input processes is derived.

Werner Römisch et Reinhard Schulze

### Méthodes à indices pour les équations intégrales stochastiques de Volterra

L'étude est axée sur des méthodes numériques pour le calcul de caractéristiques statistiques des solutions d'équations intégrales stochastiques non linéaires de Volterra. Les auteurs présentent un procédé nouveau, fondé sur une approximation de processus stochastiques par des processus ayant un nombre fini de réalisations. Contrairement aux méthodes de simulation classiques, ce procédé est entièrement déterminé. Outre des énoncés généraux sur la convergence, les auteurs dérivent un algorithme effectif pour le cas des processus d'entrée de Gauss.