Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE

Aufgabe 1

Nachtwächter Stefan Sorglos beaufsichtigt im Museum für Moderne Kunst den Raum mit den wertvollsten Bildern. Der Raum hat nur gerade Wände, ist aber von einem dieser „modernen“ Architekten entworfen und recht verwinkelt. Stefan Sorglos sitzt nun jeden Abend auf seinem Drehstuhl an einem Punkt des Raumes und beobachtet von dort aus, was rundherum passiert.

Obwohl Stefan in einer der Nächte nicht eine Sekunde unaufmerksam war, fehlten am nächsten Morgen Bilder, und zwar von *jeder* Wand des Raumes eines.

Ihm wurde vorgeworfen, dass er die Diebe gesehen und daher mit ihnen zusammengearbeitet haben musste. Aber Stefan betonte, dass er von seinem Sitzplatz aus die nun fehlenden Bilder gar nicht sehen konnte. Die Untersuchungen der Polizei ergaben, dass Stefans Aussage tatsächlich stimmt.

Zeichnet den Grundriss eines Raumes, bei dem dies möglich ist, und markiert einen möglichen Sitzplatz.

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 2

Anton, Bodo, Claus und ihre Ehefrauen Nora, Olga und Paula machen Einkäufe, wobei jeder einzelne für jeden Gegenstand, den er kauft, so viel Euro bezahlt, wie er Gegenstände kauft. Anton kauft 23 Gegenstände mehr als Nora, Bodo kauft 11 Gegenstände mehr als Olga. Weiterhin gibt jeder Mann genau 63 Euro mehr aus als seine Ehefrau.

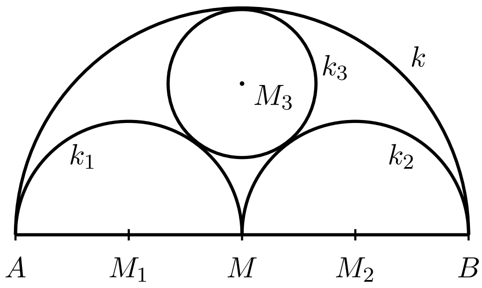
Welches sind die drei Ehepaare?

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 3

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge 1 cm, ihr Mittelpunkt sei mit M bezeichnet. M_1 und M_2 seien die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AM}$ bzw. $\overline{MB}$. Es werden ein Halbkreis k, der den Mittelpunkt M und den Radius $\overline{AM}$ hat, und auf derselben Seite von $\overline{AB}$ zwei weitere Halbkreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und Radius $\dfrac{\overline{AM}}{2}$ gezeichnet. Der Kreis k_3 berühre den Halbkreis k von innen und die Halbkreise k_1 und k_2 von außen.



Ermittelt die Lage des Mittelpunktes M_3 von k_3 und berechnet die Länge des Radius des Kreises k_3.

Platz für die Lösung:

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 4

Das Bild rechts zeigt ein *multiplikativ-magisches* 3×3-*Quadrat*: In jedem der Kästchen steht eine positive natürliche Zahl. Die Produkte der drei Zahlen in jeder Zeile, Spalte oder Diagonale sind gleich, in diesem Fall 64.
Das *magische Produkt* 64 dieses multiplikativ-magischen Quadrats ist eine Quadratzahl, denn $64 = 8^2$. Es ist aber auch eine Kubikzahl, denn $64 = 4^3$.

8	4	2
1	4	16
8	4	2

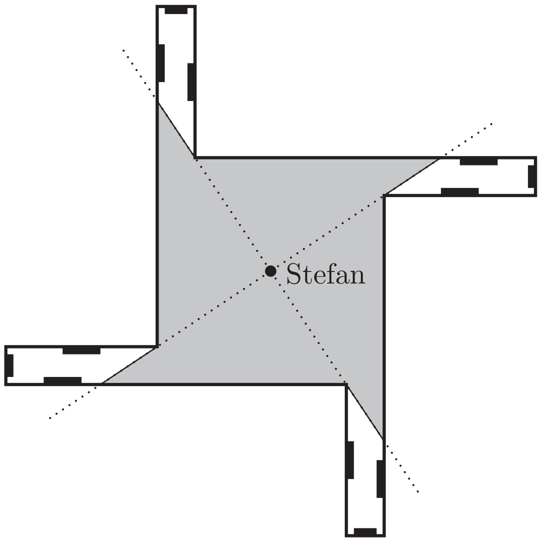
a) Ist das magische Produkt eines beliebigen multiplikativ-magischen 3×3-Quadrats *stets* eine Quadratzahl? Ist es *stets* eine Kubikzahl?

Beweist oder widerlegt eure Vermutungen.

b) Welches ist die *kleinste* natürliche Zahl, die als magische Konstante eines multiplikativ-magischen 3×3-Quadrats vorkommen kann, in dem alle Einträge voneinander *verschiedene* positive natürliche Zahlen sind?

Platz für die Lösung:

Das folgende Bild zeigt einen Raum, der die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, und einen möglichen Sitzplatz für Stefan. Zur Begründung (die bei der Aufgabe allerdings *nicht* gefordert ist) ist der Bereich schraffiert, der von Stefan eingesehen werden kann, und an *jeder* Wand eine mögliche Position für ein Bild angegeben.



Es sind auch Räume ohne rechte Winkel möglich, wenn zum Beispiel die „Ecken“ des Raumes als „lange Spitzen“ nach außen laufen. Auch Räume mit weniger als 12 geraden Wänden sind möglich.

Bewertungsvorschlag .... insgesamt 10 Punkte

Korrekte Zeichnung mit Sitzplatz .... 10 Punkte

(Punktabzug, wenn Sitzplatz nicht angegeben, Wände nicht eindeutig gerade, Wände vorhanden, die vollständig eingesehen werden können, Unsauberkeiten,...)

Betrachten wir ein Ehepaar, der Mann kaufe x Gegenstände, seine Frau y Gegenstände. Dann bezahlt der Mann $x \cdot x = x^2$ Euro, seine Frau $y \cdot y = y^2$ Euro. Aus dem Text ergibt sich dann die Gleichung $x^2 - y^2 = 63$, die äquivalent ist zu $(x+y)(x-y) = 63$. Da x und y natürliche Zahlen sind, müssen $x - y$ und $x + y$ Teiler von 63 sein, deren Produkt 63 ist. Die Teiler von 63 sind $1, 3, 7, 9, 21, 63$. Die obige Gleichung hat nur drei positive Lösungen, die zusammen mit den zugehörigen Werten für x und y in der folgenden Tabelle dargestellt sind:

$x-y$	$x+y$	x	y
1	63	32	31
3	21	12	9
7	9	8	1

Dies sind alle Möglichkeiten für die Anzahl gekaufter Gegenstände. Diejenigen Fälle, in denen $x - y$ größer als $x + y$ ist, brauchen nicht betrachtet zu werden, da dies nur eintreten kann, wenn y negativ ist, was nicht der Fall ist.

Da Anton 23 Gegenstände mehr als Nora gekauft hat, muss er, wie sich ablesen lässt, 32 Gegenstände und Nora 9 Gegenstände gekauft haben. Bodo hat 12 Gegenstände gekauft und Olga einen. Claus muss also 8 Gegenstände gekauft haben und Paula 31.

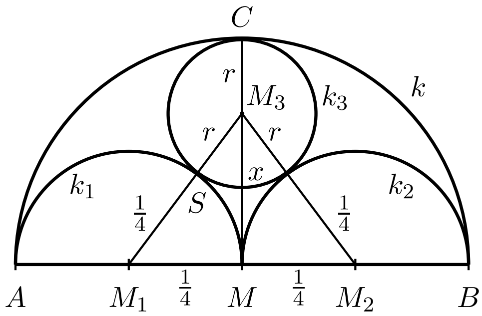
Damit sind die folgenden Personen Ehepaare: Anton und Paula (32 und 31), Bodo und Nora (12 und 9), Claus und Olga (8 und 1).

Bewertungsvorschlag . . . . insgesamt 10 Punkte

Ansatz und Aufstellen der Gleichung . . . . 4 Punkte
Lösen der Gleichung und Formulierung der Antwort . . . . 6 Punkte

(Auch aus anderen Lösungsansätzen muss hervorgehen, dass die gefundenen Ehepaare die einzig möglichen sind, falls dies nicht der Fall ist, −1 Punkt.)

Aus Symmetriegründen liegt M_3 auf der Senkrechten zu $\overline{AB}$ durch M. Wir bezeichnen die Länge der Strecke $\overline{MM_3}$ mit x und den Radius des Kreises k_3 mit r. Da die gemeinsame Tangente im Berührungspunkt S von k_1 und k_2 senkrecht auf $\overline{M_1S}$ und $\overline{M_3S}$ steht, ist der Streckenzug $\overline{M_1SM_3}$ eine Strecke. Die Strecke $\overline{M_1M_3}$ schneidet k_1 und k_3 also in ihrem Berührungspunkt S. Das gilt analog für den anderen Halbkreis und es ergibt sich folgendes Bild:



Das Dreieck M_1MM_3 ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei M, also gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + r\right)^2 \tag{1}$$

Die Strecke $\overline{MC}$ ist ein Radius des großen Habkreises, also folgt $x + r = \dfrac{1}{2}$ bzw. $r = \dfrac{1}{2} - x$. Dies setzen wir in Gleichung (1) ein und erhalten

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - x\right)\right)^2 .$$

Diese Gleichung ist in Wirklichkeit linear, die eindeutige Lösung ist $x = \dfrac{1}{3}$. Der Mittelpunkt M_3 von k_3 liegt also auf der Strecke MC im Abstand $\dfrac{1}{3}$ von M. Der Radius von k_3 ist $r = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.

Bewertungsvorschlag .... insgesamt 10 Punkte

Ansatz und korrekte Zeichnung mit geeigneten Hilfsgrößen .... 2 Punkt
Herleiten der entsprechenden Gleichungen und Lösen .... 6 Punkte
(inklusive Begründung, dass S auf M_1M_3 liegt)
Vollständige Beschreibung der Lage von M_3, Angabe des Radius .... 2 Punkte

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Wir bezeichnen die Einträge eines multiplikativ-magischen 3×3-Quadrats mit a bis i, das magische Produkt mit M. Nach Voraussetzung gilt also $M = abc = def = ghi = adg = beh = cfi = aei = ceg$.

(a) Das magische Produkt eines multiplikativ-magischen Quadrats ist nicht immer eine Quadratzahl. Gegenbeispiele gibt es viele, zum Beispiel das in (c).

Wir beweisen, dass das magische Produkt eines multiplikativ-magischen Quadrats stets eine Kubikzahl ist. Dazu multiplizieren wir die Zahlen in den beiden Diagonalen und der mittleren Spalte und erhalten:

$$M^3 = (aei)(beh)(ceg)$$

Etwas umgeordnet ist das identisch mit dem Produkt der Zahlen der obersten und untersten Zeile und e^3:

$$M^3 = (aei)(beh)(ceg) = (abc)(ghi)e^3 = M^2e^3$$

Da M positiv ist, können wir durch M^2 dividieren und so erhalten $M = e^3$. Also ist M, wie behauptet, stets eine Kubikzahl.

(b) Das kleinste positive magische Produkt ist nach (a) eine Kubikzahl. Die erste Kubikzahl 1^3 kann nur als magisches Produkt auftreten, wenn alle Einträge 1 sind. Betrachten wir die nächsten Kubikzahlen und achten auf ihre Teiler. M muss mindestens 9 verschiedene Teiler besitzen, die als Einträge des multiplikativ-magischen Quadrats mit voneinander verschiedenen natürlichen Zahlen in Frage kommen. Die nächsten Kubikzahlen $2^3, 3^3, 4^3 = 2^6, 5^3$ sind Primzahlpotenzen. Alle Teiler einer Primzahlpotenz p^n sind $1, p, p^2, p^3, \ldots, p^{n-1}$ – also insgesamt n Stück. Die Kubikzahlen $2^3, 3^3, 4^3 = 2^6, 5^3$ kommen also nicht als magisches Produkt in Frage, da sie zu wenige Teiler besitzen. Die nächste Kubikzahl $6^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 216$ hat die Teiler $1, 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 3^2 = 18, 2 \cdot 3^3 = 54, 2^2 \cdot 3 = 12, 2^2 \cdot 3^2 = 36, 2^2 \cdot 3^3 = 108, 2^3 \cdot 3^3 = 216$. Das sind ausreichend viele, wir versuchen ein multiplikativ-magisches Quadrat mit magischem Produkt $M = 6^3 = 216$ zu finden.

Nach (a) steht in der mittleren Zelle die Zahl 6, das Produkt der beiden übrigen Zahlen in der mittleren Zeile, mittleren Spalte und den beiden Diagonalen ist jeweils $6^2 = 36$, wofür es nur folgende 4 Möglichkeiten gibt: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9$. Diese Zahlen müssen nun geschickt eingetragen werden. Man überzeugt sich leicht, dass 36 nicht in einer Ecke stehen kann, nur ein mittleres Feld am Rand kommt dafür in Frage. Die anderen Zahlen können bis auf Spiegelung eindeutig eingetragen werden.

Das rechts abgebildete Quadrat ist das bis auf Spiegelung und Drehung eindeutige multiplikativ-magische Quadrat mit dem kleinsten magischen Produkt 216.

2	36	3
9	6	4
12	1	18

Damit ist gezeigt, dass es ein multiplikativ-magisches Quadrat mit lauter verschiedenen natürlichen Zahlen und magischem Produkt 216 gibt, und dass keine kleinere natürliche Zahl magisches Produkt eines solchen Quadrats sein kann. Die Zahl 216 ist also die gesuchte.

Bewertungsvorschlag . . . . insgesamt 10 Punkte

(a) Gegenbeispiel Quadratzahl . . . . 1 Punkt
Beweis Kubikzahl . . . . 5 Punkte
(b) Angabe eines Beispiels mit magischem Produkt 216 . . . . 1 Punkte
Begründung, dass 216 das kleinstmögliche magische Produkt ist . . . . 3 Punkte