

# Kapitel 8

## Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

Dozentin: Prof. Dr. Helga Baum

Nach Vorlesungen

- im Wintersemester 2001/2002 (1. Teil von Analysis III)
- im Wintersemester 2007/08 (2. Teil von Analysis IIIa)
- im Studienjahr 2012 (Teil von Analysis II\* und III)

Die erste Fassung des Skriptes im WS 2001 wurde von Thomas Leistner ausgearbeitet.  
Ergänzungen und Korrekturen von Helga Baum.

**Letzte Korrekturen: 5. November 2012**

# Inhaltsverzeichnis

<b>8</b>	<b>Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>	<b>1</b>
8.1	Aufgabenstellung und allgemeine Begriffe . . . . .	3
8.2	Elementare Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^1$ . . . . .	7
8.2.1	Trennung der Variablen . . . . .	7
8.2.2	Euler–homogene Differentialgleichungen . . . . .	9
8.2.3	Die DGL der Form $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$ . . . . .	9
8.2.4	Die exakte Differentialgleichung . . . . .	10
8.2.5	Die lineare Differentialgleichung . . . . .	13
8.2.6	Die Bernoullischen Differentialgleichungen . . . . .	15
8.2.7	Die Riccatische Differentialgleichung . . . . .	16
8.3	Allgemeine qualitative Aussagen über Differentialgleichungen . . . . .	18
8.3.1	Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems	18
8.3.1.1	Fixpunktsätze . . . . .	20
8.3.1.2	Kompaktheit von Mengen stetiger Abbildungen (Satz von Arzela/Ascoli) . . . . .	24
8.3.1.3	Der Existenzsatz von Cauchy und Peano . . . . .	27
8.3.1.4	Der Satz von Picard–Lindelöf . . . . .	29
8.3.2	Die Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von den An- fangswerten . . . . .	33
8.3.3	Die Fortsetzbarkeit der Lösung einer Differentialgleichung . . . . .	36
8.4	Lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
8.4.1	Die allgemeine Struktur des Lösungsraumes einer linearen Differenti- algleichung im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
8.4.2	Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten .	44
8.4.3	Die lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung im $\mathbb{R}^1(\mathbb{C}^1)$ . . . . .	60
8.5	Anwendung: Kurventheorie im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	74
8.5.1	Einleitung . . . . .	74
8.5.2	Frenet-Kurven und deren Krümmungen . . . . .	75
8.5.3	Berechnung und geometrische Deutung der Krümmung in Spezialfällen	80
8.5.3.1	Kurven im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	80
8.5.3.2	Kurven im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	82
8.5.3.3	Geometrische Bedeutung von Krümmung und Windung von Raumkurven . . . . .	84
8.6	Wiederholungsfragen zur Prüfungsvorbereitung . . . . .	87
8.7	Weitere Literatur zur Vorlesung . . . . .	88

## 8.1 Aufgabenstellung und allgemeine Begriffe

Wir stellen uns das folgende Problem:

Gegeben sei eine Abbildung  $F : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^{k\text{-mal}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k$  Vektoren  $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}^n$  und eine Zahl  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Wir wollen eine Abbildung der Klasse  $C^k$

$$x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

finden, so dass folgendes gilt:

1. Die  $k$ -te Ableitung von  $x$  erfülle

$$x^{(k)}(t) = F(x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k-1)}(t), t) \quad (8.1)$$

für alle  $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ .

2. An der Stelle  $t_0$  gelte

$$\left. \begin{aligned} x(t_0) &= a_0, \\ x^{(1)}(t_0) &= a_1, \\ &\vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) &= a_{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

(8.1) heißt *gewöhnliche Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung*, (8.2) heißen *Anfangsbedingungen für die Differentialgleichung (8.1)* und (8.1) mit (8.2) heißt *Anfangswertproblem*.

Wir benutzen auch die folgende **Kurzform** für (8.1):

$$x^{(k)} = F(x, x', \dots, x^{(k-1)}, t).$$

Im folgenden schreiben wir auch ‘DGL’ für ‘Differentialgleichung’ und ‘AB’ für ‘Anfangsbedingung’.

Man ist nun interessiert an den folgenden Fragestellungen bezüglich eines Differentialgleichungsproblems:

1. Unter welchen Bedingungen an  $F$  existieren Lösungen?
2. Wann ist eine solche Lösung eindeutig?
3. Welche Eigenschaften haben die Lösungen, z.B. wie hängen sie von den Anfangswerten ab, wie lange existieren Sie (für welche Parameter  $t$ ), gibt es periodische Lösungen ( $x(t) = x(t + T_0)$ ), gibt es stabile Lösungen ( $x(t) = \text{const}$ ). ?
4. Wie findet man Lösungen? Welche Typen von DGL lassen sich exakt lösen, d.h. in Termen elementarer Funktionen ausdrücken, welche numerischen Verfahren zur Lösung von DGL gibt es?

Differentialgleichungen trifft man in vielen Bereichen der Mathematik und in vielen Anwendungen. Wir erinnern hier an ein Beispiel aus der Mechanik:

Die Bewegung eines Punktes im Raum wird beschrieben durch eine Kurve im  $\mathbb{R}^3$

$$x : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto x(t) := \text{Lage des Punktes zum Zeitpunkt } t.$$

$x'(t)$  gibt dann die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  und  $x''(t)$  die Beschleunigung zum Zeitpunkt  $t$  an. Auf den Punkt wirke eine Kraft  $F$ , die vom Ort, der Zeit und der Geschwindigkeit des Punktes abhängt, das heißt  $F = F(x, x', t)$ . Das Newtonsche Bewegungsgesetz der Mechanik hat dann folgende Form

$$m \cdot x''(t) = F(x(t), x'(t), t).$$

Unter der Annahme, dass  $F$ ,  $x(t_0)$  und  $x'(t_0)$  bekannt sind, versucht man, die Bewegungskurve des Punktes zu bestimmen. Dies ist ein Anfangswertproblem der Form

$$x''(t) = \frac{1}{m} F(x(t), x'(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0.$$

Viele weitere Beispiele aus der Mechanik, der Populationsdynamik, bei chemischen Reaktionen, elektrischen Schaltkreisen usw. finden Sie im 1. Kapitel des Buches von H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag Stuttgart, 6. Auflage 2009. Ich empfehle Ihnen sehr, sich dieses Kapitel anzusehen.

Beim Studium von gewöhnlichen Differentialgleichungen kann man sich im Prinzip auf Gleichungen 1. Ordnung beschränken, da man jede Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung in  $n$  Variablen auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung, nun allerdings in  $k \cdot n$  Variablen transformieren kann. Dieses Verfahren sei nun kurz beschrieben:

**Reduktion einer Differentialgleichung  $k$ -ter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung:**

Gegeben sei eine Abbildung  $F : \overbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}^{k\text{-mal}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir betrachten eine neue Abbildung

$$F^* : \mathbb{R}^{n \cdot k} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot k},$$

$$F^* \left( \underbrace{y_0, \dots, y_{k-1}}_{\in \mathbb{R}^{n \cdot k}}, t \right) := (y_1, \dots, y_{k-1}, F(y_0, \dots, y_{k-1}, t)),$$

wobei  $y_j \in \mathbb{R}^n$  für alle  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  sei.

**Satz 8.1** (a) Ist  $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lösung des Anfangswertproblems  $k$ -ter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} x^{(k)}(t) &= F(x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(k-1)}(t), t) \\ x(t_0) &= a_0 \\ x'(t_0) &= a_1 \\ &\vdots \\ x^{(k-1)}(t_0) &= a_{k-1}, \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

so ist  $y : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \cdot k}$

$$y(t) := (x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t))$$

eine Lösung des Anfangswertproblems erster Ordnung

$$\left. \begin{aligned} y'(t) &= F^*(y(t), t) \\ y(t_0) &= (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}). \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

(b) Ist umgekehrt  $y(t) = (y_0(t), \dots, y_{k-1}(t))$  eine Lösung von (8.4), so ist  $y_0(t)$  eine Lösung von (8.3).

**Beweis:** Nach Definition von  $F^*$  ist  $y'(t) = F^*(y(t), t)$  äquivalent zu

$$y'_0(t) = y_1(t), \quad y'_1(t) = y_2(t), \quad \dots, \quad y'_{k-2}(t) = y_{k-1}(t), \quad y'_{k-1}(t) = F(y_0, \dots, y_{k-1}, t).$$

Die Behauptung folgt dann sofort durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} x(t) \text{ löst (8.3)} &\implies y(t) = (x(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \text{ löst (8.4)} \\ y(t) \text{ löst (8.4)} &\implies x(t) = y_0(t) \text{ löst (8.3)}. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung:** Die gleichen Aussagen gelten, wenn  $F$  nur auf einer offenen Menge von  $\mathbb{R}^{n \cdot k} \times \mathbb{R}$  definiert ist.

**Beispiel für eine Reduktion:** Sei  $M$  ein Massenpunkt an einer Feder. Das Koordinatensystem sei so gewählt, dass die Feder auf der  $x$ -Achse liegt und  $M$  sich in der Gleichgewichtslage in  $x = 0$  befindet. Dehnt man die Feder horizontal oder drückt sie zusammen, so wirkt eine Rückstellkraft  $K$ , die die Feder in die Gleichgewichtslage bringen will. Man stellt fest, dass  $K(x)$  proportional zu  $-x$  ist, wobei  $K(x)$  zum Nullpunkt gerichtet ist, das heißt  $K(x) = -k^2x$  für  $k$  konstant und man erhält die Schwingungsgleichung ohne Reibung:

$$m x''(t) = -k^2x. \quad (8.5)$$

Wir haben also folgende Abbildung zu betrachten

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ F(x_1, x_2, t) &= -\frac{k^2}{m}x_1, \end{aligned}$$

das heißt (8.5) entspricht der DGL zweiter Ordnung  $x''(t) = F(x, x', t)$ . Wir führen nun (8.5) auf eine DGL erster Ordnung zurück

$$\begin{aligned} F^* : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ F^*(y_0, y_1, t) &= (y_1, F(y_0, y_1, t)) = (y_1, -\frac{k^2}{m}y_0) \end{aligned}$$

und erhalten  $(y_0'(t), y_1'(t)) = (y_1(t), -\frac{k^2}{m}y_0(t))$ . Das heißt,  $x(t)$  löst genau dann (8.5), wenn  $(y_0(t), y_1(t)) := (x(t), x'(t))$  folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung löst

$$\begin{pmatrix} y_0'(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ -\frac{k^2}{m}y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k^2}{m} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist eine DGL der Form

$$y'(t) = A \cdot y(t),$$

wobei  $A$  eine konstante Matrix ist. Solche DGL'en nennt man DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten. Das Verfahren zur Lösung solcher DGL werden wir in dieser Vorlesung kennenlernen.

### Geometrische Interpretation autonomer Differentialgleichungen

Wir betrachten jetzt einen speziellen Typ von DGL'en.

**Definition 8.1** Eine DGL der Form  $x^{(k)}(t) = F(x(t), \dots, x^{(k-1)}(t))$  heißt autonom (das heißt,  $F$  hängt nicht mehr von  $t$  selbst ab).

Die Lösung einer solchen DGL kann man wie folgt geometrisch interpretieren.

**Definition 8.2** Ein Vektorfeld auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  ist eine stetige Abbildung  $X : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .  $U$  heißt Phasenraum des Vektorfeldes  $X$ .

**Definition 8.3** Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma_{x_0} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  heißt Integralkurve des Vektorfeldes  $X$  durch  $x_0 \in U$ , falls gilt

$$\begin{aligned} X(\gamma_{x_0}(t)) &= \gamma'_{x_0}(t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{und} \\ \gamma_{x_0}(0) &= x_0. \end{aligned}$$

D.h.  $X(\gamma_{x_0}(t))$  ist gleich dem Tangentialvektor der Kurve  $\gamma_{x_0}$  in  $t$ .

Zur Erinnerung: Der Tangentialvektor an eine Kurve  $\gamma$  im Parameter  $t$  ist definiert als

$$\gamma'(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Integralkurven eines Vektorfeldes  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind also Lösungen der autonomen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= X(\gamma(t)) \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \\ \gamma(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Die Lösungen einer autonomen DGL erster Ordnung interpretiert man geometrisch als die Integralkurven eines Vektorfeldes in seinem Phasenraum. Die Integralkurven heißen deshalb auch die Phasenkurven der autonomen DGL.

**Beispiel 1:** Wir betrachten das Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax, \end{aligned}$$

wobei  $a$  konstant sei. Dann sind die Integralkurven von  $X$  Lösungen von  $\gamma'(t) = X(\gamma(t)) = a\gamma(t)$  mit  $\gamma(0) = x_0$ . Wir berechnen nun  $\gamma(t)$ . Es gilt

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = (\ln(|\gamma(t)|))' = a \quad \text{und daher} \quad \ln(|\gamma(t)|) = at + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Somit ist  $|\gamma(t)| = e^{at} \cdot e^c$ , also  $\gamma(t) = e^{at} \cdot \tilde{c}$  und folglich  $\gamma(t) = e^{at} \cdot x_0$  wegen  $\gamma(0) = x_0$ .

**Beispiel 2:** Wir betrachten das Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}^2$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x_1, x_2) &\mapsto (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Die Integralkurven von  $X$  durch  $a_0 \in \mathbb{R}^2$  sind die Kurven

$$\gamma_{a_0}(t) = e^t a_0,$$

denn es ist  $\gamma_{a_0}(0) = a_0$  und  $\gamma'_{a_0}(t) = e^t a_0 = X(\gamma_{a_0}(t))$ .

**Beispiel 3:** Wir betrachten das Vektorfeld  $X$  auf  $\mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (-x_2, x_1) \end{aligned}$$

Die Integralkurven von  $X$  durch  $a_0 = r_0 e^{it_0} \in \mathbb{R}^2$  sind die Kreise

$$\gamma(t) = (r_0 \cos(t + t_0), r_0 \sin(t + t_0)),$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \gamma_{a_0}(0) &= (r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0) = r_0 e^{it_0} \quad \text{und} \\ \gamma'_{a_0}(t) &= (-r_0 \sin(t + t_0), r_0 \cos(t + t_0)) = X(\gamma_{a_0}(t)). \end{aligned}$$

## 8.2 Elementare Integrationsmethoden für Differentialgleichungen erster Ordnung im $\mathbb{R}^1$

In diesem Abschnitt sei  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, und wir betrachten eine DGL im  $\mathbb{R}^1$  der Form  $x'(t) = F(x(t), t)$ .

### 8.2.1 Trennung der Variablen

**Definition 8.4** Eine DGL mit getrennten Variablen (mit Anfangsbedingungen) ist eine DGL im  $\mathbb{R}^1$  folgenden Typs

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= f(t) \cdot g(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

wobei  $f : I_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g : I_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind,  $g|_{I_2} \neq 0$ ,  $(t_0, x_0) \in I_1 \times I_2$  und  $I_1, I_2$  offene Intervalle.

**Satz 8.2** Sei das Anfangswertproblem (8.6) mit getrennten Variablen gegeben und  $G$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g}$  auf  $I_2$ . Dann besitzt (8.6) auf einem hinreichend kleinen Intervall  $J \subset I_1$  um  $t_0$  eine Lösung. Diese ist gegeben durch

$$x(t) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^t f(s) ds\right).$$

**Bemerkung:** Der Definitionsbereich von  $x$  ist durch diejenigen  $t$  gegeben, für die

$$G(x_0) + \int_{t_0}^t f(s) ds \in \text{Im}(G).$$

**Beweis von Satz 8.2:** Wir nehmen an, dass die Differentialgleichung (8.6) eine Lösung  $x$  besitzt. Dann gilt  $x'(t) = f(t) \cdot g(x(t))$ . Da  $x$  stetig ist und  $x(t_0) = x_0 \in I_2$ , existiert ein  $\delta > 0$ , so dass  $x(t) \in I_2$  für alle  $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ . Wir integrieren die Gleichung  $\frac{x'(t)}{g(x(t))} = f(t)$  von  $t_0$  bis  $T$

$$\int_{t_0}^T \frac{x'(t)}{g(x(t))} dt = \int_{t_0}^T f(t) dt.$$

In dieser Gleichung substituieren wir nun  $x = x(t)$  und  $dx = x'(t) dt$  und erhalten

$$\int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^T f(t) dt$$

$$G(x(T)) - G(x_0) \quad \text{für } G \text{ die Stammfunktion von } \frac{1}{g}.$$

Da nun  $\frac{1}{g}$  stetig ist und ohne Nullstellen, erhält man  $\frac{1}{g} > 0$  oder  $\frac{1}{g} < 0$ . D.h. aber, dass  $G$  streng monoton ist und damit injektiv, so dass  $G^{-1} : \text{Im}(G) \rightarrow I_2$  existiert. Damit hat man

$$x(T) = G^{-1}\left(G(x_0) + \int_{t_0}^T f(t) dt\right). \quad (8.7)$$

$x(T)$  ist definiert für diejenigen  $T$ , für die  $G(x_0) + \int_{t_0}^T f(t) dt \in \text{Im}(G)$ . Jede Lösung der Differentialgleichung (8.6) hat also die Form (8.7). Man zeigt leicht, dass die in (8.7) gegebene Funktion  $x$  die Differentialgleichung (8.6) tatsächlich löst.  $\square$

**Formales Vorgehen:** Satz 8.2 rechtfertigt das folgende formale Vorgehen:

Wir setzen in (8.6)  $x'(t) = \frac{dx}{dt}$  und bringen alle  $x$  auf die linke und alle  $t$  auf die rechte Seite. Danach integrieren wir links über  $x$  und rechts über  $t$ :

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \xrightarrow{(8.6)} \frac{dx}{g(x)} = f(t) dt \implies \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{g(x)} = \int_{t_0}^T f(t) dt.$$

Ist  $G$  eine Stammfunktion von  $\frac{1}{g(x)}$ , so folgt

$$G(x(T)) = G(x_0) + \int_{t_0}^T f(t) dt. \quad (8.8)$$

(8.8) nennt man die *implizite* Form der Lösung des Anfangswertproblems. Man löst diese Gleichung dann nach  $x(T)$  auf und erhält die *explizite* Lösung des Anfangswertproblems.

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

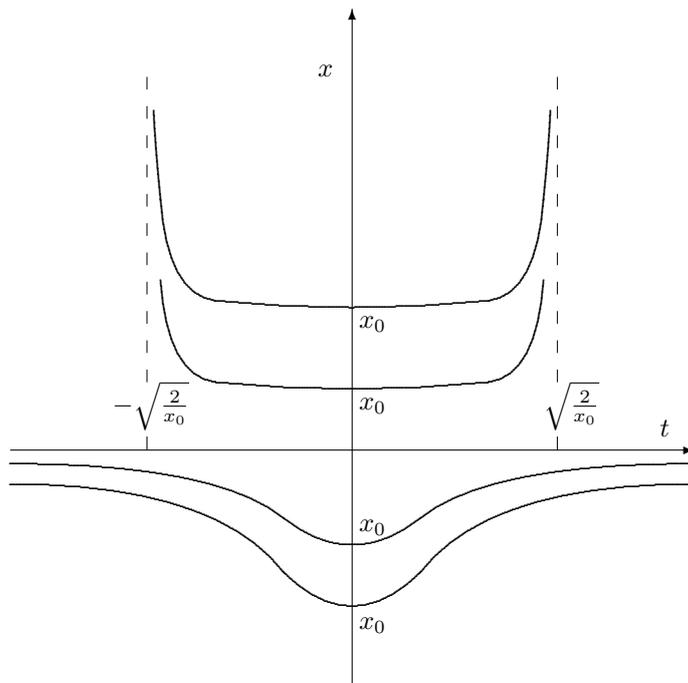
$$x' = tx^2 \quad \text{mit der Anfangsbedingung } x(0) = x_0. \quad (8.9)$$

Ist  $x_0 = 0$ , so ist  $x \equiv 0$  Lösung auf  $\mathbb{R}$ . Sei nun  $x_0 \neq 0$ . Wir nehmen zur Lösung die Trennung der Variablen vor, das heißt  $\frac{dx}{x^2} = t dt$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \int_0^T t dt &= \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^T = \frac{1}{2} T^2 \\ \parallel \\ \int_{x_0}^{x(T)} \frac{dx}{x^2} &= \left[ -\frac{1}{x} \right]_{x_0}^{x(T)} = -\frac{1}{x(T)} + \frac{1}{x_0}. \end{aligned}$$

Also ist  $x(T) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - \frac{T^2}{2}}$  die Lösung des Anfangswertproblems (8.9).

Diese Lösung ist definiert auf  $\mathbb{R}$ , falls  $x_0 < 0$  und auf dem Intervall  $(-\sqrt{\frac{2}{x_0}}, \sqrt{\frac{2}{x_0}})$ , falls  $x_0 > 0$ . Das heißt, obwohl die rechte Seite der DGL  $F(x, t) = tx^2$  auf ganz  $\mathbb{R}^2$  definiert ist, kann man nicht alle Lösungen stetig auf  $\mathbb{R}$  fortsetzen. Ist der Anfangswert  $x_0 > 0$ , so strebt die Lösung schon in endlicher Zeit gegen  $\infty$ . Ist  $x_0 < 0$ , so strebt die Lösung bei  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Gleichgewichtszustand 0.



## 8.2.2 Euler–homogene Differentialgleichungen

**Definition 8.5** Eine (Euler)–homogene DGL ist eine DGL im  $\mathbb{R}^1$  folgenden Typs

$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right), \quad (8.10)$$

wobei  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. Kurzform:  $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$ .

**Lösungsmethode:** Wir benutzen die Substitution  $u(t) = \frac{x(t)}{t}$ . Dann erhalten wir

$$u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t} \left( x'(t) - \frac{x}{t} \right) \stackrel{(8.10)}{=} \text{Substitution } \frac{1}{t} (f(u) - u),$$

das heißt, löst  $x(t)$  die Euler–homogene DGL (8.10), so löst  $u(t) = \frac{x(t)}{t}$  die DGL mit getrennten Variablen

$$u'(t) = \frac{1}{t}(f(u) - u). \quad (8.11)$$

Wir bestimmen also  $u(t)$  mit der Methode der Trennung der Variablen aus (8.11). Dann löst  $x(t) = t \cdot u(t)$  die Euler–homogene DGL (8.10), denn

$$x' = tu' + u \stackrel{(8.11)}{=} f(u) - u + u = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL  $x' = 1 + \frac{x}{t}$  mit der Anfangsbedingung  $x(1) = x_0$ , und wir suchen Lösungen auf  $(0, \infty)$ . Dann gilt

$$u(t) := \frac{x(t)}{t} \implies u' = \frac{x' \cdot t - x}{t^2} = \frac{1}{t^2}(t + x - x) = \frac{1}{t}.$$

Somit ist  $u'(t) := \frac{1}{t}$ ,  $u(1) = x_0$  zu lösen. Die Lösung ist aber offensichtlich gegeben durch  $u(t) = \ln(t) + x_0$ . Folglich erhalten wir als Lösung für  $x' = 1 + \frac{x}{t}$ ,  $x(1) = x_0$ :

$$x(t) = t(\ln(t) + x_0) \quad \forall t \in (0, \infty).$$

## 8.2.3 Die DGL der Form $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$

Zur Lösung dieser DGL betrachten wir verschiedene Fälle:

(1) Sei  $c = \gamma = 0$ . Dann gilt

$$x' = f\left(\frac{at+bx}{\alpha t+\beta x}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{x}{t}}{\alpha+\beta\frac{x}{t}}\right) = h\left(\frac{x}{t}\right).$$

Dies ist eine Euler–homogene DGL und mit der Substitution  $u = \frac{x}{t}$  lösbar.

(2) Sei  $\alpha = \beta = 0$ . Dann gilt

$$x' = f\left(\frac{a}{\gamma}t + \frac{b}{\gamma}x + \frac{c}{\gamma}\right). \quad (8.12)$$

Wir nehmen folgende Substitution vor

$$z(t) = \frac{a}{\gamma}t + \frac{b}{\gamma}x(t) + \frac{c}{\gamma} \implies z' = \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma}x'.$$

(8.12) geht somit über in eine DGL mit getrennten Variablen

$$z' = \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{\gamma}f(z) = h(z).$$

(3) Sei  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  und gelte

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = a\beta - \alpha b = 0,$$

das heißt die Zeilen sind linear abhängig. Somit existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ , so dass  $a = \lambda\alpha$  und  $b = \lambda\beta$ . Als zu lösende DGL erhalten wir

$$x' = f \left( \frac{\lambda(\alpha t + \beta x) + c}{\alpha t + \beta x + \gamma} \right).$$

Substituieren wir durch  $z(t) = \alpha t + \beta x$ , so erhalten wir

$$z' = \alpha + \beta x' = \alpha + \beta f \left( \frac{\lambda z + c}{z + \gamma} \right).$$

Das ist eine DGL mit getrennten Variablen.

(4) Sei nun

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0.$$

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + bx_2 + c &= 0 \\ \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

Nach Voraussetzung existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $(\xi, \eta)$  des Gleichungssystems (8.13). Wir nehmen die Substitution  $s = t - \xi$ ,  $v = x - \eta$  vor. Dann liefert jede Lösung der DGL

$$x' = f \left( \frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma} \right) \quad (8.14)$$

eine transformierte Funktion  $v(s) := x(s + \xi) - \eta$ . Diese Funktion hat folgende Eigenschaft

$$\begin{aligned} v'(s) = x'(s + \xi) &= f \left( \frac{a(s + \xi) + b(x(s + \xi) + \eta) + c}{\alpha(s + \xi) + \beta(x(s + \xi) + \eta) + \gamma} \right) \\ &= f \left( \frac{a(s + \xi) + b(v + \eta) + c}{\alpha(s + \xi) + \beta(v + \eta) + \gamma} \right) \\ &\stackrel{8.13}{=} f \left( \frac{as + bv}{\alpha s + \beta v} \right). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Dies ist eine DGL vom Typ (1). Löst umgekehrt  $v(s)$  (8.15), so löst  $x(t) = v(t - \xi) + \eta$  (8.14).

## 8.2.4 Die exakte Differentialgleichung

**Definition 8.6** Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und zusammenhängend und  $P, Q \in C^1(U, \mathbb{R})$  zwei Abbildungen mit  $Q \neq 0$  auf  $U$ . Es gelte:

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \quad (8.16)$$

Dann heißt die DGL

$$x'(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))} \quad (8.17)$$

exakte Differentialgleichung. (8.16) ist die Integrabilitätsbedingung.

Kurzform:  $x' = -\frac{P(t, x)}{Q(t, x)}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$ .

**Satz 8.3** Sei  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion mit  $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$ . Dann erhält man eine Lösung der exakten DGL (8.17) mit der Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  durch Auflösen der Gleichung

$$\phi(t, x) - \phi(t_0, x_0) = 0$$

nach  $x$ .

**Beweis:** Da  $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0) \neq 0$ , kann man die Gleichung  $\phi(t, x) - \phi(t_0, x_0) = 0$  in einer Umgebung von  $(t_0, x_0)$  eindeutig nach  $x$  auflösen (Satz über implizite Funktionen aus Analysis II). Das heißt, es existiert eine  $C^1$ -Funktion  $x : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x(t_0) = x_0$  und  $\phi(t, x(t)) - \phi(t_0, x_0) = 0$ . Differenzieren nach  $t$  ergibt

$$\underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(t, x(t))}_{=P(t, x(t))} + \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(t, x(t)) \cdot x'(t)}_{=Q(t, x(t))} = 0$$

und wir erhalten  $x'(t) = -\frac{P(t, x(t))}{Q(t, x(t))}$ . Somit erfüllt die Auflösung  $x(t)$  die DGL.  $\square$

Wir fügen einen Kommentar zur Existenz einer Funktion  $\phi$ , wie sie im Satz 8.3 benötigt wird, an.

1. Aus der Forderung  $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$  erhält man notwendigerweise die Integrabilitätsbedingung an die DGL:  $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial P}{\partial x_2}$ .

2. Ist die Menge  $U \subset \mathbb{R}^2$  zusätzlich sternförmig, so ist die Integrabilitätsbedingung  $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$  notwendig und hinreichend für die Existenz einer Abbildung  $\phi \in C^2(U, \mathbb{R})$  mit  $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$ .

Dies sieht der mit Differentialformen und dem Lemma von Poincaré vertraute Leser (siehe Skript über Analysis auf Untermannigfaltigkeiten) folgendermaßen ein:

Wir betrachten die 1-Form  $\omega = P(x_1, x_2) dx_1 + Q(x_1, x_2) dx_2$  auf  $U$ . Für das Differential von  $\omega$  gilt

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial Q}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 = \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2.$$

Die 1-Form  $\omega$  ist also genau dann geschlossen, wenn die Abbildungen  $P$  und  $Q$  die Integrabilitätsbedingung erfüllen. Da  $U$  sternförmig ist, gibt es dann eine (bis auf Konstanten eindeutig bestimmte) Funktion  $\phi$  auf  $U$  mit  $d\phi = \omega$ . Da

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} dx_2,$$

ergibt der Koeffizientenvergleich mit  $\omega$ :  $\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = P$  und  $\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = Q$ .

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

$$x' = -\frac{x+t+1}{x+t} \tag{8.18}$$

mit  $x(t_0) = x_0$  und  $t_0 + x_0 > 0$ . Wir lösen das Anfangswert-Problem auf der sternförmigen Menge  $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 > 0\}$ . Die DGL (8.18) ist exakt, denn es gilt

$$P(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1, \quad Q(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad \text{also} \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x_1}.$$

Es gibt also eine Abbildung  $\phi$  wie im Satz 8.3, die wir nun bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= P(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + 1 \quad \text{und folglich} \\ \phi(x_1, x_2) &= \int (x_1 + x_2 + 1) dx_1 = \frac{x_1^2}{2} + x_1(x_2 + 1) + c_1(x_2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= Q(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad \text{und folglich} \\ \phi(x_1, x_2) &= \int (x_1 + x_2) dx_2 = \frac{x_2^2}{2} + x_1 x_2 + c_2(x_1).\end{aligned}$$

Durch Vergleich beider Formeln ergibt sich

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1 x_2 + x_1 + \text{const} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + x_1 + \text{const}.$$

Wir haben damit die bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte Funktion  $\phi$  gefunden.

Nun müssen wir die Gleichung  $\phi(t, x) - \phi(t_0, x_0) = 0$ , also

$$\frac{1}{2}(t+x)^2 + t - \frac{1}{2}(t_0+x_0)^2 - t_0 = 0$$

nach  $x$  auflösen. Wir erhalten  $(t+x)^2 = 2(t-t_0) + (t_0+x_0)^2$  und somit

$$x(t) = \sqrt{(t_0+x_0)^2 + 2(t-t_0)} - t,$$

da  $x+t > 0$ .  $x(t)$  ist Lösung der gegebenen DGL und der Definitionsbereich von  $x$  ist

$$\{t \in \mathbb{R} \mid t_0 + \frac{(t_0+x_0)^2}{2} \geq t\}.$$

**Verallgemeinerung:** Ist die Integrabilitätsbedingung  $\frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{\partial Q}{\partial x_1}$  für die DGL  $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$  nicht erfüllt, so kann die Exaktheit evtl. durch die Multiplikation mit einer Funktion  $\lambda \in C^1(U)$  erreicht werden.

**Definition 8.7** Eine Funktion  $\lambda \in C^1(U)$ ,  $\lambda \neq 0$  heißt integrierender Faktor (oder Eulerscher Multiplikator) der DGL  $x' = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}$ , falls

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial x_2} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x_1}.$$

Existiert ein solcher integrierender Faktor  $\lambda$ , so kann man die exakte DGL  $x' = -\frac{\lambda P(t,x)}{\lambda Q(t,x)}$  wie oben beschrieben lösen.

**Beispiel:** Sei  $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1, x_2 > 0\}$ . Wir betrachten die DGL

$$x' = -\frac{5t^4 + 2x^3}{3tx^2}. \quad (8.19)$$

Hier ist  $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 6x_2^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x_1} = 3x_2^2$ , das heißt (8.19) ist nicht exakt. Aber die Funktion  $\lambda(x_1, x_2) = x_1$  ist ein integrierender Faktor für die DGL (8.19). Somit können wir die exakte DGL  $x' = -\frac{5t^5 + 2tx^3}{3t^2x^2}$  nach Satz 8.3 lösen.

## 8.2.5 Die lineare Differentialgleichung

**Definition 8.8** Eine lineare DGL ist eine DGL der Form

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t), \quad (8.20)$$

wobei  $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen auf einem zusammenhängenden offenen Intervall  $I$  sind. Ist  $q(t) \equiv 0$  so heißt  $x'(t) = p(t)x(t)$  homogene, lineare DGL.  $x' = p(t)x + q(t)$  heißt inhomogene, lineare DGL, falls  $q \neq 0$ .

Kurzform:  $x' = p(t)x + q(t)$ .

**Satz 8.4** Die Lösungen der homogenen, linearen DGL  $x' = p(t)x$  sind die Funktionen

$$x(t) = c \cdot e^{\int p(t) dt},$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  konstant ist. Das Anfangswertproblem  $x' = p(t)x$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $t_0 \in I$ , hat genau eine Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ , nämlich

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

**Beweis:** Wir bestimmen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $x' = p(t)x$ . Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen. Wir lösen die DGL zunächst auf Intervallen  $J \subset I$  mit  $x(t) \neq 0$  für alle  $t \in J$ . Auf  $J$  gilt dann  $\frac{x'(t)}{x(t)} = p(t)$  und mit der Methode der Trennung der Variablen folgt

$$\ln(|x|) + C = \int \frac{dx}{x} = \int p(t) dt,$$

also ist  $x(t) = c \cdot e^{\int p(t) dt}$ , mit  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , die allgemeine Lösung der DGL auf Intervallen  $J \subset I$ , auf denen  $x$  keine Nullstelle hat. Offensichtlich sind diese Lösungen auf ganz  $I$  definiert und besitzen dort keine Nullstelle. Deshalb ist die einzige Lösung, die eine Nullstelle besitzen kann die konstante Funktion  $x(t) = 0$  für alle  $t \in I$ . Folglich ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$x(t) = c e^{\int p(t) dt},$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige reelle Konstante ist.

Ist nun zusätzlich eine Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  gegeben. Dann bestimmt man damit die Konstante  $c$ .

Sei  $P$  die Stammfunktion von  $p$ , d.h.  $P(t) = \int p(t) dt$ . Dann gilt  $x(t_0) = c e^{P(t_0)} = x_0$ , d.h.  $c = x_0 \cdot e^{-P(t_0)}$ . Daraus folgt für die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-P(t_0)} e^{P(t)} = x_0 \cdot e^{P(t) - P(t_0)} = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t p(s) ds}.$$

□

**Satz 8.5** Sei  $x_s : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL

$$x' = p(t)x + q(t), \quad q \neq 0.$$

Dann erhält man alle Lösungen der inhomogenen DGL durch  $x = x_s + x_c$ , wobei

$$x_c(t) = c \cdot e^{\int p(t) dt}$$

mit  $c \in \mathbb{R}$  die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x' = p(t)x$  ist.

**Beweis:** Seien  $x_s$  und  $x$  Lösungen der inhomogenen, linearen DGL. Dann löst  $x - x_s$  die homogene, lineare DGL  $x' = p(t)x$ . Somit existiert nach Satz 8.4 ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $x - x_s = x_c$ .  $\square$

Aus diesem Satz ergibt sich die Aufgabe, eine spezielle Lösung  $x_s$  der inhomogenen, linearen DGL zu finden. Dafür gibt es 2 Methoden:

### 1. Methode: Variation der Konstanten

Wir betrachten die Lösung der homogenen, linearen DGL  $x' = p(t)x$ :

$$x(t) = c \cdot e^{\int p(t) dt}.$$

Wir machen den *Ansatz*:  $x_s(t) := c(t)e^{\int p(t) dt}$  und bestimmen die jetzt von  $t$  abhängende Funktion  $c(t)$  so, dass  $x_s$  die inhomogene, lineare DGL  $x' = p(t)x + q(t)$  löst. Dies ergibt die folgende Bedingung an  $c(t)$ :

$$\begin{aligned} p(t)x_s + q(t) &= x'_s = c'(t) \cdot e^{\int p(t) dt} + c(t) \cdot p(t) \cdot e^{\int p(t) dt} \\ &= c'(t) \cdot e^{\int p(t) dt} + p(t) \cdot x_s(t). \end{aligned}$$

Folglich ist  $c'(t) = q(t) \cdot e^{-\int p(t) dt}$  und somit

$$c(t) = \int q(t) \cdot e^{-\int p(t) dt} dt.$$

Mit diesem  $c(t)$  ist

$$x_s(t) = c(t) \cdot e^{\int p(t) dt}$$

eine Lösung der inhomogenen, linearen DGL  $x' = p(t)x + q(t)$  (einsetzen und ableiten).

### 2. Methode: Spezielle Ansätze für $x_s$ bei konstantem $p(t) = \alpha$

- (1) Ist die Störfunktion  $q(t)$  ein Polynom  $h(t)$  vom Grad  $m$  mit reellen Koeffizienten, so setze für  $x_s(t)$  ein Polynom  $Q$  vom Grad  $m$  an ( $\alpha \neq 0$ ).
- (2) Ist  $q(t)$  von der Form  $h(t) \cdot e^{at}$ ,  $h \in \mathbb{R}[t]$ , so setze für  $x_s(t)$  die Funktion  $Q(t) \cdot e^{at}$  ( $\alpha \neq a$ ) bzw.  $t \cdot Q(t) \cdot e^{at}$  ( $\alpha = a$ ) an.
- (3) Ist  $q(t)$  von der Form  $h(t) \cdot \cos(bt)$  oder  $h(t) \cdot \sin(bt)$ ,  $h \in \mathbb{R}[t]$ ,  $b \neq 0$ , so setze für  $x_s(t)$  die Funktion  $Q_1(t) \cdot \cos(bt) + Q_2(t) \cdot \sin(bt)$  an.
- (4) Ist  $q(t)$  von der Form  $h(t) \cdot \cos(bt) \cdot e^{at}$  oder  $h(t) \cdot \sin(bt) \cdot e^{at}$ ,  $h \in \mathbb{R}[t]$ ,  $b \neq 0$ , so setze für  $x_s(t)$  die Funktion  $Q_1(t)e^{at} \cdot \cos(bt) + Q_2(t)e^{at} \cdot \sin(bt)$  an.

Dann setzt man den Ansatz in die inhomogene, lineare DGL ein und berechnet die Koeffizienten des Polynoms  $Q(t)$  durch Koeffizientenvergleich.

**Beispiel:** Wir betrachten die inhomogene, lineare DGL und das Anfangswertproblem

$$\left. \begin{aligned} x' &= tx + te^{t^2} \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL  $x' = tx$  ist

$$x(t) = c \cdot e^{\int t dt} = c \cdot e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

Wir bestimmen nun eine spezielle Lösung der inhomogenen, linearen DGL  $x' = tx + te^{t^2}$  durch Variation der Konstanten. Sei  $x_s(t)$  eine solche spezielle Lösung, mit dem Ansatz  $x_s(t) = c(t)e^{\frac{1}{2}t^2}$ . Dann gilt

$$x'_s(t) = c'e^{\frac{t^2}{2}} + cte^{\frac{t^2}{2}} = tx_s + te^{t^2} = tce^{\frac{t^2}{2}} + te^{t^2}.$$

Folglich ist  $c' = te^{t^2 - \frac{t^2}{2}} = te^{\frac{t^2}{2}} = (e^{\frac{t^2}{2}})'$  und somit ist  $c(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$  eine Lösung für  $c(t)$  und  $x_s(t) = e^{t^2}$  eine spezielle Lösung der inhomogenen, linearen DGL. Damit ist  $x(t) = e^{t^2} + c \cdot e^{\frac{t^2}{2}}$  allgemeine Lösung der inhomogenen DGL. Wir bestimmen nun noch die Konstante  $c$  aus der Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$ . Es gilt  $x_0 = 1 + c$ , das heißt  $c = x_0 - 1$ . Somit ist

$$x(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \left( e^{\frac{t^2}{2}} + x_0 - 1 \right)$$

die einzige Lösung des Anfangswertproblems (8.21).

## 8.2.6 Die Bernoullischen Differentialgleichungen

**Definition 8.9** Eine Bernoullische DGL ist eine DGL des folgenden Types

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x(t)^\alpha, \quad (8.22)$$

wobei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (\{0\} \cup \{1\})$  und  $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen sind.

Kurzform:  $x' = p(t)x + q(t)x^\alpha$ .

Für  $\alpha = 1$  erhält man eine homogene, lineare und für  $\alpha = 0$  eine inhomogene, lineare DGL. Eine Bernoullische DGL wird durch die Substitution  $u(t) := x(t)^{1-\alpha}$  behandelt. Man erhält

$$\begin{aligned} u' &= (1-\alpha)x' \cdot x^{-\alpha} \\ &= (1-\alpha)x^{-\alpha}(p(t)x + q(t)x^\alpha) \\ &= (1-\alpha)q(t) + (1-\alpha)p(t)u. \end{aligned}$$

Für  $u(t)$  erhält man also eine lineare DGL

$$u' = (1-\alpha)p(t)u + (1-\alpha)q(t).$$

Diese wird gelöst. Dann erhält man  $x(t) = u(t)^{\frac{1}{1-\alpha}}$  als Lösung der Bernoullischen DGL.

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

$$x' = -x + t\sqrt{x}, \quad \text{d.h. } \alpha = \frac{1}{2}. \quad (8.23)$$

Wir setzen  $u(t) := x(t)^{\frac{1}{2}}$  und erhalten

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}x' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(-x + t\sqrt{x}) = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}t \\ &= -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Für die homogene, lineare DGL  $u' = -\frac{1}{2}u$  erhält man nach Trennung der Variablen  $\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}dt$  und somit als allgemeine Lösung  $u(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ .

Um nun eine spezielle Lösung  $u_s$  der inhomogenen, linearen DGL (8.24)  $u' = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}t$  zu finden, machen wir den folgenden Ansatz mit einem Polynom ersten Grades als Lösung:  $u_s = at + b$ . Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} a &= u'_s = -\frac{1}{2}u_s + \frac{1}{2}t \\ &= -\frac{1}{2}(at + b) + \frac{1}{2}t. \end{aligned}$$

Dies hat zur Folge, dass  $\frac{1}{2}(1-a)t = 0$  für alle  $t$  und  $a = -\frac{1}{2}b$  gilt und somit gelten muß, dass  $a = 1$  und  $b = -2$  ist. Damit haben wir mit  $u_s(t) = t - 2$  eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (8.24) gefunden. Somit ist  $u(t) = t - 2 + c e^{-\frac{1}{2}t}$  eine allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen DGL (8.23), und wir erhalten

$$x(t) = \left(t - 2 + c e^{-\frac{1}{2}t}\right)^2$$

als allgemeine Lösung von (8.23).

## 8.2.7 Die Riccatische Differentialgleichung

**Definition 8.10** Eine Riccatische DGL ist eine DGL der Form

$$x' = f_0(t) x(t)^2 + f_1(t) x(t) + f_2(t), \quad (8.25)$$

wobei  $f_0, f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sind.

Für  $f_2 \equiv 0$  handelt es sich dabei um eine Bernoullische DGL mit  $\alpha = 2$ .

Die allgemeine Riccatische DGL (8.25) ist in der Regel nicht geschlossen lösbar. Es gilt aber die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 8.6** Ist  $x_s(t)$  eine spezielle Lösung der Riccatischen DGL (8.25), so sind alle Lösungen von (8.25) gegeben durch

$$x(t) = x_s(t) + u(t), \quad (8.26)$$

wobei  $u(t)$  eine beliebige Lösung der Bernoullischen DGL

$$u' = [2 f_0(t) x_s(t) + f_1(t)] u(t) + f_0(t) u(t)^2. \quad (8.27)$$

ist.

**Beweis:** Zunächst gilt für  $u = x - x_s$  die folgende Gleichung

$$x^2 - x_s^2 = (x + x_s)(x - x_s) = (u + 2 x_s) u. \quad (8.28)$$

Man zeigt nun beide Richtungen.

a) Hier zeigt man, dass, wenn  $x$  und  $x_s$  Lösungen von (8.25) sind,  $u := x - x_s$  eine Lösung von (8.27) ist. Es gilt

$$\begin{aligned} u' &= x' - x_s' \\ &= f_0 x^2 + f_1 x - f_0 x_s^2 - f_1 x_s \\ &= f_0 (x^2 - x_s^2) + f_1 u \\ &\stackrel{(8.28)}{=} f_0 u^2 + (2 f_0 x_s + f_1) u, \end{aligned}$$

d.h. (8.27) gilt.

b) Hier zeigt man, dass, wenn  $u$  eine Lösung von (8.27) ist,  $x := x_s + u$  eine Lösung von (8.25) ist. Man hat

$$\begin{aligned} x' &= x_s' + u' \\ &= f_0 x_s^2 + f_1 x_s + f_2 + (2 f_0 x_s + f_1) u + f_0 u^2 \\ &= f_0 x_s^2 + f_1 x_s + f_2 + 2 f_0 x_s u - 2 f_0 x_s u + f_1 u + f_0 u^2 + f_0 x_s u - 2 x_s u f_0 \\ &= f_0 x^2 + f_1 x + f_2, \end{aligned}$$

und somit erfüllt  $x = x_s + u$  die DGL (8.25). □

Dieser Satz liefert eine Methode zur Lösung einer Riccatischen DGL:

- Finde (durch Probieren oder Raten) eine spezielle Lösung von (8.25).
- Löse (8.27) mit der Methode für eine Bernoullische DGL.

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

$$x' = (1-t)x^2 + (2t-1)x - t \quad (8.29)$$

Zunächst errät man die spezielle Lösung  $x_s \equiv 1$ . Um die allgemeine Lösung dieser DGL zu erhalten, hat man die Bernoullische DGL

$$u' = (2(1-t) + (2t-1))u + (1-t)u^2 = u + (1-t)u^2 \quad (8.30)$$

zu lösen. Das ist eine Bernoullische DGL mit  $p(t) \equiv 1$ ,  $q(t) = 1-t$  und  $\alpha = 2$  in Formel (8.22). Dazu betrachtet man die Transformation  $z(t) = \frac{1}{u}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} z' &= -\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u^2} (u + (1-t)u^2) \\ &= -z + (t-1). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Dies ist eine inhomogene, lineare DGL. Die Lösung der entsprechenden linearen DGL  $z' = z$  ist  $z(t) = c e^{-t}$ .

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL zu finden, machen wir den polynomialen Ansatz  $z_s(t) = at + b$ . Damit erhält man wie im Beispiel aus dem vorigen Abschnitt  $a = 1$  und  $b = -2$ , d.h.  $z_s(t) = t - 2$ . Somit erhält man als

$$\begin{aligned} \text{Lösung von (8.31)} &: z(t) = t - 2 + c e^{-t}, \\ \text{Lösung von (8.30)} &: u(t) = \frac{1}{t-2+c e^{-t}} \\ \text{und damit als Lösung von (8.29)} &: x(t) = x_s + u = 1 + \frac{1}{t-2+c e^{-t}}. \end{aligned}$$

## 8.3 Allgemeine qualitative Aussagen über Differentialgleichungen

### 8.3.1 Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems

Wir betrachten eine Differentialgleichung erster Ordnung im  $\mathbb{R}^n$  mit Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned}x' &= F(x, t), \\x(t_0) &= x_0.\end{aligned}\tag{8.32}$$

Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen an  $F$  dieses Anfangswertproblem eine Lösung besitzt, bzw. unter welchen Bedingungen an  $F$  es eine eindeutig bestimmte (maximale) Lösung  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gibt. Wir betrachten zunächst zwei Beispiele.

#### Beispiele:

1. Im vorigen Abschnitt hatten wir gesehen, dass für das AWP einer linearen DGL

$$\begin{aligned}x' &= p(t)x + q(t) \quad \text{mit } p, q : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

genau eine Lösung  $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert.

2. Das AWP  $x' = 2\sqrt{|x|}$  mit  $x(0) = 0$  hat unendlich viele auf  $\mathbb{R}$  definierte Lösungen, und zwar die folgenden:

$$x_a(t) = \begin{cases} (t-a)^2 & : t \geq a, \\ 0 & : t < a, \end{cases} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}^+.$$

Dies ist klar, denn es ist

$$\sqrt{|x_a(t)|} = \begin{cases} (t-a) & : t \geq a, \\ 0 & : t < a, \end{cases}$$

und somit  $x'_a = 2\sqrt{|x_a|}$ .

Außerdem ist  $x_a(0) = 0$ .  $x_a$  ist eine  $C^1$ -Funktion, denn es ist

$$x'_a(t) = \begin{cases} 2(t-a) & : t \geq a, \\ 0 & : t < a. \end{cases}$$

Somit ist  $x'_a$  in  $t = a$  und damit überall stetig.

In diesem Abschnitt wollen die folgenden Aussagen beweisen:

1. Ist  $F$  stetig, so existiert immer mindestens eine Lösung (Satz von Cauchy-Peano).
2. Ist  $F$  Lipschitzstetig, so existiert genau eine Lösung (Satz von Picard-Lindelöf).

Den Beweis dieser Sätze kann man auf das Studium von Fixpunktproblemen auf Räumen stetiger Abbildungen zurückführen. Dies werden wir in dem nächsten Satz erläutern.

**Satz 8.7** Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$  und  $(x_0, t_0) \in U$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Es existiert eine  $C^1$ -Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die das Anfangswertproblem

$$x' = F(x, t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \quad (8.33)$$

löst.

2. Es existiert eine stetige Funktion  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die folgende Integralgleichung löst

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds. \quad (8.34)$$

**Beweis :**

( $\implies$ ) Sei  $x'(s) = F(x(s), s)$ . Beide Seiten sind stetig, d.h. es existiert das Riemann-Integral

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t x'(s) ds &= \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds \\ &\parallel \\ x(t) - x(t_0) &= x(t) - x_0. \end{aligned}$$

( $\impliedby$ ) Da  $F$  und  $x$  stetig sind, ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Abbildung

$$\begin{aligned} G : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds \end{aligned}$$

stetig differenzierbar mit  $G'(t) = F(x(t), t)$ . Damit ist  $x(t) := x_0 + G(t)$  stetig differenzierbar, und es gilt  $x'(t) = F(x, t)$  und  $x(t_0) = x_0$ .  $\square$

**Folgerung 8.1** Sei  $C(I, \mathbb{R}^n)$  der Vektorraum der stetigen Abbildungen von einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^n$  und  $C_U(I, \mathbb{R}^n) := \{x \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid (x(t), t) \in U\}$ . Weiterhin bezeichne

$$\begin{aligned} H : C_U(I, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow C(I, \mathbb{R}^n) \\ x &\longmapsto Hx \end{aligned}$$

den durch

$$Hx(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds$$

gegebenen Integraloperator. Dann löst  $x \in C_U(I, \mathbb{R}^n)$  genau dann das Anfangswertproblem  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , wenn  $x$  ein Fixpunkt des Operators  $H$  ist.

Der eben bewiesene Satz zeigt, dass Fixpunktsätze zum Studium der Lösbarkeit von Differentialgleichungen nützlich sein können. Wir kennen bereits den Banachschen Fixpunktsatz, der Aussagen über die Existenz von Fixpunkten kontraktiver Abbildungen in vollständigen metrischen Räumen macht. Wir werden im nächsten Abschnitt weitere Fixpunktsätze kennenlernen, die nur die Stetigkeit der Abbildung erfordern: den Brouwerschen und die Schauderschen Fixpunktsätze. Diese Fixpunktsätze werden zum Beweis der Existenz von Lösungen von DGL nützlich sein.

### 8.3.1.1 Fixpunktsätze

Aus der Analysis-Vorlesung kennen wir bereits den Banachschen Fixpunktsatz (Skript Grundkurs Analysis Kapitel 4.3, Satz 4.24). Wir wiederholen ihn hier nochmal.

**Satz 8.8 (Banachscher Fixpunktsatz)** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine kontraktive Abbildung, d.h. es existiert ein  $L \in \mathbb{R}$ ,  $0 < L < 1$ , so dass

$$d(Tx, Ty) \leq L d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

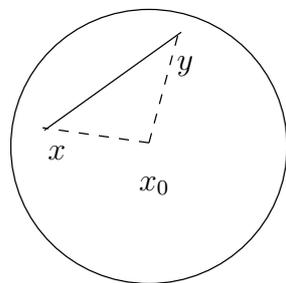
Dann hat  $T$  genau einen Fixpunkt  $x^* \in X$ , d.h.  $T(x^*) = x^*$ .

Der Fixpunkt  $x^*$  wurde mit Hilfe des Verfahrens der sukzessiven Approximation gefunden. Dazu betrachtet man zu einem beliebigen Startpunkt  $x_0 \in X$  die Folge  $x_n := T(x_{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $(x_n)$  gegen  $x^*$ . Für die Konvergenzgeschwindigkeit gilt

$$d(x^*, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1).$$

Wir benötigen nun weitere Fixpunktsätze, die auch für stetige Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen gelten. Dafür muß man sich auf bestimmte Mengen, sogenannte konvexe Mengen einschränken.

**Definition 8.11** Sei  $E$  ein reeller Vektorraum. Eine Menge  $K \subset E$  heißt konvex, wenn die Strecke  $\overline{xy} := \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\}$  zwischen beliebigen Punkten  $x$  und  $y$  aus  $K$  ebenfalls vollständig in  $K$  liegt.



**Beispiel:** Kugeln in normierten Vektorräumen sind konvex, wie eine einfache Rechnung unter Anwendung der Dreiecksungleichung zeigt.

Wir stellen nun die Frage, wann stetige Abbildungen auf konvexen Teilmengen eines normierten Vektorraumes Fixpunkte haben. Eine Antwort darauf geben die folgenden Fixpunktsätze.

**Satz 8.9 (Brouwerscher Fixpunktsatz)** Sei  $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$  die abgeschlossene Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ . Dann hat jede stetige Abbildung  $f : B^n \rightarrow B^n$  mindestens einen Fixpunkt.

**Zum Beweis:** Es gibt viele Beweise dieses Satzes. Einen analytischen Beweis finden Sie im Buch von H. Heuser: Analysis II, §228, Seiten 593-599. Dieser Beweis benutzt eine Approximation durch Polynome. Zwei andere Beweise finden Sie in der Bachelorarbeit *Fixpunktsatz von Brouwer* von Christian Hund<sup>1</sup>.

Wir geben hier die Idee eines Beweises an, der die Grundidee der algebraischen Topologie

<sup>1</sup>siehe <http://www.math.uni-bielefeld.de/emmrich/studenten/christianhund.pdf>

benutzt, die wir bei dieser Gelegenheit etwas erläutern wollen.

Die algebraische Topologie ist ein mathematische Gebiet, in dem Eigenschaften topologischer Räume und stetiger Abbildungen durch zugeordnete algebraische Größen studiert werden. Dabei wird jedem topologischen Raum  $X$  eine Gruppe  $G(X)$  und jeder stetigen Abbildungen zwischen zwei topologischen Räumen ein entsprechender Gruppenhomomorphismen zugeordnet:

$$\begin{aligned} X \text{ topologischer Raum} &\longmapsto G(X) \text{ Gruppe} \\ f : X \rightarrow Y \text{ stetige Abbildung} &\longmapsto f_* : G(X) \rightarrow G(Y) \text{ Gruppenhomomorphismus} \end{aligned}$$

Die Zuordnung ist dabei so gemacht, dass für die Gruppenhomomorphismen folgende Regeln gelten:

$$id_* = id \quad \text{und} \quad (h \circ f)_* = h_* \circ f_*.$$

In der algebraischen Topologie werden verschiedene solche Zuordnungen konstruiert. Eine davon ist z.B. die sogenannte  $k$ . Homologiegruppe  $H_k(X)$ , wobei  $k$  eine beliebige natürliche Zahl ist. Man kann die Homologiegruppen für die Einheitskugel  $B^n$  und ihren Rand, die Sphäre  $S^{n-1}$ , leicht ausrechnen. Man erhält z.B.

$$\begin{aligned} H_{n-1}(B^n) &= 0, \\ H_{n-1}(S^{n-1}) &= \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Mit diesen Informationen kann man den Brouwerschen Fixpunktsatz dann folgendermaßen beweisen. Wir nehmen an, es gäbe keinen Fixpunkt von  $f : B^n \rightarrow B^n$ . Dann können wir die folgende stetige Abbildung  $g : B^n \rightarrow S^{n-1}$  definieren:

$$\begin{aligned} g : B^n &\rightarrow S^{n-1} \\ x &\mapsto \overrightarrow{f(x)x} \cap S^{n-1} = \text{der eindeutig definierte Schnittpunkt} \\ &\quad \text{des Strahls von } f(x) \text{ durch } x \text{ mit } S^{n-1} \end{aligned}$$

Sei außerdem

$$\begin{aligned} i : S^{n-1} &\rightarrow B^n \\ x &\rightarrow x \end{aligned}$$

die Einbettung, die ebenfalls stetig ist. Dann betrachtet man die folgende Verknüpfung stetiger Abbildungen

$$id = g \circ i : S^{n-1} \xrightarrow{i} B^n \xrightarrow{g} S^{n-1}$$

und geht zu den Homologiegruppen über

$$\begin{array}{ccccc} id = id_* = (g \circ i)_* : H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(B^n) & \xrightarrow{g_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & \mathbb{Z} & & 0 & & \mathbb{Z} \end{array} .$$

Das heißt aber nichts anderes als  $0 = id = id_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , was ein Widerspruch ist.  $\square$

**Bemerkung:** Der Satz gilt natürlich auch für Kugeln mit beliebigem Radius.

Der nächste Fixpunktsatz ist eine Folgerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

**Satz 8.10 (Fixpunktsatz für kompakte, konvexe Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ )**

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine nichtleere, kompakte und konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Dann hat jede stetige Abbildung  $f : A \rightarrow A$  mindestens einen Fixpunkt.

**Beweis:** Da  $A$  kompakt ist, ist  $A$  abgeschlossen. Da  $A$  abgeschlossen und konvex ist, existiert zu jedem  $x \in \mathbb{R}^n$  genau ein Punkt  $p_A(x) \in A$  mit

$$\|p_A(x) - x\| = \text{dist}(A, x) := \inf_{y \in A} \|y - x\|.$$

Dann ist der Projektionsoperator

$$\begin{aligned} p_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow A. \\ x &\longmapsto p_A(x) =: \text{„Lot von } x \text{ auf } A\text{“} \end{aligned}$$

stetig. (Für den Beweis dieser Stetigkeit verallgemeinere man den Beweis von Satz 2.51 von Analysis I für den Fall, dass  $A \subset H$  ein abgeschlossener Unterraum in einem Hilbertraum ist, auf den Fall, dass  $A$  konvex ist. Siehe auch D.Werner: Funktionalanalysis, Satz V.3.2.) Da  $A$  kompakt ist, ist  $A$  auch beschränkt, d.h. es existiert ein  $r \in \mathbb{R}^+$ , so dass

$$A \subset B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}.$$

Wir schränken nun den Projektionsoperator auf die Kugel  $B_r^n$  ein und betrachten die Abbildung

$$H := i \circ f \circ p_A : B_r^n \xrightarrow{p_A} A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{i} B_r^n.$$

$H$  ist stetig. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz existiert mindestens ein Fixpunkt  $y_0 \in B_r^n$  von  $H$  mit

$$y_0 = H(y_0) = f \circ p_A(y_0).$$

Da das Bild von  $f$  in  $A$  liegt, folgt  $y_0 \in A$  und somit  $p_A(y_0) = y_0$ . Damit ist aber  $f(y_0) = y_0$ , d.h.  $y_0$  ist ein Fixpunkt von  $f$ .  $\square$

Nun beweisen wir analoge Fixpunktsätze für beliebige normierte Vektorräume  $E$ , die nicht notwendig endlich-dimensional sein müssen, und die wir später auf den Vektorraum der stetigen Abbildungen  $E = C(I, \mathbb{R}^n)$  anwenden können.

**Satz 8.11 (1. Schauderscher Fixpunktsatz)** Sei  $E$  ein beliebiger normierter Vektorraum,  $K \subset E$  eine konvexe und  $A \subset K$  eine nicht leere, kompakte Teilmenge. Dann besitzt jede stetige Abbildung  $f : K \rightarrow A \subset K$  mindestens einen Fixpunkt  $z \in A : f(z) = z$ .

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir zeigen zunächst die folgende

$$\text{Behauptung:} \quad \text{Es existiert ein } y_\varepsilon \in K \text{ mit } \|f(y_\varepsilon) - y_\varepsilon\| < \varepsilon. \quad (8.35)$$

Sei also  $\varepsilon > 0$ . Wir betrachten die offene Überdeckung

$\mathcal{U} := \{K(x, \varepsilon)\}_{x \in A}$ . Da  $A$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung aus  $\mathcal{U}$ , d.h. es existieren  $x_1, \dots, x_p \in A$ , so dass

$$A \subset K(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup K(x_p, \varepsilon).$$

Wir betrachten nun die konvexe lineare Hülle von  $x_1, \dots, x_p$ :

$$\text{conv}(x_1, \dots, x_p) := \left\{ \sum_{\mu=1}^p \lambda_\mu x_\mu \mid \lambda_\mu \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \sum_{\mu} \lambda_\mu = 1 \right\}.$$

Die konvexe Hülle von endlich vielen Elementen eines normierten Raumes ist konvex und kompakt (Übungsaufgabe). Außerdem liegt sie in einem endlich-dimensionalen Unterraum:

$$\text{conv}(x_1, \dots, x_p) \subset \text{span}_{\mathbb{R}}(x_1, \dots, x_p) \cong \mathbb{R}^q, \quad \text{wobei } q \leq p < \infty.$$

Wir definieren nun die folgenden stetigen Abbildungen von  $A$  nach  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu}(x) &:= \begin{cases} 0 & : \|x - x_{\mu}\| \geq \varepsilon \\ \varepsilon - \|x - x_{\mu}\| & : \|x - x_{\mu}\| < \varepsilon \end{cases}, \\ \varphi &:= \sum_{\mu=1}^p \varphi_{\mu}, \\ \psi_{\mu} &:= \frac{\varphi_{\mu}}{\varphi}. \end{aligned}$$

Alle drei Abbildungen sind stetig, und es gilt  $0 \leq \psi_{\mu}(x) \leq 1$  und  $\sum_{\mu=1}^p \psi_{\mu}(x) = 1$  für alle  $x \in A$ . Die Abbildungen  $(\psi_{\mu})$  sind also eine stetige Zerlegung der 1. Mit Hilfe dieser Zerlegung der 1 definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} h : A &\longrightarrow \text{conv}(x_1, \dots, x_p) \\ x &\longmapsto \sum_{\mu=1}^p \psi_{\mu}(x) \cdot x_{\mu}. \end{aligned}$$

Dann gilt die folgende Behauptung:

$$\|h(x) - x\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } x \in A. \quad (8.36)$$

Um dies einzusehen, betrachten wir

$$h(x) - x = \sum_{\mu=1}^p \psi_{\mu}(x_{\mu} - x) = \sum_{\substack{c_{\mu'} \in \{1, \dots, p\}, \\ x \in K(x_{\mu'}, \varepsilon)}} \psi_{\mu'}(x) (x_{\mu'} - x).$$

$$\text{Damit ergibt sich } \|h(x) - x\| \leq \underbrace{\sum_{\mu'} \psi_{\mu'}(x)}_{=1} \underbrace{\|x_{\mu'} - x\|}_{< \varepsilon} < \varepsilon.$$

Einer stetigen Abbildung  $f : K \longrightarrow A \subset K$  können wir nun die folgende stetige Abbildung zuordnen:

$$h \circ f : K \xrightarrow{f} A \xrightarrow{h} \text{conv}(x_1, \dots, x_p) \subset K.$$

Nun sind  $x_1, \dots, x_p \in A \subset K$  und  $K$  ist konvex. Die konvexe Hülle  $C := \text{conv}(x_1, \dots, x_p)$  ist die kleinste konvexe Menge, die  $x_1, \dots, x_p$  enthält, somit ist  $C$  eine Teilmenge von  $K$ . Damit ist die Abbildung

$$\hat{h} = h \circ f|_{\text{conv}(x_1, \dots, x_p)} : C = \text{conv}(x_1, \dots, x_p) \longrightarrow C = \text{conv}(x_1, \dots, x_p)$$

eine stetige Abbildung auf einer konvexen, kompakten und nichtleeren Teilmenge  $C$  in einem endlich dimensionalen normierten Vektorraum. Nach Satz 8.10 existiert mindestens ein Fixpunkt  $y \in C$  von  $\hat{h}$

$$\hat{h}(y) = y = h \circ f(y).$$

Da  $y \in C$  ist  $f(y) \in A$ . Damit folgt aus (8.36)

$$\|h \circ f(y) - f(y)\| = \|y - f(y)\| < \varepsilon.$$

Damit haben wir folgendes gezeigt:

Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $y(\varepsilon) \in K$ , so dass  $\|f(y(\varepsilon)) - y(\varepsilon)\| < \varepsilon$ . Mit Hilfe dieser

Eigenschaft konstruieren wir nun einen Fixpunkt von  $f$ . Dazu setzt man  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  und erhält eine Folge  $(y_n)_{n=1}^\infty$  in  $K$  mit  $\|f(y_n) - y_n\| < \frac{1}{n}$ . Nun ist  $(f(y_n))_{n=1}^\infty$  eine Folge in der kompakten, also folgenkompakten Menge  $A$ , d.h. es existiert eine Teilfolge  $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$  von  $(y_n)_{n=1}^\infty$  mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = z \in A. \quad (8.37)$$

Die Behauptung ist nun, dass  $z$  ein Fixpunkt von  $f$  ist. Man hat

$$\|y_{n_k} - z\| \leq \underbrace{\|y_{n_k} - f(y_{n_k})\|}_{\leq \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0} + \underbrace{\|f(y_{n_k}) - z\|}_{\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \text{ wegen (8.37)}}$$

und somit  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = z$ . Die Abbildung  $f$  ist stetig, folglich konvergiert  $f(y_{n_k})$  gegen  $f(z)$ . Mit (8.37) hat man dann  $f(z) = z$ , also ist  $z$  ein Fixpunkt.  $\square$

Der letzte Fixpunktsatz ist eine direkte Folgerung aus dem ersten Schauderschen Fixpunktsatz.

**Satz 8.12 (2. Schauderscher Fixpunktsatz)** Sei  $E$  ein normierter VR,  $K \subset E$  konvex und nicht leer und  $f : K \rightarrow K$  stetig. Ist

- a)  $K$  kompakt oder
- b)  $K$  abgeschlossen und  $f(K)$  relativ kompakt (d.h. der Abschluss  $\text{cl } f(K)$  kompakt),

so hat  $f$  mindestens einen Fixpunkt.

**Beweis:** a) Da  $K$  kompakt ist, ist aufgrund der Stetigkeit von  $f$  auch  $f(K)$  kompakt. Dann wendet man den ersten Schauderschen Fixpunktsatz auf

$$f : K \longrightarrow f(K) =: A \subset K$$

an.

b) Hier ist  $K$  abgeschlossen und  $f(K) \subset K$ . Damit gilt für den kompakten Abschluss, dass  $\text{cl } f(K) \subset \text{cl } K = K$ . Nun wendet man den ersten Schauderschen Fixpunktsatz auf

$$f : K \longrightarrow \text{cl } f(K) =: A \subset K$$

an.  $\square$

Zum Beweis von Fixpunkten für den Integraloperator  $H$  aus Abschnitt 8.3.1 benötigen wir noch ein Kriterium für die relative Kompaktheit von Mengen stetiger Abbildungen, das wir nun behandeln werden.

### 8.3.1.2 Kompaktheit von Mengen stetiger Abbildungen (Satz von Arzela/Ascoli)

Wir erinnern zunächst die folgenden Ergebnisse der Analysis I Vorlesung.

1.  $A \subset \mathbb{R}^n$  kompakt  $\iff A$  abgeschlossen und beschränkt. (Analysis I, Satz 2.35, Satz 2.37)
2. Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum. Dann gilt:  
 $A \subset X$  kompakt  $\iff A$  abgeschlossen und total beschränkt. (Analysis I, Satz 2.36, Satz 2.37)

3. Sei  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum und  $E$  ein endlich-dimensionaler reeller normierter Vektorraum. Dann ist  $C(X, E)$  ein Banachraum bezüglich der Norm  $\|f\|_\infty := \max_{x \in X} \|f(x)\|_E$ .

Für Teilmengen des Banachraumes  $C(X, E)$  hat man das folgende Kompaktheitskriterium

$$\mathcal{M} \subset C(X, E) \text{ kompakt} \iff \mathcal{M} \text{ abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Dies ist die Aussage des folgenden Satzes.

**Satz 8.13 (Satz von Arzela-Ascoli)** Sei  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum,  $E$  ein endlich-dimensionaler reeller normierter Vektorraum und  $C(X, E) := \{f : X \rightarrow E \mid f \text{ stetig}\}$  der Banachraum der stetigen Abbildungen mit der Maximumnorm:

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} \|f(x)\|_E.$$

Dann gilt:  $\mathcal{M} \subset C(X, E)$  ist kompakt  $\iff \mathcal{M}$  ist

- beschränkt,
- abgeschlossen und
- gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \text{ so dass für } d(x, y) < \delta \text{ folgt, dass } \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \forall f \in \mathcal{M}.$$

**Beweis:** Wir beweisen nur die Richtung ( $\Leftarrow$ ), da wir im folgenden nur diese benötigen. Den Beweis der anderen Richtung findet man in jedem Buch über Funktionalanalysis.

Sei also  $\mathcal{M} \subset C(X, E)$  beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig.

Behauptung:  $\mathcal{M}$  ist kompakt.

Nach Satz 2.33 der Vorlesung Analysis I gilt aber:  $(X, d)$  kompakt  $\implies X$  ist separabel, d.h. es existiert eine abzählbare, dichte Teilmenge  $A := (x_1, x_2, \dots)$  in  $X$ . D.h., für  $\mathcal{M}$  ist zu zeigen:

Sei  $(f_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge in  $\mathcal{M}$ . Dann existiert eine bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $\mathcal{M}$ , d.h. eine gleichmäßig konvergente Teilfolge von  $(f_n)_{n=1}^\infty$  in  $X$ .

Sei nun  $(f_n)_{n=1}^\infty$  eine Folge von Funktionen aus  $\mathcal{M}$ .

Da  $\mathcal{M}$  beschränkt ist, existiert ein  $c > 0$  so, dass:  $\|f_n\|_\infty \leq c$ . D.h. aber, dass  $\|f_n(x_i)\|_E \leq \|f_n\|_\infty \leq c$  für alle  $i, n$  aus  $\mathbb{N}$ .

Die Menge  $\{f_n(x_1) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset E$  ist also beschränkt in  $E \cong \mathbb{R}^n$ . Damit ist aber deren Abschluss  $\text{cl}\{f_n(x_1) \mid n \in \mathbb{N}\}$  abgeschlossen und beschränkt in  $E \cong \mathbb{R}^n$ . Da nun  $E$  endlich-dimensional ist, ist dieser Abschluss kompakt und damit folgenkompakt. Wir haben also eine konvergente Teilfolge  $(f_{n_1}(x_1), f_{n_2}(x_1), \dots)$ .

Dann ist ebenfalls die Folge  $(f_{n_i}(x_2) \mid i \in \mathbb{N})$  beschränkt in  $E$ , d.h. sie enthält wieder eine konvergente Teilfolge  $f_{m_1}(x_2), f_{m_2}(x_2), \dots$ .

Analog existiert eine konvergente Teilfolge  $f_{p_1}(x_3), f_{p_2}(x_3), \dots$  von  $(f_n(x_3))$  usw.

Man definiert nun die folgende Menge von Funktionen (mit Hilfe des Diagonalisierungsverfahrens):

$$\hat{f}_1 = f_{n_1}, \hat{f}_2 = f_{m_2}, \hat{f}_3 = f_{p_3}, \dots$$

Dann konvergiert die Folge  $(\hat{f}_i(x_n))_{i=1}^\infty$  für alle fixierten  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir beweisen nun die folgende

Behauptung: Die Folge  $(\hat{f}_i)_{i=1}^\infty$  ist in  $(C(X; E), \|\cdot\|_\infty)$  konvergent.

Wegen der Vollständigkeit des normierten Raumes  $(C(X; E), \|\cdot\|_\infty)$  genügt es zu zeigen, dass  $(\hat{f}_i)_{i=1}^\infty$  eine Cauchy-Folge bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ist.

Dazu benötigen wir die folgenden beiden Fakten.

- Sei  $\varepsilon > 0$ . Da  $\mathcal{M}$  gleichgradig stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, y$  mit  $d(x, y) < \delta$  gilt, dass  $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ .
- Da  $X$  kompakt ist, existieren endlich viele Kugeln  $K_1, \dots, K_d$  vom Radius  $\frac{\delta}{2}$ , die  $X$  überdecken.

Da die Menge  $A := \{x_1, x_2, \dots\}$  dicht ist in  $X$ , enthält jede dieser Kugeln einen Punkt  $x_i$  aus  $A$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $x_{k_l} \in K_l$  für  $l = 1, \dots, d$ .

Da nun die Folge  $(\hat{f}_i(x_{k_l}))_{i=1}^\infty$  in  $E$  konvergiert, ist sie eine Cauchy-Folge in  $E$ , d.h. es existiert ein  $i_0(\varepsilon)$ , so dass

$$\|\hat{f}_i(x_{k_l}) - \hat{f}_j(x_{k_l})\| < \varepsilon \quad \forall i, j \geq i_0(\varepsilon), l = 1, \dots, d. \quad (8.38)$$

Sei nun  $x \in X$  ein beliebiger Punkt. Dann existiert ein  $K_{l_0}$  mit  $x \in K_{l_0}$ , d.h.  $d(x, x_{k_{l_0}}) < \delta$ . Da  $\mathcal{M}$  gleichgradig stetig ist hat man

$$\|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_i(x_{k_{l_0}})\| \leq \varepsilon \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}. \quad (8.39)$$

Folglich gilt nach (8.38) und (8.39) für  $i, j \geq i_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_j(x)\| &\leq \|\hat{f}_i(x) - \hat{f}_i(x_{k_{l_0}})\| + \|\hat{f}_i(x_{k_{l_0}}) - \hat{f}_j(x_{k_{l_0}})\| + \|\hat{f}_j(x_{k_{l_0}}) - \hat{f}_j(x)\| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\ &= 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Das heißt aber, dass  $\|\hat{f}_i - \hat{f}_j\|_\infty \leq 3\varepsilon$  für alle  $i, j \geq i_0$ . Damit ist  $(\hat{f}_i)_{i=1}^\infty$  eine Cauchy-Folge in  $C(X, E)$  und konvergiert somit gegen ein  $f \in C(X, E)$ . Da nun aber  $\mathcal{M}$  abgeschlossen ist, liegt  $f$  auch in  $\mathcal{M}$ . Damit hat die beliebige Folge  $(f_i)_{i=1}^\infty$  eine in  $\mathcal{M}$  konvergente Teilfolge  $(\hat{f}_{m_i})_{i=1}^\infty$ .  $\mathcal{M}$  ist also kompakt.  $\square$

Wir werden im nächsten Abschnitt die folgende Variante des Satzes von Arzela-Ascoli benutzen, die wir mit dem letzten Beweis ebenfalls gezeigt haben:

**Satz 8.14 (Satz von Arzela-Ascoli-2)** *Sei  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum,  $E$  ein endlich-dimensionaler reeller normierter Vektorraum und  $C(X, E)$  der Banachraum der stetigen Abbildungen mit der Maximumnorm  $\|\cdot\|_\infty$ . Dann gilt:  
Ist  $\mathcal{M} \subset C(X, E)$  eine beschränkte, gleichgradig stetige Teilmenge von Abbildungen, so ist  $\mathcal{M}$  relativ kompakt.*

Wir haben nun alle Vorbereitung zusammen, um die Existenz- und Eindeutigkeitsätze für unsere Differentialgleichungen zu beweisen.

### 8.3.1.3 Der Existenzsatz von Cauchy und Peano

Wir beweisen nun den Satz über die Lösbarkeit des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

#### Satz 8.15 (Existenzsatz von Cauchy und Peano)

Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $U$  offen und  $(x_0, t_0) \in U$ . Seien desweiteren  $a, b > 0$  so gewählt, dass der kompakte Bereich

$$Q := \{(y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|y - x_0\| \leq b, |t - t_0| \leq a\}$$

in  $U$  liegt und bezeichne

$$M := \max_{(y,t) \in Q} \|F(y, t)\| \quad \text{und} \\ \sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

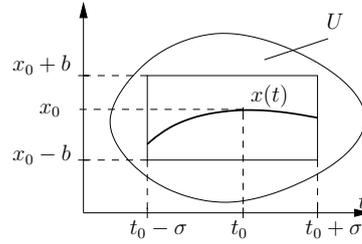
Dann existiert mindestens eine Lösung  $x : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \rightarrow \mathbb{R}^n$

des Anfangswertproblems

$$x' = F(x, t), \\ x(t_0) = x_0,$$

und diese erfüllt

$$\|x(t) - x_0\| \leq b \text{ für alle } t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma].$$



**Beweis:** Sei  $I := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ . Nach Satz 8.7 ist die Existenz einer stetigen Abbildung  $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$  mit

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds$$

zu beweisen.

Sei  $f_{x_0} \in C(I, \mathbb{R}^n)$  die konstante Abbildung  $f_{x_0}(t) = x_0$  für alle  $t \in I$ . Wir betrachten nun die abgeschlossene Kugel vom Radius  $b$  um  $f_{x_0}$  in  $C(I, \mathbb{R}^n)$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_\infty$ :

$$K := \{f \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid \|f - f_{x_0}\|_\infty \leq b\} \\ = \{f \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid \|f(t) - x_0\| \leq b \forall t \in I\}.$$

$K$  ist konvex und abgeschlossen und es gilt  $K \subset C_U(I, \mathbb{R}^n)$ .

Für den Integraloperator

$$H : C_U(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n) \\ x \mapsto Hx \quad \text{wobei} \quad (Hx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds,$$

beweisen wir nun der Reihe nach die folgenden Behauptungen:

1.  $H(K) \subset K$  für die konvexe, abgeschlossene Menge  $K$ ,
2.  $H : K \rightarrow K$  ist stetig und
3.  $H(K)$  relativ kompakt in  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ .

Wäre diese Behauptungen bewiesen, so würde aus dem 2. Schauderschen Fixpunktsatz folgen, dass  $H$  mindestens einen Fixpunkt  $x$  hat, d.h. dass eine Lösung  $x \in K \subset C(I, \mathbb{R}^n)$  von

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds$$

existiert. Da die Lösung in der Kugel  $K$  liegt, gilt  $\|x(t) - x_0\| \leq b$  für alle  $t \in I$ .

**Beweis von 1.** Für  $x \in K$  folgt  $\|x - f_{x_0}\| = \max_{t \in I} \|x(t) - x_0\| \leq b$ . Damit ist  $(x(s), s) \in Q$  für alle  $s \in I$ , und somit gilt nach Definition von  $M$ , dass  $\|F(x(s), s)\| \leq M$  für alle  $x \in K, s \in I$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|Hx - f_{x_0}\|_\infty &= \max_{t \in I} \|Hx(t) - x_0\| \\ &= \max_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds \right\| \\ &\leq \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\|F(x(s), s)\|}_{\leq M} ds \right| \\ &\leq \max_{t \in I} |M(t - t_0)| \\ &\leq M \cdot \sigma \\ &\leq b, \end{aligned}$$

d.h.  $Hx \in K = \text{cl } K(f_{x_0}, b)$ .

**Beweis von 2.** Wir haben zu zeigen, dass  $H : K \rightarrow K$  stetig ist.

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben. Da  $Q$  kompakt ist, ist  $F|_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  gleichmäßig stetig, d.h. es existiert ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\|F(y_1, t) - F(y_2, t)\|_{\mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \text{für alle } (y_1, t), (y_2, t) \in Q \text{ mit } \|y_1 - y_2\| < \delta. \quad (8.40)$$

Seien nun  $f, h \in K = \text{cl } K(f_{x_0}, b)$  zwei Funktionen mit  $\|f - h\|_\infty < \delta$ . Dann kann man die folgende Behauptung beweisen:

$$\|Hf - Hh\|_\infty < \varepsilon \quad (\text{d.h. } H \text{ ist auf } K \text{ sogar gleichmäßig stetig}) :$$

Wegen  $\|f - h\| = \max_{t \in I} \|f(t) - h(t)\| < \delta$  gilt, dass  $\|f(t) - h(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$  für alle  $t \in I$  und somit aufgrund von (8.40)

$$\|F(f(t), t) - F(h(t), t)\| \leq \frac{\varepsilon}{\sigma} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \|Hf - Hh\|_\infty &= \max_{t \in I} \|Hf(t) - Hh(t)\| \\ &= \max_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t F(f(s), s) - F(h(s), s) ds \right\| \\ &\leq \max_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t \|F(f(s), s) - F(h(s), s)\| ds \right| \\ &\leq \max_{t \in I} \left| \frac{\varepsilon}{\sigma} (t - t_0) \right| \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist 2. gezeigt.

**Beweis von 3.** Es ist zu zeigen, dass  $H(K)$  relativ kompakt ist.

Wir betrachten die Menge von Funktionen

$$\mathcal{M} := H(K) = \{Hf \mid f \in K\} \subset C(I, \mathbb{R}^n)$$

und wenden darauf den Satz 8.14 von Arzela-Ascoli an, der besagt: Ist  $\mathcal{M}$  beschränkt und gleichgradig stetig, so ist  $\mathcal{M}$  relativ kompakt.  $\mathcal{M} = H(K) \subset K$  ist beschränkt, da die Kugel  $K$  beschränkt ist. Wir haben also noch zu zeigen, dass  $\mathcal{M}$  gleichgradig stetig ist.

Sei  $\varepsilon > 0$  gegeben und sei  $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$ . Dann gilt für  $t_1, t_2 \in I$  mit  $|t_1 - t_2| < \delta$  und  $f \in K$ :

$$\begin{aligned} \|Hf(t_1) - Hf(t_2)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t_1} F(f(s), s) ds - \int_{t_0}^{t_2} F(f(s), s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} F(f(s), s) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\|F(f(s), s)\|}_{\in Q} ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} M ds \right| \\ &= |t_2 - t_1| M \\ &< \delta M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist  $\mathcal{M}$  gleichgradig stetig.

Wir haben also

$$\begin{array}{ccc} H : & K & \longrightarrow H(K) \subset K \text{ stetig} \\ & \uparrow & \uparrow \\ & \text{abgeschlossen, konvex} & \text{relativ kompakt.} \end{array}$$

Damit existiert mindestens ein Fixpunkt  $x \in K$  von  $H$  und somit eine Lösung der Integralgleichung (8.34).  $\square$

### 8.3.1.4 Der Satz von Picard–Lindelöf

Wie das Beispiel am Anfang dieses Abschnittes gezeigt hatte, können mehrere, sogar unendlich viele Lösungen eines Anfangswertproblems existieren. Daraus ergibt sich das folgende

**Problem:** Unter welchen Bedingungen an  $F$  existiert eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ ?

**Definition.** Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  und  $U$  offen.  $F$  heißt Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen auf einer Teilmenge  $Q \subset U$ , falls eine Konstante  $L_Q > 0$  existiert, so dass

$$\|F(x_1, t) - F(x_2, t)\| \leq L_Q \|x_1 - x_2\| \quad \forall (x_1, t), (x_2, t) \in Q. \quad (8.41)$$

Wir wissen, dass jede stetig differenzierbare Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitzstetig ist. Dies wird verallgemeinert durch den folgenden Satz.

**Satz 8.16** Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar,  $W \times [a, b] \subset U$  und  $W \subset \mathbb{R}^n$  eine kompakte, konvexe Teilmenge. Dann ist  $F$  Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen auf  $Q := W \times [a, b]$ .

**Beweis:** Sei  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Da  $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ , gilt für die Komponenten  $F_k$  von  $F$ :

$$F_k(\cdot, t) \in C^1(W, \mathbb{R}) \quad \text{für alle } t \in [a, b] =: I.$$

Nun wenden wir den Mittelwertsatz (Satz 6.6) aus Kapitel 6.1. an. Seien  $x_1, x_2 \in W$ ,  $t \in [a, b]$ . Dann existiert ein  $\xi_{[k]} \in \overline{x_1 x_2} \subset W$ , so dass

$$F_k(x_1, t) - F_k(x_2, t) = \langle \text{grad}_{\mathbb{R}^n} F_k(\xi_{[k]}, t), x_1 - x_2 \rangle.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \|F(x_1, t) - F(x_2, t)\|^2 &= \sum_{k=1}^n |F_k(x_1, t) - F_k(x_2, t)|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n \underbrace{\|\text{grad}_{\mathbb{R}^n} F_k(\xi_{[k]}, t)\|^2}_{\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\xi_{[k]}, t) \right|^2} \|x_1 - x_2\|^2 \\ &\leq n^2 \underbrace{\max_{\substack{\xi \in W, t \in I \\ k, j=1, \dots, n}} \left| \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(\xi, t) \right|^2}_{\text{Dieser Ausdruck existiert, da } W \times I \text{ kompakt und } \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \text{ stetig ist.}} \|x_1 - x_2\|^2. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck existiert, da  $W \times I$  kompakt und  $\frac{\partial F_k}{\partial x_j}$  stetig ist.

Damit ist  $\|F(x_1, t) - F(x_2, t)\| \leq L_Q \|x_1 - x_2\|$ . □

### Satz 8.17 (Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard–Lindelöf)

Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $U$  offen und  $(x_0, t_0) \in U$ . Seien  $a > 0$  und  $b > 0$  so gewählt, dass die kompakte Menge

$$Q := \{(y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|y - x_0\| \leq b, |t - t_0| \leq a\}$$

in  $U$  liegt. Bezeichne desweiteren

$$M := \max_{(y, t) \in Q} \|F(y, t)\| \quad \text{und} \quad \sigma := \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Sei nun  $F$  zusätzlich Lipschitzstetig auf  $Q$  bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen. Dann hat das Anfangswertproblem  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  genau eine Lösung  $x : [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und diese erfüllt  $\|x(t) - x_0\| \leq b$  für alle  $t \in [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ .

**Beweis:** Sei  $I := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$ . Wir betrachten wie im Satz 8.15 von Cauchy-Peano den Integraloperator

$$H : C_U(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$$

$$x \mapsto Hx \quad \text{wobei} \quad Hx(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds.$$

Wir wollen nun den Banachschen Fixpunktsatz anwenden. Dazu betrachten wir wieder die abgeschlossene Kugel  $K$  in  $C(I, \mathbb{R}^n)$  um die konstante Abbildung  $f_{x_0}$ :

$$K = \{\varphi \in C(I, \mathbb{R}^n) \mid \|\varphi(t) - x_0\| \leq b \text{ für alle } t \in I\}.$$

Da  $C(I, \mathbb{R}^n)$  mit der Maximum-Norm  $\|\cdot\|_\infty$  vollständig und  $K$  abgeschlossen ist, ist  $K$  selbst ein vollständiger metrischer Raum mit der Metrik

$$d_\infty(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{t \in I} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|.$$

Wir wissen aus Satz 8.15 bereits, dass  $H$  die Kugel  $K$  in sich abbildet und dass  $H : K \rightarrow K$  stetig ist. Da jetzt die Abbildung  $F$  sogar eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, erhalten wir mehr. Bezeichne  $L$  die Lipschitz-Konstante von  $F$  auf  $Q$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|H\varphi_1(t) - H\varphi_2(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(\varphi_1(s), s) - F(\varphi_2(s), s)\| ds \right| \\ &\leq L \cdot \left| \int_{t_0}^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \right|. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Damit ist  $\|H\varphi_1 - H\varphi_2\|_\infty \leq L \sigma \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$ , d.h.  $H : K \rightarrow K$  ist eine Lipschitzstetige Abbildung mit der Lipschitz-Konstanten  $L \cdot \sigma$ .

Nun ist  $H$  aber im Allgemeinen nicht kontraktiv, es sei denn wir verkleinern die Intervall-Länge  $\sigma$  so dass  $L\sigma < 1$ . Dies wollen wir aber nicht tun. Statt dessen umgehen wir dieses Problem, indem wir eine andere, zu  $\|\cdot\|_\infty$  äquivalente Norm definieren, bezüglich der  $H$  kontraktiv ist:

Sei  $\alpha \in C(I, \mathbb{R})$  und  $\alpha(I) \subset [r, s]$ . Dann definiert man die *gewichtete* Norm

$$\|\varphi\|_{\infty, \alpha} := \max_{t \in I} \|e^{\alpha(t)} \varphi(t)\|.$$

Für diese Norm gilt  $e^r \|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_{\infty, \alpha} \leq e^s \|\varphi\|_\infty$ , d.h.  $\|\cdot\|_\infty$  und  $\|\cdot\|_{\infty, \alpha}$  sind äquivalente Normen. Folglich ist  $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\infty, \alpha})$  ein Banachraum und  $K \subset C(I, \mathbb{R}^n)$  abgeschlossen bezüglich  $\|\cdot\|_{\infty, \alpha}$ . Also ist

$$(K, d_{\infty, \alpha}) \quad \text{mit} \quad d_{\infty, \alpha}(\varphi_1, \varphi_2) := \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty, \alpha}$$

ein vollständiger metrischer Raum für alle  $\alpha \in C(I, \mathbb{R})$ .

Wir betrachten diese Norm nur für die Funktion  $\alpha$  mit  $\alpha(t) := -L \cdot |t - t_0|$  für  $t \in I$ .

Multiplizieren wir nun (8.42) mit  $e^{-L|t-t_0|}$  so erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-L|t-t_0|} \cdot \|H\varphi_1(t) - H\varphi_2(t)\| &\leq L \cdot e^{-L|t-t_0|} \cdot \left| \int_{t_0}^t e^{L|s-t_0|} \cdot e^{-L|s-t_0|} \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \right| \\ &\leq L \cdot e^{-L|t-t_0|} \cdot \underbrace{\left| \int_{t_0}^t e^{L|s-t_0|} ds \right|}_{= \frac{1}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty, \alpha} \\ &\leq (1 - e^{-L\sigma}) \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty, \alpha} \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle  $t \in I$ . Setzt man  $q := (1 - e^{-L\sigma})$  so erhält man

$$\|H\varphi_1 - H\varphi_2\|_{\infty, \alpha} \leq q \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\infty, \alpha}$$

mit  $0 < q < 1$  und für alle  $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ . D.h. aber, dass  $H : K \rightarrow K$  kontraktiv bezüglich der Metrik  $d_{\infty, \alpha}$  ist. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat  $H$  also einen Fixpunkt  $x \in K$ . Es existiert somit genau eine Lösung  $x$  des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  mit dem Definitionsbereich  $I_\sigma := [t_0 - \sigma, t_0 + \sigma]$  und der Bedingung  $\|x(t) - x_0\| \leq b$  für alle  $t \in I_\sigma$ .

Es bleibt zu zeigen, dass diese Lösung die einzig mögliche auf  $I_\sigma$  ist. Angenommen, es gäbe eine weitere Lösung  $x^* : I_\sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswertproblems mit  $x \neq x^*$ . Diese Lösung muß die Kugel  $K(x_0, b)$  verlassen. Folglich existiert ein  $\tau$  mit  $0 < \tau < \sigma$ , so dass für das Intervall  $I_\tau := [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$  gilt:  $x^*(I_\tau) \subset \text{cl } K(x_0, b)$ , der Punkt  $x^*(t_0 + \tau)$  oder der Punkt  $x^*(t_0 - \tau)$  liegt auf dem Rand der Kugel  $K(x_0, b)$  und  $x^*(t)$  verläßt die Kugel  $\text{cl } K(x_0, b)$  nach dem

Parameter  $t_1 := t_0 + \tau$  (bzw. vor dem Parameter  $t_1 := t_0 - \tau$ ). Wir wenden die obigen Argumente auf das Intervall  $I_\tau$  an und erhalten

$$x|_{I_\tau} = x^*|_{I_\tau}.$$

Insbesondere liegt dann der Punkt  $x(t_1)$  ebenfalls auf dem Rand der Kugel  $K(x_0, b)$ , d.h. es gilt

$$\|x(t_1) - x_0\| = b.$$

Aus der Integralgleichung für die Lösung  $x$  folgt aber

$$\|x(t_1) - x_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} F(x(s), s) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t_1} \|F(x(s), s)\| ds \right| \leq M \cdot |t_1 - t_0| = M \cdot \tau \stackrel{!}{<} M \cdot \sigma \leq b.$$

Dies ist ein Widerspruch. □

Den Fixpunkt im Banachschen Fixpunktsatz erhält man explizit durch ein Iterationsverfahren. In unserem Fall liefert dies die folgende Approximation der Lösung des AWP:

**Folgerung 8.2** *Es seien die gleichen Voraussetzungen wie in Satz 8.17 erfüllt.*

*Die eindeutig bestimmte Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ , mit der Eigenschaft  $\|x(t) - x_0\| \leq b$  für alle  $t \in I$  erhält man durch folgendes Iterationsverfahren:*

*Es sei  $(\varphi_n)$  die iterativ definierte Funktionenfolge*

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &:= x_0 \\ \varphi_n(t) &:= (H\varphi_{n-1})(t) \quad \forall t \in I. \end{aligned}$$

*Dann konvergiert die Folge  $(\varphi_n)$  gleichmäßig gegen die Lösung  $x$  und es gilt folgende Fehlerabschätzung:*

$$\|x(t) - \varphi_n(t)\| \leq \frac{M L^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1} \quad \forall t \in I,$$

*wobei  $L$  die Lipschitzkonstante für  $F$  und  $M$  die Schranke von  $F$  auf  $Q$  ist.*

**Beweis:** Wir führen den Beweis durch Induktion über  $n$ :

$n = 0$ :

$$\|x(t) - x_0\| = \left| \int_{t_0}^t F(x(s), s) ds \right| \leq M |t - t_0|$$

$n - 1 \mapsto n$ :

$$\begin{aligned} \|x(t) - \varphi_n(t)\| &= \|Hx(t) - H\varphi_{n-1}(t)\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|F(x(s), s) - F(\varphi_{n-1}(s), s)\| ds \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^t \|x(s) - \varphi_{n-1}(s)\| ds \right| \\ &\stackrel{I.V.or}{\leq} \frac{L \cdot M L^{n-1}}{n!} \left| \int_{t_0}^t |s - t_0|^n ds \right| \\ &= \frac{M L^n}{(n+1)!} |t - t_0|^{n+1}. \end{aligned} \quad \square$$

Wir wollen im Folgenden oft Aussagen über beliebige Anfangswerte treffen. Deshalb stellen wir nun eine etwas stärkere Bedingung an  $F$ .

**Definition 8.12** Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Abbildung und  $U$  offen.  $F$  heißt lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen, falls jeder Punkt  $(x_0, t_0) \in U$  eine Umgebung  $V(x_0, t_0) \subset U$  besitzt für die  $F|_V$  Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen ist.

Wie oben folgt wiederum, dass jede  $C^1$ -Abbildung  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen ist. Wir überlassen dem Leser die folgende Feststellung als Übungsaufgabe:

**Lemma 8.1** Eine stetige Abbildung  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $U$  offen, ist genau dann lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen, wenn  $F$  Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset U$  ist.

Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatzes von Picard-Lindelöf erhält man dann:

**Folgerung 8.3** Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen. Dann existiert zu jedem  $(x_0, t_0) \in U$  ein  $\varepsilon = \varepsilon(x_0, t_0) > 0$ , so dass das Anfangswertproblem  $x'(t) = F(x(t), t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  auf dem Intervall  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  eindeutig lösbar ist.

**Beweis:** Betrachten  $Q$  wie in Satz 8.17 und setzen  $\varepsilon := \min(a, \frac{b}{M})$ . □

**Folgerung 8.4** Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen. Stimmen zwei Lösungen  $\varphi, \psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Differentialgleichung  $x' = F(x, t)$  in einem Parameter aus  $I$  überein, so gilt bereits  $\varphi = \psi$ .

**Beweis:** Seien  $\varphi$  und  $\psi$  zwei Lösungen der DGL auf dem Intervall  $I$  mit  $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$  für ein  $t_0 \in I$ . Sei  $J := \{t \in I \mid \varphi(t) = \psi(t)\} \subset I$ . Wir müssen zeigen, dass  $J = I$ . Dies ist ein typisches Zusammenhangsargument: Es gilt

- $J \neq \emptyset$ , da  $t_0 \in J$ .
- $J$  ist abgeschlossen in  $I$ , da  $\varphi$  und  $\psi$  stetig sind.
- $J$  ist offen in  $I$ : Sei  $t_1 \in J$ . Nach Folgerung 8.3 existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass

$$\varphi|_{I \cap (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)} = \psi|_{I \cap (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)}.$$

Folglich ist  $I \cap (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon) \subset J$ . Damit ist  $J$  offen in  $I$ .

Da  $I$  als Intervall zusammenhängend ist, folgt  $J = I$ . □

### 8.3.2 Die Abhängigkeit der Lösung einer Differentialgleichung von den Anfangswerten

Es sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen. Mit  $\varphi_{x_0}$  bezeichnen wir die (lokal) eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Wir untersuchen nun die Frage, wie sich die Lösung  $\varphi_{x_0}$  ändert, wenn man den Anfangswert  $x_0$  variiert?

Dazu beweisen wir zunächst eine auch für spätere Zwecke nützliche Ungleichung.

**Lemma 8.2 (Gronwall–Ungleichung)**

Es seien  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetige, nichtnegative Funktionen und es gelte

$$v(t) \leq C + \int_a^t v(s)u(s) ds \quad \forall t \in [a, b],$$

wobei  $C$  eine nichtnegative reelle Konstante ist. Dann gilt

$$v(t) \leq C \cdot e^{\int_a^t u(s) ds} \quad \forall t \in [a, b].$$

**Beweis:** 1. Fall: Sei  $C > 0$ . Wir betrachten auf  $[a, b]$  die Funktion

$$f(t) := C + \int_a^t v(s)u(s) ds$$

Dann gilt  $0 < C \leq f(t)$  und  $v(t) \leq f(t)$  für alle  $t \in [a, b]$ . Des Weiteren folgt

$$f'(t) = v(t) \cdot u(t) \leq f(t) \cdot u(t).$$

Da  $f(t) > 0$ , folgt  $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt} \ln f(t) \leq u(t)$ . Durch Integration erhält man

$$\ln(f(t)) - \ln(f(a)) \leq \int_a^t u(s) ds, \quad \text{also} \quad f(t) \leq f(a) \cdot e^{\int_a^t u(s) ds} = C \cdot e^{\int_a^t u(s) ds}.$$

Folglich ist  $v(t) \leq C \cdot e^{\int_a^t u(s) ds}$  für alle  $t \in [a, b]$ .

2. Fall:  $C = 0$ . Die Behauptung in diesem Fall lautet:  $v(t) = 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . Nach Voraussetzung ist

$$v(t) \leq \int_a^t v(s)u(s) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Somit gilt für jedes  $\varepsilon > 0$

$$v(t) \leq \varepsilon + \int_a^t v(s)u(s) ds \quad \forall t \in [a, b].$$

Wir wenden das Ergebnis aus dem 1. Fall an und erhalten

$$0 \leq v(t) \leq \varepsilon \cdot e^{\int_a^t u(s) ds}$$

für alle  $\varepsilon > 0$  und  $t \in [a, b]$ . Lassen wir nun  $\varepsilon$  gegen 0 laufen, so folgt  $v(t) = 0$  für alle  $t \in [a, b]$ . □

**Satz 8.18 (Stetige Abhängigkeit der Lösung von der Anfangsbedingung)**

Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf  $U$  stetig und Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen mit der Lipschitzkonstanten  $L$ . Seien  $(x_0, t_0), (x_0^*, t_0) \in U$  und

$$\varphi_{x_0}, \varphi_{x_0^*} : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Lösungen der Differentialgleichung  $x' = F(x, t)$  mit den Anfangsbedingungen  $\varphi_{x_0}(t_0) = x_0$  bzw.  $\varphi_{x_0^*}(t_0) = x_0^*$ . Dann gilt

$$\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0^*}(t)\| \leq \|x_0 - x_0^*\| \cdot e^{L|t-t_0|} \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon].$$

**Beweis:** Für die Lösungen  $\varphi_{x_0}$  und  $\varphi_{x_0^*}$  gilt für alle  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

$$\varphi_{x_0}(t) - x_0 = \int_{t_0}^t F(\varphi_{x_0}(s), s) ds \quad \text{bzw.} \quad \varphi_{x_0^*}(t) - x_0^* = \int_{t_0}^t F(\varphi_{x_0^*}(s), s) ds.$$

Daraus folgt

$$\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0^*}(t) = (x_0 - x_0^*) + \int_{t_0}^t (F(\varphi_{x_0}(s), s) - F(\varphi_{x_0^*}(s), s)) ds.$$

Mit der Dreiecksungleichung und der Lipschitz-Voraussetzung an  $F$  erhält man

$$\begin{aligned} \|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0^*}(t)\| &\leq \|x_0 - x_0^*\| + \left| \int_{t_0}^t \|F(\varphi_{x_0}(s), s) - F(\varphi_{x_0^*}(s), s)\| ds \right| \\ &\leq \|x_0 - x_0^*\| + \left| \int_{t_0}^t L \cdot \|\varphi_{x_0}(s) - \varphi_{x_0^*}(s)\| ds \right|. \end{aligned}$$

Aus der Gronwall-Ungleichung folgt dann die Behauptung

$$\|\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_0^*}(t)\| \leq \|x_0 - x_0^*\| \cdot e^{L|t-t_0|}.$$

(Für  $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$  folgt dies sofort aus Lemma 8.2. Überlegen Sie sich, dass man die Gronwall-Ungleichung in der hier angegebenen Form auch für  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$  benutzen kann.)  $\square$

**Folgerung 8.5** *Es seien die Voraussetzungen von Satz 8.18 erfüllt. Sei  $(x_n^*)$  eine Folge von Anfangsbedingungen, die gegen die Anfangsbedingung  $x_0$  konvergiert. Sei  $\varphi_{x_n^*}$  die Lösung des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_n^*$ . Dann konvergiert die Folge  $(\varphi_{x_n^*})$  gleichmäßig gegen  $\varphi_{x_0}$  auf jedem kompakten Intervall  $I_\varepsilon := [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , auf dem alle Lösungen definiert sind. Mit anderen Worten: Es existiert eine Umgebung  $W(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ , so dass die Abbildung*

$$\begin{aligned} \phi : W(x_0) &\longrightarrow (C(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \\ x^* &\longmapsto \varphi_{x^*} \end{aligned}$$

stetig ist.

Die Lösungen hängen also stetig von den Anfangswerten ab.

Wir formulieren noch einen weiteren Satz über die differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten und von Parametern, ohne ihn zu beweisen. Den Beweis findet man z.B. in *Th. Bröcker: Analysis III, Kapitel 1.2*.

**Satz 8.19 (Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangswerten und Parametern)**

Sei  $F : \underbrace{W \times I \times V}_{\text{offen}} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$   $k$ -mal stetig differenzierbar,  $0 < k \leq \infty$ . Wir betrachten das Anfangswert-Problem

$$\begin{aligned} x'(t) &= F(x(t), t, \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_m}_{:= \lambda \text{ Parameter in der DGL}}) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

und dessen eindeutig bestimmte, lokale  $C^1$ -Lösung

$$\varphi_{x_0, \lambda} : I_\varepsilon := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Dann ist  $\varphi_{x_0, \lambda}$   $k$ -mal stetig differenzierbar auf  $I_\varepsilon$  und es existiert eine Umgebung  $\tilde{W}(x_0) \times \tilde{I}(t_0) \times \tilde{V}(\lambda) \subset W \times I \times V$ , so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : \tilde{W}(x_0) \times \tilde{I}(t_0) \times \tilde{V}(\lambda) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x^*, t, \mu) &\longmapsto \varphi_{x^*, \mu}(t) \\ &\quad (\varphi_{x^*, \mu} \text{ Lösung mit } x(t_0) = x^* \text{ und Parameter } \mu) \end{aligned}$$

korrekt definiert und  $k$ -mal stetig differenzierbar ist.

Die Lösung hängt also  $k$ -mal stetig differenzierbar von den Anfangswerten und den Parametern ab.

### 8.3.3 Die Fortsetzbarkeit der Lösung einer Differentialgleichung

In diesem Abschnitt wollen wir den *maximal* möglichen Definitionsbereich der Lösung einer Differentialgleichung untersuchen. Modelliert die Differentialgleichung z.B. ein physikalisches System oder einen Prozess, so fragen wir also nach der Lebensdauer dieses Prozesses oder dieses Systems.

Wir setzen im gesamten Abschnitt voraus, dass  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen lokal Lipschitzstetige Abbildung auf der offenen Menge  $U$  ist. Ist  $(x_0, t_0) \in U$ , so gibt es nach dem lokalen Satz von Picard und Lindelöf eine eindeutige *lokale* Lösung des Anfangswert-Problems

$$x' = F(x, t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Wir betrachten nun die nichtleere Familie

$$\mathcal{F} = \{(a_i, b_i), \varphi_i\}_{i \in \Lambda}$$

bestehend aus allen Paaren der Form

- (1)  $I_i = (a_i, b_i)$  sind Intervalle mit  $t_0 \in (a_i, b_i)$ ,
- (2)  $\varphi_i : (a_i, b_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind  $C^1$ -Abbildungen, die das Anfangswertproblem  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  lösen.

Wir wollen nun Lösungen mit verschiedenen Definitionsbereichen zusammenkleben.

Seien  $(I_i = (a_i, b_i), \varphi_i)$  und  $(I_j = (a_j, b_j), \varphi_j)$  zwei Elemente der Lösungsmenge  $\mathcal{F}$ . Dann sind sowohl  $\varphi_i$  als auch  $\varphi_j$  auf dem offenen Intervall  $I = I_i \cap I_j = (\max(a_i, a_j), \min(b_i, b_j))$  um  $t_0$  definiert und erfüllen  $\varphi_i(t_0) = \varphi_j(t_0) = x_0$ . Da  $F$  stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen ist, stimmen die Lösungen  $\varphi_i$  und  $\varphi_j$  des Anfangswert-Problems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich  $I$  überein (siehe Folgerung 8.4). Wir setzen nun

$$\begin{aligned} a(x_0) &:= \inf\{a_i \mid i \in \Lambda\}, \\ b(x_0) &:= \sup\{b_i \mid i \in \Lambda\}, \end{aligned}$$

und definieren die Funktion

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \varphi_i(t), \quad \text{falls } t \in (a_i, b_i) \end{aligned}$$

Aufgrund des eben gesagten definiert diese Zuordnung eine eindeutige  $C^1$ -Abbildung auf  $(a(x_0), b(x_0))$ . Desweiteren löst  $\varphi_{x_0}$  das Anfangswertproblem  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  auf dem gesamten (und maximal möglichen) Intervall  $(a(x_0), b(x_0))$ . Dies motiviert die folgende Definition und liefert den darauf folgenden Satz.

**Definition 8.13** Die Funktion  $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt die maximale Lösung des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

**Satz 8.20 (Existenz einer eindeutigen maximalen Lösung)**

Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen und  $(x_0, t_0) \in U$ . Dann existiert eine eindeutige maximale Lösung  $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswert-Problems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Folgerung 8.3 gibt bereits eine untere Schranke für die Länge des Intervalls  $(a(x_0), b(x_0))$  an. Wir interessieren uns nun dafür, wie groß der maximale Definitionsbereich  $(a(x_0), b(x_0))$  sein kann, insbesondere, unter welchen Bedingungen er ganz  $\mathbb{R}$  ist.

**Satz 8.21 (Satz über die maximale Lösung)**

Sei  $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen. Sei  $(x_0, t_0) \in U$  und bezeichne  $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Dann gilt:

Ist  $b(x_0) < \infty$ , so existiert zu jeder kompakten Menge  $A \subset U$  eine Zahl  $t_A < b(x_0)$ , so dass

$$(\varphi_{x_0}(t), t) \in U \setminus A \quad \forall t \in [t_A, b(x_0)).$$

Ist  $-\infty < a(x_0)$ , so existiert zu jeder kompakten Menge  $A \subset U$  eine Zahl  $s_A > a(x_0)$ , so dass

$$(\varphi_{x_0}(t), t) \in U \setminus A \quad \forall t \in (a(x_0), s_A].$$

Das heißt, ist  $\varphi_{x_0}$  nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert, so verlässt die Kurve  $(\varphi_{x_0}(t), t)$  jede kompakte Menge nach endlicher Zeit.

**Beweis:** Wir beweisen nur die erste Behauptung. Die 2. geht analog.

Sei also  $b(x_0) < \infty$ . Wir führen einen indirekten Beweis. Angenommen, es existiert eine kompakte Menge  $A \subset U$  und eine Folge  $(t_n)$ , die von unten gegen  $b(x_0)$  konvergiert, mit  $(\varphi_{x_0}(t_n), t_n) \in A$ . Da  $A$  kompakt ist, ist  $A$  auch folgenkompakt. OBdA können wir voraussetzen, dass  $(\varphi_{x_0}(t_n), t_n)$  gegen  $(x^*, b(x_0)) \in A$  konvergiert (ansonsten gehen wir zu einer Teilfolge über). Da  $U$  offen ist, können wir  $\varepsilon, \delta > 0$  so wählen, dass

$$\text{cl}(K(x^*, \varepsilon)) \times [b(x_0) - \delta, b(x_0) + \delta] \subset U.$$

Wir betrachten

$$M := \max\{\|F(x, t)\| \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon, |t - b(x_0)| \leq \delta\}.$$

Da  $(\varphi_{x_0}(t_n), t_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} (x^*, b(x_0))$ , gilt für hinreichend große  $n$

$$K\left(\varphi_{x_0}(t_n), \frac{\varepsilon}{2}\right) \times \left[t_n - \frac{\delta}{2}, t_n + \frac{\delta}{2}\right] \subset K(x^*, \varepsilon) \times [b(x_0) - \delta, b(x_0) + \delta].$$

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf ist die eindeutige Lösung von

$$\left. \begin{aligned} x' &= F(x, t) \\ x(t_n) &= \varphi_{x_0}(t_n) =: x_n \end{aligned} \right\} \quad (8.43)$$

zumindest auf dem Intervall

$$I_n := \left[ t_n - \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}\right), t_n + \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}\right) \right]$$

definiert. Da aber  $\varphi_{x_0}$  das Problem (8.43) löst, ist  $\varphi_{x_0}$  mindestens auf  $I_n$  definiert ist. Liegt nun  $t_n$  hinreichend nahe an  $b(x_0)$ , so ist  $t_n + \min(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{2M}) > b(x_0)$ . Damit hätten wir die maximale Lösung  $\varphi_{x_0}$  aber über den Punkt  $b(x_0)$  hinaus fortgesetzt, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.  $\square$

Als Spezialfall betrachten wir Differentialgleichungen auf einem Streifengebiet der Form  $U := \mathbb{R}^n \times (a, b) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , wobei  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ .

**Satz 8.22** Sei  $F : \mathbb{R}^n \times (a, b) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen und  $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

1. Ist  $b(x_0) < b$ , so gilt  $\lim_{t \rightarrow b(x_0)^-} \|\varphi_{x_0}(t)\| = \infty$ .
2. Ist  $a(x_0) > a$ , so gilt  $\lim_{t \rightarrow a(x_0)^+} \|\varphi_{x_0}(t)\| = \infty$ .

**Beweis:** Nach Satz 8.21 verläßt die Kurve  $(\varphi_{x_0}(t), t)$  jede kompakte Menge der Form  $cl(K(0, R)) \times [a(x_0), b(x_0)]$ . Da die  $t$ -Koordinate immer in  $[a(x_0), b(x_0)]$  bleibt, verläßt also die Kurve  $\varphi_{x_0}(t)$  jede Kugel um  $x_0$ . Die Norm  $\|\varphi_{x_0}(t)\|$  konvergiert somit gegen  $+\infty$ .  $\square$

**Satz 8.23** Sei  $F : \mathbb{R}^n \times (a, b) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und Lipschitzstetig bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Variablen auf jeder Menge vom Typ  $\mathbb{R}^n \times I$ , wobei  $I \subset (a, b)$  ein kompaktes Intervall bezeichnet. Dann ist jede maximale Lösung des Anfangswert-Problems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  auf dem Intervall  $(a, b)$  definiert.

**Beweis:** Sei  $\varphi_{x_0} : (a(x_0), b(x_0)) \subset (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die maximale Lösung des Anfangswertproblems  $x' = F(x, t)$ ,  $x(t_0) = x_0$ .

Angenommen  $b(x_0) < b$ . Nach Satz 8.22 gilt  $\lim_{t \rightarrow b(x_0)^-} \|\varphi_{x_0}(t)\| = +\infty$ . Wir schätzen nun die Lösung  $\varphi_{x_0}$  auf  $[t_0, b(x_0))$  nach oben ab.

Sei  $L$  die Lipschitzkonstante von  $F$  bzgl. der  $\mathbb{R}^n$ -Komponente auf der kompakten Menge  $\mathbb{R}^n \times [t_0, b(x_0)] \subset \mathbb{R}^n \times (a, b)$ . Dann gilt für alle  $t \in [t_0, b(x_0)]$

$$\|F(\varphi_{x_0}(t), t) - F(0, t)\| \leq L \cdot \|\varphi_{x_0}(t)\|$$

und folglich

$$\|F(\varphi_{x_0}(t), t)\| \leq \underbrace{\sup_{t \in [t_0, b(x_0)]} \|F(0, t)\|}_{=: C_1} + L \cdot \|\varphi_{x_0}(t)\| = C_1 + L \cdot \|\varphi_{x_0}(t)\|. \quad (8.44)$$

Desweiteren gilt für  $t \in [t_0, b(x_0))$

$$\varphi_{x_0}(t) = \varphi_{x_0}(t_0) + \int_{t_0}^t F(\varphi_{x_0}(s), s) ds = x_0 + \int_{t_0}^t F(\varphi_{x_0}(s), s) ds.$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\|\varphi_{x_0}(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t \|F(\varphi_{x_0}(s), s)\| ds \stackrel{(8.44)}{\leq} \|x_0\| + C_1(b(x_0) - t_0) + \int_{t_0}^t L \|\varphi_{x_0}(s)\| ds.$$

Mit der Gronwall–Ungleichung erhält man daraus

$$\|\varphi_{x_0}(t)\| \leq (\|x_0\| + C_1(b(x_0) - t_0)) \cdot e^{\int_{t_0}^t L ds} = (\|x_0\| + C_1(b(x_0) - t_0)) \cdot e^{L(b(x_0) - t_0)}$$

für alle  $t \in [t_0, b(x_0)]$ . Damit wäre  $\varphi_{x_0}$  aber auf  $[t_0, b(x_0))$  beschränkt und die notwendige Bedingung  $\lim_{t \rightarrow b(x_0)^-} \|\varphi_{x_0}(t)\| = +\infty$  kann nicht gelten. Folglich ist  $b(x_0) = b$ . Analog zeigt man, dass  $a(x_0) = a$ .  $\square$

Als Anwendung betrachten wir den maximalen Definitionsbereich der Integralkurven von Vektorfeldern. Wir erinnern nochmal an die Definition der Integralkurven:

Sei  $X : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld auf einer offenen Menge  $W \subset \mathbb{R}^n$ . Eine  $C^1$ -Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow W$  heißt Integralkurve von  $X$ , wenn  $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$  für alle  $t \in I$ . Die Integralkurven sind also Lösungen einer autonomen Differentialgleichung 1. Ordnung und wir können alles oben gesagte für die Funktion

$$F : U := W \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit  $F(x, t) := X(x)$  anwenden.

**Definition 8.14** Ein stetiges Vektorfeld  $X : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt vollständig, wenn alle seine maximalen Integralkurven auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind.

**Satz 8.24**

Sei  $X : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein  $C^1$ -Vektorfeld mit kompaktem Träger

$$\text{supp } X := \text{cl } \{x \in W \mid X(x) \neq 0\} \subset W.$$

Dann ist das Vektorfeld  $X$  vollständig.

**Beweis:** Da  $X$  stetig differenzierbar ist, ist  $X$  lokal Lipschitzstetig auf  $W$ . Folglich existiert durch jeden Punkt  $x_0 \in W$  genau eine maximale Integralkurve  $\gamma_{x_0}$  von  $X$  mit  $\gamma_{x_0}(t_0) = x_0$ . Ist  $X(x_0) = 0$ , so ist die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte konstante Kurve  $\gamma_{x_0}(t) \equiv x_0$  offensichtlich die maximale Integralkurve durch  $x_0$ .

Sei nun  $X(x_0) \neq 0$ . Angenommen  $b(x_0) < +\infty$ . Die Kurve  $(\gamma_{x_0}(t), t)$  verbleibt für  $t \in [t_0, b(x_0))$  in der kompakten Menge  $\text{supp } X \times [t_0, b(x_0)]$ . Denn läge der Punkt  $(\gamma_{x_0}(t_1), t_1)$  für ein  $t_1 \in [t_0, b(x_0))$  außerhalb dieser Menge, wäre  $X(\gamma_{x_0}(t_1))$  der Nullvektor. Somit wäre die Kurve  $\gamma_{x_0}$  konstant gleich dem Vektor  $\gamma_{x_0}(t_1)$ , insbesondere bis  $+\infty$  definiert. Die Kurve  $(\gamma_{x_0}(t), t)$  verbleibt für  $t \in [t_0, b(x_0))$  also tatsächlich in der kompakten Menge  $\text{supp } X \times [t_0, b(x_0)]$ , was aber Satz 8.21 widerspricht.

Analog behandeln wir den Fall  $-\infty < a(x_0)$ .  $\square$

Weitere Beispiele und Spezialfälle finden Sie in den Übungsaufgaben.

## 8.4 Lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^n$

### 8.4.1 Die allgemeine Struktur des Lösungsraumes einer linearen Differentialgleichung im $\mathbb{R}^n$

In Kapitel 8.2 haben wir lineare Differentialgleichungen im  $\mathbb{R}^1$  gelöst. In diesem Kapitel verallgemeinern wir dies und behandeln lineare Differentialgleichungen im  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Mit  $\mathbb{R}^{n \times n}$  bezeichnen wir den Vektorraum der reellen  $n \times n$ -Matrizen. In diesem Abschnitt sei  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  ein Intervall mit  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  und

$$\begin{aligned} A &: I \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ B &: I \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

stetige Abbildungen. Dann heißt

$$\begin{aligned} x' &= A(t)x && \text{homogene, lineare DGL im } \mathbb{R}^n \text{ („DGL-System“),} \\ x' &= A(t)x + B(t) && \text{inhomogene, lineare DGL im } \mathbb{R}^n \text{ mit Störfunktion } B(t). \end{aligned}$$

Ausgeschrieben sieht eine lineare Differentialgleichung im  $\mathbb{R}^n$  also folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= A_{11}(t) \cdot x_1(t) + \dots + A_{1n}(t) \cdot x_n(t) + B_1(t) \\ x'_2(t) &= A_{21}(t) \cdot x_1(t) + \dots + A_{2n}(t) \cdot x_n(t) + B_2(t) \\ &\vdots && \vdots && \vdots && \vdots \\ x'_n(t) &= A_{n1}(t) \cdot x_1(t) + \dots + A_{nn}(t) \cdot x_n(t) + B_n(t), \end{aligned}$$

wobei  $A(t) = (A_{ij}(t))$  und  $B(t) = (B_i(t))$ .

Die qualitativen Aussagen über Differentialgleichungen aus dem letzten Abschnitt liefern uns nun für die linearen Differentialgleichungen das folgende Resultat:

**Satz 8.25** Sei  $t_0 \in (a, b)$ . Dann existiert genau eine maximale Lösung der linearen Differentialgleichung  $x' = A(t)x + B(t)$  mit der Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$ . Diese maximale Lösung ist auf dem gesamten Intervall  $(a, b)$  definiert.

**Beweis:** Die rechte Seite der linearen Differentialgleichung ist gegeben durch

$$F(x, t) = A(t)x + B(t).$$

Die Abbildung  $F : \mathbb{R}^n \times (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$  ist offensichtlich stetig. Da die Matrizen  $A(t)$  linear auf dem  $\mathbb{R}^n$  wirken, erhalten wir

$$\|F(x, t) - F(y, t)\| = \|A(t)(x - y)\| \leq \|A(t)\| \cdot \|x - y\|,$$

wobei die Norm einer Matrix  $L = (L_{ij})$  durch  $\|L\|^2 = \sum_{i,j=1}^n L_{ij}^2$  gegeben ist. Sei nun  $I \subset (a, b)$  ein kompaktes Intervall. Da die Abbildung  $A$  stetig ist, existiert das Maximum  $L(I) := \max_{t \in I} \|A(t)\|$  und wir erhalten

$$\|F(x, t) - F(y, t)\| \leq L(I) \|x - y\|$$

für alle  $(x, t), (y, t) \in \mathbb{R}^n \times I$ . Die Abbildung  $F$  ist also Lipschitzstetig auf jeder Menge der Form  $\mathbb{R}^n \times I$ , wobei  $I \subset (a, b)$  ein kompaktes Intervall ist. Damit existiert nach Satz 8.20

<sup>2</sup>In diesem Abschnitt betrachten wir die Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  als Spaltenvektoren

eine eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswert-Problems und nach Satz 8.23 ist diese auf dem gesamten Intervall  $(a, b)$  definiert.  $\square$

Für die Struktur des Lösungsraumes einer linearen Differentialgleichung erhalten wir

**Satz 8.26** Die Menge der maximalen Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung im  $\mathbb{R}^n$

$$x' = A(t)x \quad (*)$$

ist ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V^n$ . Die Menge der maximalen Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung im  $\mathbb{R}^n$

$$x' = A(t)x + B(t) \quad (**)$$

ist der affine Raum

$$\mathcal{A} = x_s + V^n,$$

wobei  $x_s$  eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $(**)$  bezeichnet.

**Beweis:** Sei  $V := \{x \in C^1((a, b), \mathbb{R}^n) \mid x' = A(t)x\}$  der Lösungsraum der homogenen linearen DGL  $(*)$ .  $V$  ist ein reeller Vektorraum, denn wegen der Linearität der DGL erhält man mit zwei Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  von  $(*)$  und zwei reellen Zahlen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , dass auch  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$  Lösung von  $(*)$  ist. Wir zeigen, dass  $V$  die Dimension  $n$  hat. Sei  $t_0 \in (a, b)$  fixiert. Zu  $r_0 \in \mathbb{R}^n$  existiert genau eine Lösung  $\varphi_{r_0}$  von  $(*)$  mit  $\varphi_{r_0}(t_0) = r_0$ . Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\phi : r_0 \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_{r_0} \in V.$$

$\phi$  ist surjektiv, da  $\phi(x(t_0)) = x$  für alle  $x \in V$  gilt.  $\phi$  ist injektiv, da mit  $\varphi_{r_0} = 0$  auch  $r_0 = \varphi_{r_0}(t_0) = 0$  gilt. Also ist  $\phi$  ein linearer Isomorphismus und damit  $\dim V = n$ .

Sei nun  $\mathcal{A} := \{x \in C^1((a, b), \mathbb{R}^n) \mid x' = A(t)x + B(t)\}$  der Lösungsraum der inhomogenen linearen DGL  $(**)$ . Wir wissen, dass eine spezielle Lösung  $x_s$  der inhomogenen linearen DGL  $(**)$  existiert. Ausserdem gilt für jede andere Lösung  $x \in \mathcal{A}$ , dass  $x - x_s \in V$  und für jede Lösung  $y \in V$ , dass  $x_s + y \in \mathcal{A}$ . Somit ist  $\mathcal{A} = x_s + V^n$ .  $\square$

**Definition 8.15**  $n$  linear unabhängige Lösungen  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  der homogenen linearen DGL  $x' = A(t)x$  nennt man *Fundamentalsystem* der homogenen DGL  $x' = A(t)x$ . Die Matrix

$$Z = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

aus den Spaltenvektoren  $\varphi_j$  heißt *Fundamentalmatrix* von  $x' = A(t)x$ .

**Folgerung 8.6** Sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Fundamentalsystem und  $Z = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  die zugehörige Fundamentalmatrix der homogenen linearen DGL  $x' = A(t)x$ . Sei desweiteren  $x_s$  eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL

$$x' = A(t)x + B(t). \quad (8.45)$$

Dann lässt sich jede Lösung von (8.45) in der Form

$$x(t) = x_s(t) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) = x_s(t) + Z(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

darstellen, wobei  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$  und  $t \in (a, b)$ .

Wir erinnern an eine Definition aus der Linearen Algebra.

**Definition 8.16** Seien  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  und  $(a_1 \dots a_n)$  die Matrix mit den Spaltenvektoren  $a_i$ . Dann heißt

$$W(a_1, \dots, a_n) := \det(a_1 \dots a_n)$$

die Wronski-Determinante von  $a_1, \dots, a_n$ .

Die Wronski-Determinante zeigt uns an, ob die Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  linear unabhängig sind. Genau in diesem Fall ist nämlich  $W(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ .

**Satz 8.27 (Satz von Liouville)** Sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Fundamentalsystem von  $x' = A(t)x$  und  $W(t) := W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ . Ist  $t_0 \in (a, b)$  fixiert, so gilt

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds}.$$

**Beweis:** Es gilt

$$\varphi_j(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1j}(t) \\ \vdots \\ \varphi_{nj}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Für die Ableitung von  $W(t)$  erhalten wir dann mittels der Produktregel

$$W'(t) = \sum_{k=1}^n \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_{k-1}(t), \varphi'_k(t), \varphi_{k+1}(t), \dots, \varphi_n(t)). \quad (8.46)$$

Sei  $C$  eine konstante Matrix mit  $\det C \neq 0$  und

$$\psi_k(t) := \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) C_{ik}, \quad \text{d.h. als Matrixgleichung} \quad (\psi_1, \dots, \psi_n) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot C.$$

Für die Ableitung gilt dann

$$\psi'_k = \sum_{i=1}^n \varphi'_i C_{ik} = \sum_{i=1}^n A \underbrace{\varphi_i C_{ik}}_{=\psi_k}.$$

$(\psi_1, \dots, \psi_n)$  ist ebenfalls ein Fundamentalsystem der homogenen DGL  $x' = A(t)x$ , denn es ist  $\det(\psi_1, \dots, \psi_n) = \det(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \cdot \det C \neq 0$ .

Wir fixieren nun ein  $\tau \in (a, b)$ . Aus dem Beweis von Satz 8.26 folgt, dass die Vektoren  $\varphi_1(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)$  für jeden Parameter  $\tau \in (a, b)$  linear unabhängig sind. Wir setzen  $C := (\varphi_1(\tau) \dots \varphi_n(\tau))^{-1}$ . Damit ist  $(\psi_1(\tau) \dots \psi_n(\tau))$  gleich der Einheitsmatrix  $E$ . Dann folgt aus (8.46)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\det(\psi_1(t) \dots \psi_n(t)))|_{t=\tau} &= \sum_{k=1}^n \det(e_1 \dots e_{k-1} \psi'_k(\tau) e_{k+1} \dots e_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \overset{\text{k-te Spalte}}{\downarrow} A_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & A_{k-1k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{k+1k} & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & A_{nk} & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \text{Tr } A(\tau) \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{=A_{kk}} \end{aligned}$$

Da  $(\varphi_1(t) \dots \varphi_n(t)) = (\psi_1(t) \dots \psi_n(t)) \cdot C^{-1}$  für alle  $t \in (a, b)$ , gilt

$$\begin{aligned} W'(\tau) &= \frac{d}{dt} \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))|_{t=\tau} \\ &= \frac{d}{dt} \det(\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))|_{t=\tau} \cdot \det C^{-1} \\ &= \text{Tr } A(\tau) \cdot W(\tau). \end{aligned}$$

Dies ist aber eine lineare homogene DGL im  $\mathbb{R}^1$  mit der Lösung

$$W(t) = W(t_0) \cdot e^{\int_{t_0}^t \text{Tr}(A(s)) ds}.$$

□

Wir geben nun an, wie man eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $x' = A(t)x + B(t)$  aus einem Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen DGL erhält. Wie im 1-dimensionalen Fall macht man dazu eine Variation der Konstanten.

**Satz 8.28** Sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  ein Fundamentalsystem der homogenen DGL  $x' = A(t)x$ . Dann erhält man eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL  $x' = A(t)x + B(t)$  durch

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{W_k(\varphi_1(s), \dots, B(s), \dots, \varphi_n(s))}{W(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s))} ds,$$

wobei  $W_k(\varphi_1(s), \dots, B(s), \dots, \varphi_n(s))$  die Wronski-Determinante der Matrix ist, die entsteht, wenn man die  $k$ -te Spalte der Fundamentalmatrix  $Z(s) = (\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s))$  durch den Vektor  $B(s)$  ersetzt. Die Lösung  $x_s$  erfüllt die Anfangsbedingung  $x_s(t_0) = 0$ .

**Beweis** (durch Variation der Konstanten:)

Wir setzen

$$y(t) := \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \cdot c_k(t) \tag{8.47}$$

und bestimmen die Funktionen  $c_k(t)$  so, dass  $y(t)$  die inhomogene DGL  $x' = A(t)x + B(t)$  löst. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} A(t)y(t) + B(t) &= y'(t) = \sum_{k=1}^n (\varphi_k' \cdot c_k + \varphi_k \cdot c_k') \\ &= \sum_{k=1}^n A(t) \cdot \underbrace{\varphi_k \cdot c_k}_{=y(t)} + \varphi_k(t) c_k'(t) \end{aligned}$$

also, wenn

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \cdot c_k'(t) = B(t).$$

Dieses inhomogene lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung  $(c_1'(t), \dots, c_n'(t))$  für jedes  $t \in (a, b)$ , da  $W(t) = \det(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \neq 0$  für alle  $t \in (a, b)$ . Nach der Cramerschen Regel kann man diese Lösung berechnen durch

$$c_k'(t) = \frac{W_k(\varphi_1(t), \dots, B(t), \dots, \varphi_n(t))}{W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))}.$$

Integriert man dies von  $t_0$  bis  $t$ , so folgt aus (8.47), dass

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{W_k(\varphi_1(s), \dots, B(s), \dots, \varphi_n(s))}{W(\varphi_1(s), \dots, \varphi_n(s))} ds$$

die inhomogene DGL löst. (Die Differenz von  $y(t)$  und  $x_s(t)$  ist eine Lösung der homogenen DGL).  $\square$

Eine andere Formel für eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL finden Sie in den Übungsaufgaben: Ist  $Z(t)$  eine Fundamentalmatrix der homogenen linearen DGL  $x' = A(t)x$ , so ist

$$y_s(t) = Z(t) \left( Z(t_0)^{-1}x_0 + \int_{t_0}^t Z(s)^{-1}B(s) ds \right)$$

die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen linearen DGL  $x' = A(t)x + B(t)$  mit der Anfangsbedingung  $y_s(t_0) = x_0$ .

**Bemerkung:**

1. Die Sätze aus diesem Abschnitt gelten auch für DGL in  $\mathbb{C}^n$ .  
In diesem Fall ist  $A : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  eine stetige Abbildung in die komplexen  $(n \times n)$ -Matrizen und  $B : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine stetige Abbildung in den Vektorraum  $\mathbb{C}^n$ . Wir suchen dann  $C^1$ -Lösungen  $z : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit

$$z'(t) = A(t)z(t) + B(t).$$

2. Um lineare DGL'en zu lösen, muß man Fundamentalsysteme für die homogene, lineare DGL finden.
  - Für  $n = 1$  ist dies einfach und aus Kapitel 8.2 bekannt.
  - Für  $n > 1$  gibt es dafür kein allgemeines Verfahren. Fundamentalsysteme sind nicht immer durch elementare Funktionen auszudrücken, man benutzt dann numerische Methoden. Im *Spezialfall* von konstanten Matrizen  $A(t) \equiv A$  existiert aber ein Verfahren, um das Fundamentalsystem explizit zu bestimmen. Man benutzt dazu die Jordansche Normalform der Matrix  $A$ .

Im nächsten Abschnitt behandeln wir dieses Lösungsverfahren im Fall einer konstanten Matrix  $A(t) \equiv A$ .

### 8.4.2 Homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt bezeichnet  $\mathbb{K}$  die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  und  $\|\cdot\|$  eine Norm auf dem Vektorraum  $\mathbb{K}^n$ . Wir betrachten auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{K}^{n \times n}$  der  $(n \times n)$ -Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{K}$  die folgende Matrix-Norm:

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \right\} \quad \text{wobei } A \in \mathbb{K}^{n \times n}.$$

Da  $\mathbb{K}^{n \times n}$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, ist  $(\mathbb{K}^{n \times n}, \|\cdot\|)$  ein Banachraum (siehe Analysis I\*, Kapitel 2). Darüber hinaus hat die Matrix-Norm die folgenden Eigenschaften:

**Satz 8.29** *Seien  $A$  und  $B$  zwei Matrizen aus  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Dann gilt:*

1.  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{K}^n.$
2.  $\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$

**Beweis:** Die 1. Ungleichung  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$  folgt direkt aus der Definition von  $\|A\|$ . Desweiteren gilt

$$\|A \circ B\| = \sup \left\{ \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \mid x \neq 0 \right\} \stackrel{1.}{\leq} \sup \left\{ \|A\| \cdot \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \mid x \neq 0 \right\} = \|A\| \cdot \|B\|.$$

□

**Bemerkung:** Sei  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  eine Algebra mit einer vollständigen Norm, die die Eigenschaft

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

erfüllt. Dann nennt man  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  *Banachalgebra*. Viele der Aussagen im kommenden Abschnitt gelten in jeder Banachalgebra.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Exponential von Matrizen. Sei  $A$  eine Matrix in  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Dann ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$  auch  $A^k \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .  $A^0$  bezeichne die Einheitsmatrix  $E_n$ . Wir betrachten die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  in  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Nach Satz 8.29 gilt

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$  konvergiert in  $\mathbb{R}$  gegen  $e^{\|A\|}$ . Aus dem Majorantenkriterium für Reihen (siehe Analysis I\*, Kapitel 3) folgt daraus die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  in  $\mathbb{K}^{n \times n}$  und

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq e^{\|A\|}.$$

**Definition 8.17** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Die Matrix  $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  heißt *Exponential* von  $A$ .

**Satz 8.30** Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{K}^{n \times n} \\ t &\longmapsto e^{tA} \end{aligned}$$

ist differenzierbar und die einzige Lösung der folgenden Differentialgleichung in  $\mathbb{K}^{n \times n}$ :

$$X'(t) = A \circ X(t), \quad X(0) = E_n,$$

**Beweis:** 1.) Zum Nachweis der Differenzierbarkeit von  $f$  benutzen wir das Differenzierbarkeits-Kriterium für Funktionenreihen. Sei  $f_k(t) := \frac{t^k A^k}{k!}$ .

- $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  ist differenzierbar für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$ .
- $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(0) = E_n$  konvergiert.
- $f'_k(t) = \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!}$ , und die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f'_k(t)$  konvergiert gleichmäßig auf jeder Kugel  $K(0, R)$ , denn  $\|A\|e^{R\|A\|}$  ist eine konvergente Majorante.

Aus den Eigenschaften für Funktionenreihen (siehe Analysis II) folgt damit, dass die Reihe  $f(t) = \sum_{k=0}^n f_k(t)$  differenzierbar ist, und für die Ableitung gilt

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A \circ \frac{t^{k-1} A^{k-1}}{(k-1)!} = A \circ e^{tA}.$$

Diese Gleichheit hat man zunächst auf  $K(0, R)$ , und dann läßt man  $R$  gegen  $\infty$  laufen.

2.) Die Differentialgleichung  $X'(t) = A \circ X(t)$  ist eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung im Vektorraum  $\mathbb{K}^{n^2}$ . Dabei gilt für  $F : X \in \mathbb{K}^{n^2} \rightarrow A \circ X \in \mathbb{K}^{n^2}$

$$\|F(X) - F(Y)\| \leq \|A \circ (X - Y)\| \leq \|A\| \cdot \|X - Y\|,$$

d.h.  $F$  ist Lipschitzstetig auf  $\mathbb{K}^{n^2}$ . Folglich ist die maximale Lösung des Anfangswert-Problems  $X'(t) = A \circ X(t)$ ,  $X(0) = E_n$  nach dem Satz von Picard/Lindelöf eindeutig bestimmt.  $\square$

### Satz 8.31 (Eigenschaften des Exponentials von Matrizen)

Seien  $A, B$  und  $X$  Matrizen aus  $\mathbb{K}^{n \times n}$ . Dann gilt:

1.  $e^0 = E_n$ .
2.  $e^A$  ist invertierbar und es gilt  $(e^A)^{-1} = e^{-A}$ .
3. Sind  $A$  und  $B$  kommutativ, d.h. ist  $AB = BA$ , so gilt  $e^{A+B} = e^A \circ e^B = e^B \circ e^A$ .
4.  $e^{XAX^{-1}} = X e^A X^{-1}$  für alle invertierbaren Matrizen  $X$ .
5.  $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$ .

**Beweis:** Die 1. Behauptung folgt direkt aus der Definition. Wir beweisen als nächstes die 3. Eigenschaft. Dazu betrachten wir die Abbildung  $X(t) := e^{tA} \circ e^{tB}$ . Dann gilt  $X(0) = E_n$  und für die Ableitung folgt nach Satz 8.30

$$\begin{aligned} X'(t) &= e^{tA} \circ B \circ e^{tB} + A \circ e^{tA} \circ e^{tB} \\ &= B \circ e^{tA} \circ e^{tB} + A \circ e^{tA} \circ e^{tB} \quad (\text{da } A^k \circ B = B \circ A^k) \\ &= (A + B)X(t) \end{aligned}$$

Das hat wiederum nach Satz 8.30 zur Folge, dass  $X(t) = e^{t(A+B)}$ . Das ergibt aber für  $t = 1$  die Gleichung  $e^A \circ e^B = e^{A+B}$ .

Setzen wir nun  $B = -A$ , so folgt aus der 1. und 3. die 2. Behauptung:

$$e^A \circ e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = E_n = e^{-A} \circ e^A.$$

Sei  $X$  eine invertierbare Matrix. Dann folgt aus der Definition von  $e^A$

$$\begin{aligned} X e^A X^{-1} &= \lim_{N \rightarrow \infty} X \left( \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} \right) X^{-1} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{X A^k X^{-1}}{k!} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{(X A X^{-1})^k}{k!} = e^{X A X^{-1}}. \end{aligned}$$

Zum Beweis der 5. Eigenschaft benutzen wir die Jordansche Normalform von  $A$ . Wir wissen (siehe Vorlesung über lineare Algebra oder Algebra 1), dass man der Matrix  $A$  durch Konjugation mit einer invertierbaren komplexen Matrix  $X$  ihre Jordansche Normalform  $J(A)$  zuordnen kann:  $J(A) = X^{-1} \circ A \circ X$ . Beim Konjugieren bleiben die Spur und die Determinante einer Matrix unverändert, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} A &= \operatorname{Tr} J(A) \\ \det e^A &= \det \left( e^{X \circ J(A) \circ X^{-1}} \right) = \det \left( X \circ e^{J(A)} \circ X^{-1} \right) = \det e^{J(A)}. \end{aligned}$$

Eine solche Jordansche Normalform  $J(A)$  hat nur Einträge auf der Diagonale und der oberen Nebendiagonale. Auf der Diagonale stehen dabei die (komplexen) Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des charakteristischen Polynoms von  $A$ . Man sieht leicht durch Ausrechnen (Übungsaufgabe), dass  $e^{J(A)}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, auf deren Diagonale die Zahlen  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$  stehen. Folglich gilt:

$$e^{\operatorname{Tr} A} = e^{\operatorname{Tr} J(A)} = e^{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = \prod_{j=1}^n e^{\lambda_j} = \det e^{J(A)} = \det e^A.$$

□

### Anwendung des Matrizenexponential auf die Lösung von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten jetzt wieder die lineare homogene Differentialgleichung im  $\mathbb{K}^n$ :  $x' = Ax$ , wobei  $A = (a_{ij})$  eine konstante  $n \times n$ -Matrix ist. Ausgeschrieben lautet diese DGL

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ x'_2(t) &= a_{21}x_1(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ x'_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t). \end{aligned}$$

Dann gilt

**Satz 8.32** Die eindeutig bestimmte maximale Lösung des Anfangswertproblems  $x' = Ax$ ,  $x(t_0) = x_0$  ist gegeben durch die Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^n$  mit

$$\varphi(t) := e^{(t-t_0)A} x_0.$$

Die allgemeine Lösung von  $x' = Ax$  ist

$$\varphi_{(c_1, \dots, c_n)}(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

wobei die  $c_i \in \mathbb{K}$  beliebige Konstanten sind.

**Beweis:** Wir wissen, dass genau eine maximale Lösung des Anfangswertproblems auf  $\mathbb{R}$  existiert. Damit genügt es zu zeigen, dass  $\varphi_{x_0}(t) = e^{(t-t_0)A} x_0$  eine Lösung ist. Nach Satz 8.31 gilt

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0}(t) &= e^{tA} \underbrace{e^{-t_0A} x_0}_{=const} \\ \stackrel{\text{Satz 8.30}}{\implies} \varphi'_{x_0}(t) &= A \circ \underbrace{e^{tA} \circ e^{-t_0A} x_0}_{=e^{(t-t_0)A} x_0} = A \circ \varphi_{x_0}(t). \end{aligned}$$

Außerdem ist  $\varphi_{x_0}(t_0) = e^{0 \cdot A} x_0 = e^0 x_0 = E_n x_0 = x_0$ .

Die allgemeine Lösung erhält man für  $t_0 = 0$  und  $c = (c_1, \dots, c_n) = x_0$  als Anfangswert.  $\square$

**Folgerung 8.7** Ist  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  eine Basis in  $\mathbb{K}^n$ , so bilden die Funktionen

$$\varphi_1(t) := e^{tA} a_1, \varphi_2(t) := e^{tA} a_2, \dots, \varphi_n(t) := e^{tA} a_n$$

ein Fundamentalsystem für die DGL  $x' = Ax$ .  $\square$

Die Aufgaben besteht nun darin, eine Basis  $(a_1, \dots, a_n)$  zu suchen, für die die Funktionen  $\varphi_j(t) = e^{tA} a_j$  eine möglichst einfache Gestalt haben. Dies ist die Jordan-Basis, die die Jordansche Normalform von  $A$  liefert. Wir werden im folgenden die nötigen Begriffe aus der Algebra nochmal zusammenfassen.

### Einschub: Die Jordansche Normalform komplexer Matrizen

Sei  $A$  eine komplexe  $n \times n$ -Matrix und  $E_n$  die Einheitsmatrix.

- $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt Eigenwert von  $A$ , falls der Eigenunterraum von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$

$$E_\lambda(A) := \ker(A - \lambda E_n) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

ungleich  $\{0\}$  ist.

- $g_\lambda := \dim E_\lambda(A)$  heißt geometrische Vielfachheit von  $\lambda$ .
- Das Polynom  $\chi_A \in \mathbb{C}[z]$  definiert durch

$$\chi_A(z) := \det(A - zE_n)$$

heißt charakteristisches Polynom von  $A$ .

$\lambda \in \mathbb{C}$  ist ein Eigenwert von  $A$  genau dann, wenn  $\chi_A(\lambda) = 0$ .

Dann gilt der

**Hauptsatz der Algebra:** Jedes charakteristische Polynom zerlegt sich in Linearfaktoren.

Sei nun

$$\begin{aligned} m_\lambda &= \text{Zahl der Linearfaktoren } (z - \lambda) \text{ in der Linearfaktorzerlegung von } \chi_A(z) \\ &= \underline{\text{algebraische Vielfachheit von } \lambda}. \end{aligned}$$

Weiterhin definiert man

$$H_\lambda(A) := \ker(A - \lambda E_n)^{m_\lambda} \text{ den } \underline{\text{Hauptraum}} \text{ von } A \text{ zum Eigenwert } \lambda.$$

Dann gelten die folgenden Eigenschaften

- $\dim H_\lambda(A) = m_\lambda$ ,
- $1 \leq g_\lambda \leq m_\lambda \leq n$ ,
- $H_\lambda(A)$  ist ein  $A$ -invarianter Unterraum, d.h.  $A(H_\lambda(A)) \subset H_\lambda(A)$ .



### Verfahren zur Bestimmung der Jordanschen Normalform:

Wichtig dafür sind die Eigenwerte und die Jordanketten dazu.

1. Bestimme die Eigenwerte von  $A$ , d.h die Nullstellen von  $\chi_A$ . Seien dies  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ .
2. Bestimme die Haupträume zu jedem Eigenwert  $\lambda = \lambda_i$ :

$$H_\lambda(A) = \ker(A - \lambda E_n)^{m_\lambda}.$$

3. Betrachte die „Flagge“ von Unterräumen, definiert durch  $\varphi = A - \lambda E_n$  im Hauptraum  $H_\lambda(A)$ :

$$0 \subset V_1 := \ker \varphi \subset V_2 := \ker \varphi^2 \subset \dots \subset V_r := \ker \varphi^r,$$

wobei  $r := \min\{i \mid \ker \varphi^i = H_\lambda(A)\}$ . Dann ist

$$H_\lambda(A) = V_r \supset V_{r-1}.$$

4. Fixiere ein Komplement von  $V_{r-1}$  in  $V_r$

$$V_r = W_r \oplus V_{r-1},$$

und bestimme eine Basis  $w_{r1}, \dots, w_{rs}$  von  $W_r$ . Dann sind  $\varphi(w_{r1}), \dots, \varphi(w_{rs})$  linear unabhängig und in  $V_{r-1}$ .

5. Zerlege  $V_{r-1} = W_{r-1} \oplus V_{r-2}$ , wobei  $W_{r-1}$  eine Basis in der Form

$$w_{r-1,1} = \varphi(w_{r1}), \dots, w_{r-1,s} = \varphi(w_{rs}), w_{r-1,s+1}, \dots, w_{r-1,\rho}$$

hat.

Und so verfahren wir weiter, d.h. wir zerlegen in jedem Schritt

$$V_j = W_j \oplus V_{j-1},$$

und bestimmen eine Basis in  $W_j$ , deren erste Vektoren durch Anwendung von  $\varphi$  auf die Basis von  $W_{j+1}$  entstehen.

$$H_\lambda(A) = \underbrace{W_r \oplus W_{r-1} \oplus W_{r-2} \oplus \dots \oplus \underbrace{W_2 \oplus \overset{\text{Eigenunterraum}}{\downarrow} V_1}_{=V_2}}_{=V_{r-2}}.$$

#### Beispiel: r=4

$W_4$	$w_{41}$	$w_{42}$					
$W_3$	$\varphi(w_{41})$	$\varphi(w_{42})$	$w_{33}$	$w_{34}$			
$W_2$	$\varphi^2(w_{41})$	$\varphi^2(w_{42})$	$\varphi(w_{33})$	$\varphi(w_{34})$	$w_{25}$		
$W_1$	$\varphi^3(w_{41})$	$\varphi^3(w_{42})$	$\varphi^2(w_{33})$	$\varphi^2(w_{34})$	$\varphi(w_{25})$	$w_{16}$	$w_{17}$
	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$

In diesem Fall sieht die Jordansche Normalform von  $A|_{H_\lambda(A)}$  folgendermaßen aus:

$$\left( \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{matrix}} \\ \\ \boxed{\begin{matrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{matrix}} \\ \\ \boxed{\lambda} \\ \\ \boxed{\lambda} \end{array} \right).$$

**Beispiel 1:** Wir betrachten die  $(2 \times 2)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich für das charakteristische Polynom  $\chi_A(\lambda)$  von  $A$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda+2) + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2.$$

Folglich ist  $\lambda = -1$  doppelte Nullstelle von  $\chi_A(\lambda)$ , d.h es gilt:

- für den Hauptraum  $H_{-1}(A) = \mathbb{C}^2$ ,
- $\varphi = A + 1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Wir haben die folgende Flagge

$$\begin{array}{c} 0 \subset \ker \varphi \subset \mathbb{C}^2 = V_2 \\ \parallel \\ V_1 = E_{-1}(A) = \{x \mid \varphi x = 0\}. \end{array}$$

D.h.  $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  liegt im Komplement von  $V_1$ . Es ist

$$\begin{array}{c} \mathbb{C}^2 = W_2 \oplus V_1 \\ \parallel \\ \mathbb{C} w_2 \end{array}$$

und

$$\varphi(w_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Man hat also die Jordanbasis  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und die Jordansche Normalform  $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Beispiel 2:** Wir betrachten die  $(3 \times 3)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und berechnen die Eigenwerte von  $A$ , indem wir die Nullstellen von  $\chi_A(\lambda)$  bestimmen.

$$\chi_A(z) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^3.$$

Somit ist  $\lambda = 1$  dreifache Nullstelle von  $\chi_A(\lambda)$ . Es gilt:

- für den Hauptraum  $H_1(A) = \mathbb{C}^3$  und

- $\varphi = A - 1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Wir haben die folgende Flagge

$$0 \subset V_1 = \ker \varphi \subset V_2 = \ker \varphi^2 = \mathbb{C}^3, \quad \text{da } \varphi^2 \text{ die Nullmatrix ist.}$$

Wir bestimmen  $V_1$  und ein Komplement dazu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{vom Rang 1}} x = 0 \iff x \in \text{span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = V_1,$$

$V_1$  ist also zweidimensional und  $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  liegt im Komplement von  $V_1$ , d.h.

$W_2 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Außerdem ist  $\varphi w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_1$  und ergänzend dazu  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Man hat also

$$\begin{array}{l} \text{Jordanketten: } \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 \\ \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{U_2} \end{array} \\ \text{Jordansche Normalform: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

**Beispiel 3:** Wir betrachten die  $(3 \times 3)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst wieder die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 1 + 1 + (1-\lambda) - \lambda - (2-\lambda) \\ &= -\lambda(2-3\lambda+\lambda^2) + 2 - 1 - \lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 \\ &= -(\lambda-1)^3. \end{aligned}$$

Somit ist  $\lambda = 1$  dreifache Nullstelle von  $\chi_A(\lambda)$ . Es ist

$$\varphi = A - 1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir haben die folgende Flagge

$$0 \subset V_1 = \ker \varphi \subset V_2 = \ker \varphi^2 \subset \mathbb{C}^3.$$

Es ist

$$\bullet \varphi^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Rang 1}},$$

$$\bullet V_2 = \text{span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\bullet W_3 = \mathbb{C} w_3 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bullet \varphi(w_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi^2(w_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\bullet \mathbb{C}^3 = V_3 = W_3 \oplus V_2 = \overset{w_3}{\downarrow} W_3 \oplus \underbrace{\overset{\varphi(w_3)}{\downarrow} W_2}_{=V_2} \oplus V_1.$$

Man hat also

$$\text{Jordankette=Jordanbasis : } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Jordansche Normalform : } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Verfahren für die Lösung der linearen, homogenen DGL  $x' = Ax$  in  $\mathbb{C}^n$**   
**(Bestimmung eines komplexen Fundamentalsystems)**

(1) Wir bilden die **Jordansche Normalform** der komplexen Matrix  $A$ , d.h.

- Eigenwerte bestimmen,
- Haupträume bestimmen,
- Zerlegung der Haupträume in die invarianten Unterräume  $U_\alpha$ , d.h. Jordanketten in den Haupträumen bestimmen.

Sei  $(a_1, \dots, a_s)$  eine Jordankette zum Eigenwert  $\lambda$ ,  $X = (a_1, \dots, a_s)$  die Matrix, die aus den Spaltenvektoren  $a_j$  besteht und  $U = \text{span}(a_1, \dots, a_s)$ . Dann bringt eine Konjugation mit  $X$  die Matrix  $A|_U$  auf die Jordansche Normalform, d.h. es ist

$$X^{-1}A|_UX = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = D(\lambda) \quad \text{d.h.} \quad \begin{aligned} A a_1 &= \lambda a_1 \\ A a_2 &= \lambda a_2 + a_1 \\ A a_3 &= \lambda a_3 + a_2 \\ &\vdots \\ A a_s &= \lambda a_s + a_{s-1}. \end{aligned}$$

(2) Wir müssen das **Fundamentalsystem ermitteln**: Es ist  $e^{tA}(U) = U$ . Auf  $U$  hat  $e^{tA}$  in der Basis  $(a_1, \dots, a_s)$  die Matrixgestalt

$$X^{-1}(e^{tA})|_UX = e^{X^{-1}A|_UX} = e^{tD(\lambda)} = e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der  $\alpha$ -te Spalte dieser Matrix stehen die Komponenten des Vektors  $e^{tA}a_\alpha$  in der Basis  $(a_1, \dots, a_s)$ . Es ist also

$$\varphi_\alpha(t) = e^{tA}a_\alpha = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}a_1 + \frac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}a_2 + \dots + ta_{\alpha-1} + a_\alpha \right)$$

für  $\alpha = 1, \dots, s$ .

Diese Funktionen gehören zum Fundamentalsystem der DGL  $x' = Ax$ , denn es gilt:

Ist  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Jordanbasis, so ist  $(\varphi_j(t) = e^{tA}b_j)_{j=1}^n$  ein Fundamentalsystem.

Damit ergibt sich folgender Satz.

**Satz 8.33** Sei  $A$  eine komplexe  $(n \times n)$ -Matrix und  $(b_1, \dots, b_n)$  eine Jordanbasis von  $A$ . Für jede Jordankette  $(a_1, \dots, a_k)$  zum Eigenwert  $\lambda$  in dieser Jordanbasis bildet man die Funktionen

$$\varphi_\alpha(t) = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}a_1 + \frac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!}a_2 + \dots + ta_{\alpha-1} + a_\alpha \right) \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, s.$$

Alle so gebildeten Funktionen bilden ein Fundamentalsystem von  $x' = Ax$  in  $\mathbb{C}^n$ .

**Verfahren zur Lösung der linearen, homogenen DGL  $x' = Ax$  im  $\mathbb{R}^n$   
(Bestimmung eines reellen Fundamentalsystems)**

Sei  $A$  eine reelle  $(n \times n)$ -Matrix. Um die lineare homogene Differentialgleichung  $x' = Ax$  zu lösen, geht man folgendermaßen vor:

1. Man löst  $x' = Ax$  im Komplexen ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$ ).
2. Aus den komplexen Lösungen bekommt man die reellen Lösungen.

**Jordansche Normalform von  $A$ :** Wir bezeichnen mit  $\bar{z}$  die komplexe Konjugation einer komplexen Zahl bzw. eines komplexen Vektors  $z$ . Da die Matrix  $A$  reell ist, gilt für ihre Eigenwerte und Eigenvektoren  $A\bar{x} = \bar{\mu} \cdot \bar{x}$  falls  $Ax = \mu x$ . D.h. man hat die folgenden Eigenwerte:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_s \\ \mu_1, \dots, \mu_r \\ \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{reelle Eigenwerte,} \\ \text{echt komplexe Eigenwerte.} \end{array}$$

Es treten also zwei Fälle auf:

- (1) Ist  $\lambda$  ein reeller Eigenwert, so können die Jordanketten durch reelle Vektoren gewählt werden ( $Aa_r = \lambda a_r + a_{r-1}$  alles reell). In diesem Fall wird das Fundamentalsystem aus den folgenden Funktionen gebildet:

$$\varphi_\alpha(t) = e^{\lambda t} \cdot \left( \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} a_1 + \frac{t^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} a_2 + \dots + t a_{\alpha-1} + a_\alpha \right) \quad \text{für } \alpha = 1, \dots, s.$$

- (2) Ist  $(\mu, \bar{\mu})$  ein Paar komplexer Eigenwerte und  $(b_1, \dots, b_p)$  eine Jordankette zu  $\mu$ , so ist  $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_p)$  eine Jordankette zu  $\bar{\mu}$  (da  $Ab_r = \mu b_r + b_{r-1} \implies A\bar{b}_r = \bar{\mu} \bar{b}_r + \bar{b}_{r-1}$ ).

In diesem Fall erhält man also ein Fundamentalsystem aus den Funktionen

$$\begin{aligned} \psi_\beta(t) &= e^{\mu t} \cdot \left( \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} b_1 + \frac{t^{\beta-2}}{(\beta-2)!} b_2 + \dots + t b_{\beta-1} + b_\beta \right) \\ \bar{\psi}_\beta(t) &= e^{\bar{\mu} t} \cdot \left( \frac{t^{\beta-1}}{(\beta-1)!} \bar{b}_1 + \frac{t^{\beta-2}}{(\beta-2)!} \bar{b}_2 + \dots + t \bar{b}_{\beta-1} + \bar{b}_\beta \right) \end{aligned}$$

für  $\beta = 1, \dots, r$ . Aus diesen komplexen linear unabhängigen Funktionen kann man die reellen linear unabhängigen Funktionen

$$\begin{array}{ll} \operatorname{Re}(\psi_\beta(t)) & \text{und} \\ \operatorname{Im}(\psi_\beta(t)), & \beta = 1, \dots, r \end{array}$$

bilden.

Damit erhalten wir folgenden Satz.

**Satz 8.34** Sei  $A$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Man erhält ein Fundamentalsystem von reellen Lösungen der DGL  $x' = Ax$  im durch die oben angegebenen Funktionen:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_\alpha \\ \operatorname{Re}(\psi_\beta(t)) \\ \operatorname{Im}(\psi_\beta(t)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{zu den Jordanketten zu reellen Eigenwerten,} \\ \text{zu den Jordanketten zu den echt komplexen Eigenwertpaaren } (\mu, \bar{\mu}). \end{array}$$

**Beispiel 1:** Wir betrachten die DGL  $x' = Ax$  mit der  $(2 \times 2)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und die DGL } x' = Ax.$$

Hier hatten wir die Jordanbasis berechnet zum reellen Eigenwert  $\lambda = -1$ :  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Damit erhält man als Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{-t} a_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \varphi_2(t) &= e^{-t}(ta_1 + a_2) = e^{-t} \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit als Lösung:

$$x(t) = e^{-t} \left( c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t+1 \\ -t \end{pmatrix} \right).$$

**Beispiel 2:** Wir betrachten die DGL  $x' = Ax$  mit der  $(3 \times 3)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir hatten die Jordanketten  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  zum Eigenwert  $\lambda = 1$  berechnet.

Man erhält also als Fundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = e^t \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

und somit als Lösung

$$x(t) = e^t \left( c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right).$$

**Beispiel 3:** Wir betrachten die DGL  $x' = Ax$  mit der  $(3 \times 3)$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Als Jordankette zum Eigenwert  $\lambda = 1$  hatten wir oben  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  bestimmt.

Damit erhalten wir als Fundamentalsystem

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \varphi_2(t) &= e^t \left( t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix} \\ \varphi_3(t) &= e^t \left( \frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ t \\ -\frac{t^2}{2} + t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und somit als Lösung

$$x(t) = e^t \left( c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t + 1 \\ t \\ -\frac{t^2}{2} + t \end{pmatrix} \right).$$

**Beispiel 4:** Wir betrachten die DGL  $x' = Ax$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ergibt sich für das charakteristische Polynom  $\chi_A(z) = z^2 + 1$ . Dies hat die echt komplexen, zueinander konjugierten Nullstellen  $i$  und  $-i$ , d.h. man hat die Eigenwerte  $\mu = i$  und  $\bar{\mu} = -i$ . Weiterhin ist  $g_\mu = m_\mu$ , d.h. man hat die Eigenvektoren zu bestimmen. Es genügt dies für  $\mu = i$  zu tun:

$$(A - iI)a = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} a = 0 \implies a = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Somit hat man als komplexes Fundamentalsystem

$$\psi_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \psi_2(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten den Realteil und den Imaginarteil von  $\psi_1$

$$\psi_1(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}}_{=\operatorname{Re}\psi_1(t)=\varphi_1(t)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{=\operatorname{Im}\psi_1(t)=\varphi_2(t)}.$$

Als reelles Fundamentalsystem erhalten wir also die Funktionen

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Die reelle Lösung ist

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

## Geometrische Diskussion der Integralkurven der linearen homogenen DGL

$x' = Ax$  im  $\mathbb{R}^2$

In diesem Abschnitt veranschaulichen wir uns den Verlauf der Lösungskurven der homogenen linearen Differentialgleichung  $x' = Ax$  für reelle  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $A$  bei den verschiedenen möglichen Jordanschen Normalformen von  $A$ .

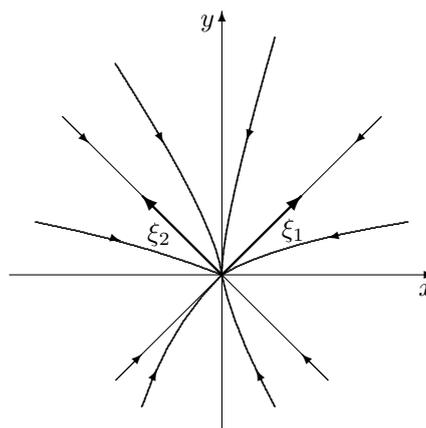
$\chi_A(\lambda)$  bezeichne das zu  $A$  gehörende charakteristische Polynom und  $\lambda_1, \lambda_2$  seien die Nullstellen von  $\chi_A(\lambda)$ .

1.Fall: Seien  $\lambda_1, \lambda_2$  reell und verschieden. Dann existiert eine Basis  $(\xi_1, \xi_2)$  aus Eigenvektoren im  $\mathbb{R}^2$ . Die Jordansche Normalform von  $A$  bzgl.  $(\xi_1, \xi_2)$  sieht dann folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

und die Integralkurven werden beschrieben durch

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \xi_2.$$



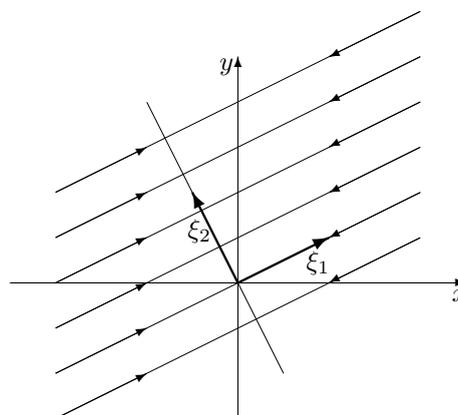
Fall 1.1

1.1 Sei  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ . Dann laufen alle Integralkurven in den Punkt  $(0, 0)$ . Dieser Punkt wird Knoten genannt.

1.2 Sei  $\lambda_1 < 0$  und  $\lambda_2 = 0$ . Dann sind die Integralkurven

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \xi_1 + c_2 \xi_2.$$

Das heißt, alle Integralkurven laufen auf die  $\xi_2$ -Achse, parallel zur  $\xi_1$ -Achse, zu.



Fall 1.2

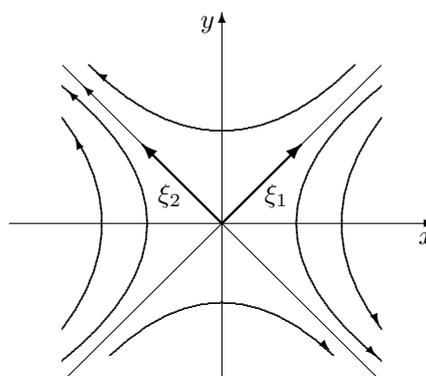
1.3 Sei  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . Dann konvergiert  $e^{\lambda_1 t}$  gegen 0 und  $e^{\lambda_2 t}$  gegen  $\infty$  für  $t$  gegen  $\infty$ . Der Punkt  $(0, 0)$  heißt Sattel.

1.4 Sei  $0 = \lambda_1 < \lambda_2$ . Dann sind die Integralkurven

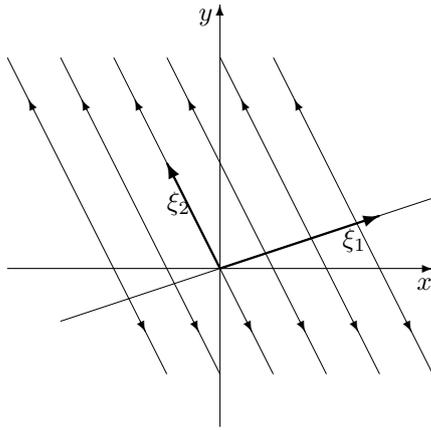
$$\varphi(t) = c_1 \xi_1 + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

wobei  $e^{\lambda_2 t}$  gegen  $\infty$  konvergiert für  $t$  gegen  $\infty$ . Die Integralkurven sind also Geraden, die parallel zur  $\xi_2$ -Achse sind.

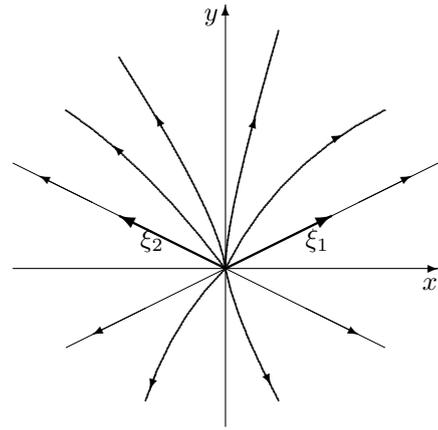
1.5 Sei  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ .



Fall 1.3



Fall 1.4



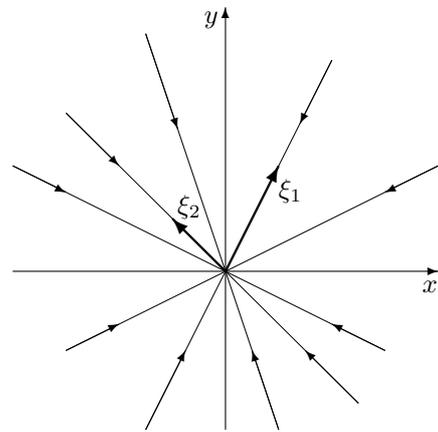
Fall 1.5

2.Fall: Seien  $\lambda_1 = \lambda_2$  reell.

2.1  $A$  sei diagonalisierbar, das heißt  $A$  hat  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  als zweifachen Eigenwert und  $A$  hat bzgl. der Basis der Eigenvektoren die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Integralkurven sind dann Geraden  $\varphi(t) = e^{t\lambda}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2)$ . Wir erhalten einen degenerierten Knoten in  $(0,0)$ . Für  $\lambda < 0$  laufen die Geraden auf den Knoten zu, für  $\lambda > 0$  von ihnen weg.



Fall 2.1

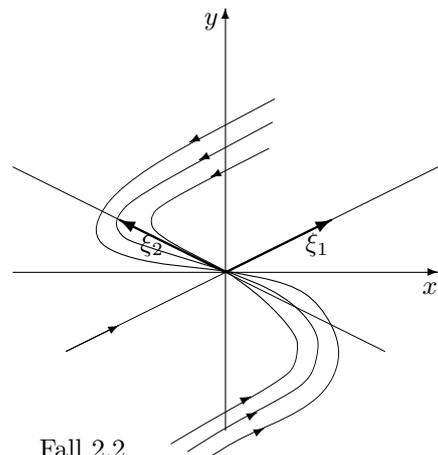
2.2 Sei  $A$  nicht diagonalisierbar. Sei  $\xi_1$  der Eigenvektor zu  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  und  $\xi_2$  der Hauptvektor zu  $\lambda$ . Dann hat  $A$  die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

bzgl. der Basis  $(\xi_1, \xi_2)$ . Wir erhalten dann die Integralkurven

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}((c_1 + tc_2)\xi_1 + c_2\xi_2).$$

Für  $\lambda < 0$  laufen alle Integralkurven in den Punkt  $(0,0)$  während für  $\lambda > 0$  die Kurven von  $(0,0)$  weglaufen.



Fall 2.2

3.Fall:  $A$  habe die komplexen Eigenwerte  $\mu = \alpha + i\beta$  und  $\bar{\mu} = \alpha - i\beta$ . Dann existiert ein  $\xi \in \mathbb{C}^2$ , so dass  $A$  bzgl.  $(\xi, \bar{\xi})$  die Form

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

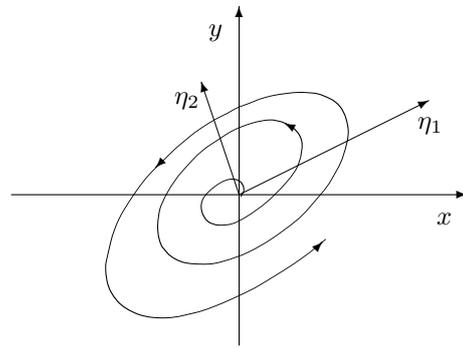
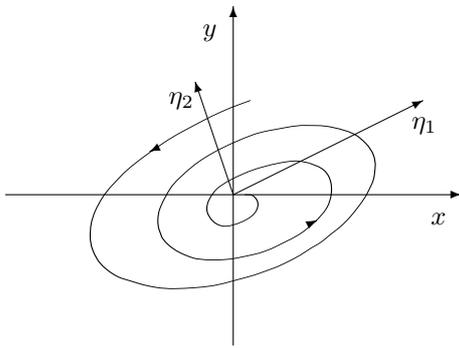
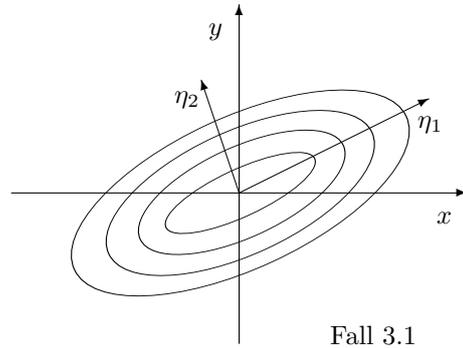
hat. Sei  $\xi = \eta_1 + i\eta_2$  für  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^2$ . Dann sind die Integralkurven

$$\varphi(t) = e^{\alpha t}((\cos(\beta t) \cdot \eta_1 - \sin(\beta t) \cdot \eta_2)c_1 + (\cos(\beta t) \cdot \eta_2 + \sin(\beta t) \cdot \eta_1)c_2).$$

3.1 Sei  $\alpha = 0$ . Dann ist  $\mu = i\beta$  und die Integralkurven sind periodisch.

3.2 Ist  $\alpha < 0$ , so sind die Integralkurven Spiralen, die zu  $(0, 0)$  hinlaufen.

3.3 Ist  $\alpha > 0$ , so sind die Integralkurven Spiralen, die von  $(0, 0)$  weglaufen.



### 8.4.3 Die lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung im $\mathbb{R}^1(\mathbb{C}^1)$

In diesem Abschnitt betrachten wir die folgende DGL in  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b(t),$$

wobei  $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  stetige Funktionen auf einem offenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  sind. Die Gleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = 0 \tag{8.48}$$

heißt homogene, lineare DGL  $n$ . Ordnung, und die Gleichung

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = b(t) \tag{8.49}$$

heißt inhomogene, lineare DGL  $n$ . Ordnung. Nach Satz 8.1 ist die DGL (8.48) (bzw. (8.49)) äquivalent zu einem DGL-System erster Ordnung im  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ . Wir setzen dazu

$$y_1 = x, \quad y_2 = y_1' = x', \quad y_3 = y_2' = x'', \quad \dots, \quad y_n = y_{n-1}' = x^{(n-1)}$$

und betrachten die homogene lineare DGL

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{=:A(t)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \quad (8.50)$$

bzw. die inhomogene lineare DGL

$$y' = A(t)y + B(t) \quad \text{mit} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (8.51)$$

Nach Satz 8.1 ist  $x$  genau dann Lösung von (8.48), wenn  $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$  Lösung von (8.50) ist. Ebenso ist  $x$  genau dann Lösung von (8.49), wenn  $(x, x', \dots, x^{(n-1)})$  Lösung von (8.51) ist.

Die Funktionen  $x_1, \dots, x_k : I \rightarrow \mathbb{K}$  sind genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)})^t \\ &\vdots \\ \varphi_k &= (x_k, x_k', \dots, x_k^{(n-1)})^t \end{aligned}$$

linear unabhängig sind.

Damit können wir die Sätze aus Kapitel 9.4.1 auf diesen Spezialfall anwenden und erhalten:

**Satz 8.35** (1) Sei  $V$  der Lösungsraum der homogenen DGL (8.48), das heißt

$$V = \{x : I \rightarrow \mathbb{K} \mid x \text{ löst (8.48)}\}.$$

Dann ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler,  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

(2) Sei  $x_1, \dots, x_n$  eine Basis von  $V$ , das heißt ein Fundamentalsystem der DGL (8.48).  $y_s$  sei eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (8.49). Dann erhält man alle Lösungen von (8.49) durch

$$y(t) = y_s(t) + \sum_{k=1}^n c_k x_k(t) \quad c_k \in \mathbb{K}.$$

**Beweis:** Man wendet Satz 8.26 auf (8.51) an und betrachtet die erste Komponente der Lösungsfunktion.  $\square$

Seien  $x_1, \dots, x_n$  Lösungen von (8.48). Wir betrachten die zugehörigen Lösungen  $\varphi_i = (x_i, x_i', \dots, x_i^{(n-1)})$  von (8.50). Dann heißt

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) := W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (t)$$

Wronski-Determinante von  $x_1, \dots, x_n$ . Aus Kapitel 8.4.1 folgt:

1.  $(x_1, \dots, x_n)$  ist genau dann ein Fundamentalsystem von (8.48), wenn  $W(x_1, \dots, x_n)(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ .
2. Ist  $(x_1, \dots, x_n)$  ein Fundamentalsystem von (8.48), so folgt nach dem Satz 8.27 von Liouville, dass

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = W(x_1, \dots, x_n)(t_0) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a_{n-1}(s) ds}.$$

**Satz 8.36** Sei  $x_1, \dots, x_n$  ein Fundamentalsystem von (8.48). Dann ist eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (8.49) gegeben durch

$$y(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{W_k(b)(s)}{W(x_1, \dots, x_n)(s)} ds,$$

wobei

$$W_k(b) = \det \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{k-1} & 0 & x_{k+1} & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_{k-1}' & 0 & x_{k+1}' & \dots & x_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_{k-1}^{(n-1)} & b(s) & x_{k+1}^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** Wir wenden Satz 8.28 auf (8.51) und erhalten mit der Äquivalenz von (8.49) und (8.51) die Behauptung.  $\square$

Der Beweis liefert eine **Praktische Methode** zur Bestimmung einer speziellen Lösung der DGL (8.49):

- (1) Bestimmen ein Fundamentalsystem  $x_1, \dots, x_n$  von (8.48).
- (2) Bestimmen eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL (8.49) mittels
  - a) Variation der Konstanten: Dazu machen wir den Ansatz:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \underline{c_k(t)}$$

und bestimmen die Funktionen  $c_k(t)$  so, dass  $y(t)$  die inhomogene DGL (8.49) löst. Damit die Bestimmung der  $c_k(t)$  möglichst einfach wird, setzt man am besten  $y(t)$  nicht direkt in (8.49) ein, sondern die Funktion  $\psi = (y, y', \dots, y^{(n-1)})^t$  in (8.51). Dann erhält man als Bedingung für die Ableitungen  $c_k'(t)$  das folgende lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) c_k'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \vdots \\ x_k^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

das man wie üblich lösen kann. Integration liefert dann die Funktionen  $c_k(t)$ .

- b) Sind die Koeffizientenfunktionen  $a_k(t) \equiv a_k$  konstant, so kann man bei „einfacher“ rechter Seite speziellere Ansätze für eine Lösung der inhomogenen DGL machen. Sei  $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ .

$b(t)$	Ansatz für $x_s(t)$
$e^{rt} \sum_{k=0}^N c_k t^k$ , $r$ ist $m$ -fache Nullstelle von $p(\lambda)$	$e^{rt} \cdot t^m \cdot \sum_{k=0}^N \tilde{c}_k t^k$
$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \sum_{k=0}^N c_k t^k$ $e^{\alpha t} \sin(\beta t) \sum_{k=0}^N c_k t^k$ $\alpha + i\beta$ ist $m$ -fache Nullstelle von $p(\lambda)$ , $m \geq 0$	$e^{\alpha t} \cdot t^m \cdot \left\{ \cos(t\beta) \sum_{k=0}^N \tilde{c}_k t^k + \sin(t\beta) \sum_{k=0}^N \tilde{d}_k t^k \right\}$

Dabei bestimmt man  $\tilde{c}_k$  und  $\tilde{d}_k$  durch Einsetzen in die DGL und Koeffizientenvergleich.

- c) Ist der Störterm  $b(t)$  der DGL (8.49) von der Form  $b(t) = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$ , dann gilt:

Ist  $y_1$  eine spezielle Lösung der DGL mit Störterm  $b_1(t)$  und  $y_2$  eine spezielle Lösung mit Störterm  $b_2(t)$ , so ist  $y(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$  eine spezielle Lösung der DGL mit Störterm  $b(t)$ .

Daraus ergibt sich: Wie für das System ist für die Lösung der DGL

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t)$$

die Kenntnis des Fundamentalsystems wichtig. Wir erklären zunächst, wie man ein solches Fundamentalsystem für DGL mit konstanten Koeffizienten  $a_k$  erhält und fügen dann einige Kommentare für den Fall nicht-konstanter Koeffizienten an.

## I. Die homogene lineare DGL $n$ -ter Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten

Wir betrachten nun den Fall, dass die Funktionen  $a_j(t) \equiv a_j$  **reell und konstant** sind. Wie erhält man dann ein Fundamentalsystem? Man könnte nach dem allgemeinen Verfahren die Jordansche Normalform von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir können hier aber einfacher anders vorgehen. Wir wissen bereits, dass das Fundamentalsystem durch Funktionen der Form  $e^{\lambda_j t} t^k$ , mit einem Eigenwert  $\lambda_j$  von  $A$ , gegeben wird. Wir gehen nun folgendermaßen vor: Wir wollen die lineare homogene DGL

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + a_{n-2}x^{(n-2)}(t) + \dots + a_0x(t) = 0 \quad (8.52)$$

für konstante Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  lösen. Wir ordnen dieser DGL das folgende Polynom  $P(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$  zu:

$$P(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

$P(\lambda)$  heißt das charakteristische Polynom der DGL (8.52).  $P(\lambda)$  entspricht bis auf ein Vorzeichen der Determinante von  $A - \lambda E_n$  (entwickle nach der letzten Zeile). Man erhält auf folgende Weise ein Fundamentalsystem:

**Satz 8.37** *Seien*

- $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  die reellen Nullstellen von  $P$  mit der algebraischen Vielfachheit  $m_j$  zu  $\lambda_j$  und
- $(\mu_1, \bar{\mu}_1), \dots, (\mu_p, \bar{\mu}_p)$  die Paare echt komplexer Nullstellen von  $P$  mit der algebraischen Vielfachheit  $\nu_l$  zu  $\mu_l$  und  $\bar{\mu}_l$ ,

d.h.

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s} \cdot (\lambda - \mu_1)^{\nu_1} \cdot (\lambda - \bar{\mu}_1)^{\nu_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \mu_p)^{\nu_p} \cdot (\lambda - \bar{\mu}_p)^{\nu_p}$$

und  $\mu_l = \alpha_l + i\beta_l$  für alle  $l = 1, \dots, p$ . Dann ist ein Fundamentalsystem von (8.52) durch folgende reelle Funktionen gegeben

$$\left. \begin{aligned} x_{jk_j}(t) &= e^{\lambda_j t} \cdot t^{k_j} & \forall j = 1, \dots, s, k_j = 0, \dots, m_j - 1 \\ y_{lq_l}(t) &= e^{\alpha_l t} \cdot \cos(\beta_l t) \cdot t^{q_l} \\ \tilde{y}_{lq_l}(t) &= e^{\alpha_l t} \cdot \sin(\beta_l t) \cdot t^{q_l} \end{aligned} \right\} \quad \forall l = 1, \dots, p, q_l = 0, \dots, \nu_l - 1.$$

**Beweis:**

1.) Lösung der DGL im Komplexen:

Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen, komplexen Nullstellen von  $P(\lambda)$  mit den zugehörigen Vielfachheiten  $m_j$ .

a) Behauptung:

Die Funktionen  $x_{jk_j} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  gegeben durch

$$x_{jk_j}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^{k_j} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad j \in \{1, \dots, r\}, k_j \in \{0, \dots, m_j - 1\}$$

lösen die DGL  $\sum_{l=0}^n a_l x^{(l)} = 0$ .

Nach dem Hauptsatz der Algebra gilt

$$\sum_{l=0}^n a_l \lambda^l = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{m_j} \in \mathbb{C}[\lambda].$$

Diese Identität gilt dann auch in  $\mathbb{C}[\frac{d}{dt}]$  als Differentialgleichung (Koeffizientenvergleich):

$$\sum_{l=0}^n a_l \frac{d^l}{dt^l} = \prod_{j=1}^r \left( \frac{d}{dt} - \lambda_j \right)^{m_j}. \quad (8.53)$$

Andererseits errechnet man

$$\left( \frac{d}{dt} - \lambda_j \right) x_{jk}(t) = k \cdot x_{j,k-1}(t)$$

für die Funktionen  $x_{jk}(t) = e^{\lambda_j t} \cdot t^k$ . Für  $k \leq m_j - 1$  erhalten wir durch mehrfaches Anwenden

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_j\right)^{m_j} x_{jk}(t) = 0$$

und damit wegen (8.53)

$$\sum_{l=0}^n a_l x_{jk_j}^{(l)} \equiv 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, r, k_j = 0, \dots, m_j - 1.$$

b) Die Funktionen  $\{x_{jk} \mid j = 1, \dots, r, k_j = 0, \dots, m_j - 1\}$  sind linear unabhängig (Übungsaufgabe), sie bilden somit ein Fundamentalsystem im komplexen Lösungsraum.

2.) Da die Koeffizienten  $a_j$  reell sind, hat  $P(\lambda)$  nur reelle Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  und Paare echter komplexer Nullstellen  $(\mu_1, \bar{\mu}_1), \dots, (\mu_p, \bar{\mu}_p)$ . Sei  $\mu_l = \alpha_l + i\beta_l$ . Dann bilden die Funktionen

$$\left. \begin{aligned} x_{jk_j}(t) &= e^{\lambda_j t} \cdot t^{k_j} & j &= 1, \dots, s, k_j = 0, \dots, m_j - 1, \\ z_{lq_l}(t) &= e^{t(\alpha_l + i\beta_l)} \cdot t^{q_l} \\ \bar{z}_{lq_l}(t) &= e^{t(\alpha_l - i\beta_l)} \cdot t^{q_l} \end{aligned} \right\} \quad l = 1, \dots, p, q_l = 0, \dots, \nu_l - 1$$

ein komplexes Fundamentalsystem. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_{lq_l}(t)) &= t^{q_l} \cdot e^{t\alpha_l} \cos(\beta_l t) \\ \operatorname{Im}(z_{lq_l}(t)) &= t^{q_l} \cdot e^{t\alpha_l} \sin(\beta_l t). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\operatorname{span}_{\mathbb{C}}(z_{lq_l}, \bar{z}_{lq_l}) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(\operatorname{Re}z_{lq_l}, \operatorname{Im}z_{lq_l}).$$

Folglich haben wir mit

$$\left. \begin{aligned} x_{jk_j}(t) &= e^{\lambda_j t} \cdot t^{k_j} & j &= 1, \dots, s, k_j = 0, \dots, m_j - 1, \\ y_{lq_l}(t) &= e^{t\alpha_l} \cdot t^{q_l} \cdot \cos(\beta_l t) \\ \bar{y}_{lq_l}(t) &= e^{t\alpha_l} \cdot t^{q_l} \cdot \sin(\beta_l t) \end{aligned} \right\} \quad l = 1, \dots, p, q_l = 0, \dots, \nu_l - 1$$

ein reelles Fundamentalsystem. □

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

$$x''' - x'' + x' - x = t.$$

(1) Fundamentalsystem der homogenen DGL: Um dies zu finden, suchen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i).$$

Wir erhalten somit als Fundamentalsystem

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= e^t \\ \hat{x}_2(t) &= e^{it} \\ \hat{x}_3(t) &= e^{-it} \end{aligned} \right\} \quad \text{komplex.}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}x_1 &= e^t \\x_2(t) &= \cos(t) = \operatorname{Re}(\hat{x}_2) \\x_3(t) &= \sin(t) = \operatorname{Im}(\hat{x}_2).\end{aligned}$$

Wir haben also als allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

(2) Spezielle Lösung der inhomogenen DGL:  $b(t) = t$  ist ein Polynom ersten Grades, d.h. wir machen den folgenden Ansatz

$$y_s(t) = \alpha t + \beta.$$

Damit ist  $y'_s = \alpha$ ,  $y''_s = 0$ ,  $y'''_s = 0$ , und Einsetzen in die DGL ergibt  $\alpha - \alpha t - \beta = t$ , d.h.

$$-\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \alpha = \beta \quad \text{d.h.} \quad \beta = -1$$

Somit ist die spezielle Lösung  $y_s(t) = -(t+1)$ , und die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist

$$x(t) = -(t+1) + c_1 e^t + c_2 \cos(t) + c_3 \sin(t).$$

## II. Beispiele für die Lösung von linearen DGL $n$ -ter Ordnung im $\mathbb{R}^1$ mit nicht-konstanten Koeffizienten

Im allgemeinen ist es kompliziert, Fundamentalsysteme zu finden. Fundamentalsysteme sind nicht immer durch elementare Funktionen anzugeben. Es gibt aber einige Tricks, von denen wir hier noch drei besprechen wollen.

### 1. Die Eulersche Differentialgleichung

Wir betrachten die DGL

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = b(t). \quad (8.54)$$

mit  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \neq 0$  und suchen Lösungen auf  $(0, \infty)$ .

**Satz 8.38** *Durch die Substitution  $t = e^s$  geht die Eulersche DGL (8.54) in eine DGL mit konstanten Koeffizienten*

$$\sum_{k=0}^n b_k z^{(k)}(s) = b(e^s) \quad (8.55)$$

über, wobei  $b_k \in \mathbb{R}$  geeignete Konstanten sind.  $z(s)$  ist genau dann Lösung von (8.55), wenn  $x(t) = z(\ln(t))$  Lösung von (8.54) ist.

**Beweis:** Sei  $s = \ln(t)$  und  $z(s) := x(e^s)$ , das heißt  $x(t) = z(\ln(t))$ .

(1) Behauptung: Es existieren Konstanten  $c_{kj} \in \mathbb{R}$ , so dass

$$t^k x^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^k c_{kj} z^{(j)}(s), \quad (8.56)$$

wobei  $c_{kk} = 1$ .

Wir beweisen dies durch Induktion über  $k$ .

Ist  $k = 1$ , so gilt

$$tx'(t) = t \cdot z'(\ln t) \cdot \frac{1}{t} = z'(s).$$

Damit ist der Induktionsanfang gegeben.

$k \rightsquigarrow k+1$ : Gelte nun (8.56) für  $k$ . Differenzieren wir die Induktionsvoraussetzung, so erhalten wir

$$\begin{aligned} t^k x^{(k)}(t) &= \sum_{j=1}^k c_{kj} z^{(j)}\left(\frac{\ln t}{s}\right) && \text{d.h.} \\ kt^{k-1} x^{(k)}(t) + t^k x^{(k+1)}(t) &= \sum_{j=1}^k c_{kj} z^{(j+1)}(s) \cdot \frac{1}{t} && \text{und damit} \\ t^{k+1} x^{(k+1)}(t) &= \sum_{j=2}^{k+1} c_{k,j-1} z^{(j)}(s) - kt^k x^{(k)}(t) \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \sum_{j=2}^k \overbrace{(c_{k,j-1} - kc_{kj})}^{=:c_{k+1,j}} z^{(j)}(s) + c_{kk} z^{k+1}(s) - c_{k1} z^{(1)}(s) \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} c_{k+1,j} z^{(j)}(s). \end{aligned}$$

(2) Setzen wir nun (8.56) in die DGL (8.54) ein und ordnen dann nach den Ableitungen von  $z(s)$ , so erhalten wir, dass  $x(t)$  genau dann (8.54) löst, wenn  $z(s) := x(e^s)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} a_0 z(s) + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left( \sum_{j=1}^k c_{kj} z^{(j)}(s) \right) &= b(e^s) \quad , \text{ löst, d.h.} \\ \sum_{j=1}^n \overbrace{\left( \sum_{k=j}^n a_k c_{kj} \right)}^{=:b_j} z^{(j)}(s) + d_0 z(s) &= b(e^s). \end{aligned}$$

□

**Beispiel:** Wir betrachten die DGL

$$t^2 x'' + tx' - n^2 x = 0$$

und suchen eine Lösung auf  $(0, \infty)$ . Es sei dazu  $x(t) = z(\ln(t))$  und  $s = \ln(t)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} x'(t) &= z'(s) \frac{1}{t}, \\ x''(t) &= z''(s) \frac{1}{t^2} - z'(s) \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

Dann ist

- die transformierte DGL:  $z''(s) - z'(s) + z'(s) - n^2 z(s) = z'' - n^2 z = 0$ , d.h.

$$z''(s) - n^2 z(s) = 0.$$

- das charakteristische Polynom:  $P(\lambda) = \lambda^2 - n^2$  mit den Nullstellen  $\lambda_{1,2} = \pm n$ . Damit haben wir ein Fundamentalsystem für die transformierte DGL

$$\begin{aligned} z_1(s) &= e^{ns}, \\ z_2(s) &= e^{-ns}. \end{aligned}$$

- und somit das Fundamentalsystem der Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= z_1(\ln(t)) = e^{n \ln(t)} = t^n, \\x_2(t) &= z_2(\ln(t)) = e^{-n \ln(t)} = t^{-n}.\end{aligned}$$

Man erhält damit als Lösung der gegebenen DGL

$$x(t) = c_1 \cdot t^n + c_2 \cdot t^{-n} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

## 2. Die Reduktionsmethode von D'Alambert

Wir betrachten die homogene lineare DGL

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0,$$

wobei  $a_j : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist für alle  $j \in \{0, \dots, n\}$  und  $a_n(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ . Wenn man bereits eine Lösung von (8.4.3) kennt, so kann man das Problem auf eine DGL  $(n-1)$ -ter Ordnung reduzieren. Dazu folgender Satz:

**Satz 8.39 (Reduktionssatz von D'Alambert)** Sei  $x_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der homogenen DGL (8.4.3) und  $x_1(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$ . Mit dem Produktansatz

$$x(t) = x_1(t) \cdot y(t)$$

geht (8.4.3) in eine DGL der Form

$$b_n(t)y^{(n)}(t) + b_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + b_1(t)y'(t) = 0$$

über. Substituieren wir nun  $z = y'$ , so erhalten wir eine DGL  $(n-1)$ -ter Ordnung

$$b_n(t)z^{(n-1)}(t) + \dots + b_1(t)z = 0. \tag{8.57}$$

Ist  $z_1, \dots, z_{n-1}$  ein Fundamentalsystem der DGL (8.57), so ist

$$x_1, \quad x_1 \cdot \int z_1(t) dt, \quad \dots, \quad x_1 \cdot \int z_{n-1}(t) dt$$

ein Fundamentalsystem der DGL (8.4.3).

**Beweis:** Nach der Produktregel folgt für  $x = x_1 \cdot y$

$$x^{(k)} = \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} x_1^{(k-v)} y^{(v)}.$$

Setzen wir dies in (8.4.3) ein, so erfüllt  $x(t)$  genau dann (8.4.3), wenn  $y(t)$

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{k=0}^n a_k(t) \cdot \left( \sum_{v=0}^k \binom{k}{v} x_1^{(k-v)} y^{(v)} \right) \\ &= \sum_{v=0}^n \underbrace{\left( \sum_{k=v}^n a_k(t) \binom{k}{v} x_1^{(k-v)} \right)}_{=: b_v(t)} y^{(v)}.\end{aligned}$$

erfüllt. Dabei gilt

$$b_0(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k(t) x_1^{(k)} = 0,$$

da  $x_1$  Lösung von (8.4.3) ist. Sei nun  $z := y'$ . Dann löst  $z(t)$  genau dann  $\sum_{v=0}^{n-1} b_{v+1}(t) z^{(v)} = 0$ , wenn

$$x(t) = x_1(t) \cdot \int z(t) dt$$

Lösung von (8.4.3) ist.

Es ist noch zu zeigen, dass, wenn  $z_1(t), \dots, z_{n-1}(t)$  linear unabhängige Funktionen sind, auch

$$x_1(t), x_1(t) \cdot \int z_1(t) dt, \dots, x_1(t) \cdot \int z_{n-1}(t) dt$$

linear unabhängige Funktionen sind. Seien dazu  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten die Gleichung

$$\lambda_1 x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_1 \cdot \int z_j(t) dt = 0 \quad \forall t \in I.$$

Teilen wir diese Gleichung durch  $x_1(t)$  ( $x_1(t) \neq 0$  für alle  $t \in I$  nach Voraussetzung) und differenzieren wir dann nach  $t$ , so erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j z_j(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

und folglich  $\lambda_j = 0, \forall j \in \{1, \dots, n-1\}$ . □

**Beispiel 1:** Wir betrachten die DGL

$$(1 - t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0 \tag{8.58}$$

und suchen eine Lösung auf  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $\pm 1, 0 \notin I$ . Dabei gehen wir folgendermaßen vor.

1. Wir erraten die Lösung:  $x_1(t) = t$
2. Dann machen wir den Produktansatz  $x(t) = t \cdot y(t)$  und leiten ab

$$\begin{aligned} x' &= y + ty', \\ x'' &= 2y' + ty''. \end{aligned}$$

Für die transformierte DGL ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - t^2)(2y' + ty'') + 2t(y + ty') - 2ty, \text{ d.h.} \\ 0 &= (1 - t^2)ty'' + 2y'. \end{aligned}$$

Mit  $z = y'$  ist nun

$$(1 - t^2)tz' + 2z = 0 \tag{8.59}$$

zu lösen.

3. Wir lösen (8.59) mit Trennung der Variablen. Es gilt

$$z' = -\frac{2}{t(1-t^2)}z, \text{ also}$$

$$z(t) = c \cdot e^{-2 \int \frac{1}{t(1-t^2)} dt}.$$

Durch Partialbruchzerlegung können wir das Integral lösen und erhalten

$$\int \frac{-2}{t(1-t^2)} dt = \int \left( \frac{-2}{t} - \frac{1}{1-t} + \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right).$$

Damit folgt, dass (8.59) von  $z_1(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$  gelöst wird, und wir erhalten ein Fundamentalsystem von (8.58)

$$x_1(t) = t$$

$$x_2(t) = t \int \left( 1 - \frac{1}{t^2} \right) dt = t^2 + 1.$$

Folglich ist die allgemeine Lösung von (8.58)

$$x(t) = c_1 t + c_2 (t^2 + 1)$$

für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel 2:** Wir betrachten die Hillsche DGL, eine vereinfachte Sturm–Liouville–DGL,

$$x''(t) + a(t)x(t) = 0,$$

wobei  $a : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig sei.

**Satz 8.40** *Ist  $\varphi(t)$  eine Lösung der Hillschen DGL und  $\varphi(t) \neq 0$  auf  $I$ , so hat die allgemeine Lösung die Form*

$$x(t) = \varphi(t) \left( c_1 + c_2 \int \frac{1}{\varphi^2(t)} dt \right) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** Wir gehen mit dem Produktansatz  $x = \varphi \cdot y$  vor und leiten ab

$$x' = \varphi' y + \varphi y'$$

$$x'' = \varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y''.$$

Daraus folgt dann

$$\varphi'' y + 2\varphi' y' + \varphi y'' + a(t)\varphi y = 0.$$

Da  $\varphi$  Lösung der Hillschen DGL ist, folgt

$$\varphi y'' + 2\varphi' y' = 0, \text{ also } y'' = -\frac{2\varphi'}{\varphi} y'.$$

Mit der Substitution  $z = y'$  ist  $z' = -2(\ln \varphi)' z$  zu lösen. Es folgt mittels Trennung der Variablen

$$z(t) = e^{-2 \int (\ln \varphi)' dt} = e^{-2 \ln \varphi(t)}$$

$$= \frac{1}{\varphi(t)^2}.$$

Damit ist

$$\varphi, \varphi \cdot \int \frac{1}{\varphi(t)^2} dt$$

ein Fundamentalsystem der Hillschen DGL. □

**Beispiel 3:** Wir wollen die Besselsche DGL

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - n^2)x = 0 \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

auf  $(0, \infty)$  lösen. Die Lösungen sind die Besselschen Funktionen.

**Definition 8.18** Die Funktion

$$J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - t \sin \varphi) d\varphi$$

heißt Besselsche Funktion 1. Art.

Für die Besselsche Funktion erster Art gelten die folgenden Eigenschaften:

1.  $J_n(t)$  ist keine elementare Funktion.
2.  $J_n(t)$  ist eine Lösung der Besselschen DGL.
3. Durch die Reduktionsmethode erhält man eine weitere linear unabhängige Lösung durch

$$Y_n(t) = J_n(t) \cdot \int \frac{1}{t \cdot J_n(t)^2} dt.$$

$Y_n(t)$  heißt Besselsche Funktion 2. Art.

Zum Beweis dieser Eigenschaften, zeigt man zunächst, dass

$$\begin{aligned} J_{2n}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cdot \sin \varphi) \cdot \cos(2n\varphi) d\varphi \\ J_{2n+1}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t \cdot \sin \varphi) \cdot \sin((2n+1)\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Damit beweist man dann die folgenden Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} 2J_n'(t) &= J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \\ 2J_n(t) &= t \cdot J_{n+1}(t) + t \cdot J_n(t) \quad \text{für } t > 0, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aus diesen Rekursionsformeln folgt dann, dass  $J_n$  die Besselsche DGL löst.

### 3. Der Potenzreihenansatz

Wir betrachten die lineare DGL

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t), \tag{8.60}$$

wobei  $a_j, b : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I = (t_0 - r, t_0 + r)$  in Potenzreihen um  $t_0$  zu entwickeln seien:

$$\begin{aligned} a_j(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}(t-t_0)^k \quad \forall j = 0, \dots, n-1 \\ b(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(t-t_0)^k. \end{aligned}$$

**Satz 8.41** Die Lösung  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  des Anfangswertproblems zur DGL (8.60) mit den Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

ist eine auf  $I$  konvergente Potenzreihe

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k.$$

Die Koeffizienten  $p_k$  können durch Einsetzen in (8.60) und Koeffizientenvergleich bestimmt werden. Sind keine Anfangsbedingungen gegeben, so bleiben bei diesem Verfahren die  $p_0, \dots, p_{n-1}$  beliebig, und die  $p_k$  für  $k \geq n$  werden daraus bestimmt.

**Beweis:** Wir setzen  $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k$  in (8.60) ein und bestimmen  $p_k$ . Dann zeigt man, dass mit den so gefundenen  $p_k$  die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k (t - t_0)^k$  auf  $I$  konvergiert [zu finden u.a. in Luhl/Wiesner III].  $\square$

**Beispiel:** Wir betrachten die Hermitesche DGL

$$x'' - 2tx' + \lambda x = 0,$$

wobei  $\lambda \in \mathbb{R}$  fest sei. Dann sind  $a_1(t) = -2t$  und  $a_0(t) = \lambda$  spezielle Potenzreihen um 0 auf  $\mathbb{R}$ .

Wir machen den Lösungsansatz

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k$$

mit  $t \in \mathbb{R}$ . Differenzieren wir diese Gleichung und setzen sie dann in die Hermitesche DGL ein, so erhalten wir

$$0 = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k t^{k-2} - 2t \sum_{k=1}^{\infty} k p_k t^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^k = 0 \quad \forall t \in I$$

und somit 
$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)p_{k+2} - 2k p_k + \lambda p_k) t^k \quad \forall t \in I.$$

Mit dem Identitätssatz für Potenzreihen folgt dann

$$(k+2)(k+1)p_{k+2} = (2k - \lambda)p_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \text{ d.h.}$$

$$p_{k+2} = \frac{2k - \lambda}{(k+2)(k+1)} p_k.$$

Wir haben also eine Rekursionsformel für die Koeffizienten  $p_k$ . Es ist dann

$$x(t) = p_0 \left( \overbrace{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(4-\lambda)(8-\lambda) \cdots (4(k-1)-\lambda)}{(2k)!} \cdot t^{2k}}^{=:x_1[\lambda](t)} \right) +$$

$$+ p_1 \left( \overbrace{t + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2-\lambda)(6-\lambda) \cdots (4k-2-\lambda)}{(2k+1)!} \cdot t^{2k+1}}^{=:x_2[\lambda](t)} \right)$$

die allgemeine Lösung der Hermiteschen DGL, wobei  $p_0, p_1 \in \mathbb{R}$ .

**Bemerkung:**

- Ist  $\lambda = 4n$  für  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $x_1[\lambda](t)$  ein Polynom vom Grad  $2n$

$$x_1[\lambda](t) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k 4^k \cdot \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{(2k)!} \cdot t^{2k}.$$

- Ist  $\lambda = 4n + 2$  für  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $x_2[\lambda](t)$  ein Polynom vom Grad  $2n + 1$

$$x_2[\lambda](t) = t + \sum_{k=1}^n (-1)^k 4^k \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1))}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$

Die normierten Polynome

$$H_n(t) := \begin{cases} (-1)^m \frac{n!}{m!} x_1[n](t) & : n = 2m \\ (-1)^m \frac{n!}{m!} 2x_2[n](t) & : n = 2m + 1 \end{cases}$$

heißen Hermitesche Polynome. Es gilt

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^{(n)}}{dt^{(n)}} (e^{-t^2}).$$

Weitere Beispiele findet man im Buch von H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen:

- Airysche DGL:  $x'' - tx = 0$  (Heuser, S. 261)
- Tschebyscheffsche DGL:  $(1 - t^2)x'' - tx + \lambda^2 x = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Heuser, S. 266)
- Legendresche DGL:  $(1 - t^2)x'' - 2tx + \lambda(\lambda + 1)x = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Heuser, S. 266)

## 8.5 Anwendung: Kurventheorie im $\mathbb{R}^n$

[Literatur: W. Kühnel, Differentialgeometrie, Vieweg, 1999]

### 8.5.1 Einleitung

Wir betrachten  $C^\infty$ -Kurven  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die regulär sein sollen, d.h.  $\gamma'(t) \neq 0 \forall t$ .

Wie kann man solche Kurven unterscheiden? Dazu benutzt man zwei Größen.

$\rightsquigarrow$  Länge:  $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ .

$\rightsquigarrow$  Krümmungen: Dieser Begriff ist wesentlich für die Beschreibung von Kurven und wird noch zu definieren sein. Er beschreibt die Abweichung einer Kurve von einer Gerade, einer Ebene usw.

Wann möchte man Kurven  $\gamma, \tilde{\gamma}$  als dieselben ansehen?

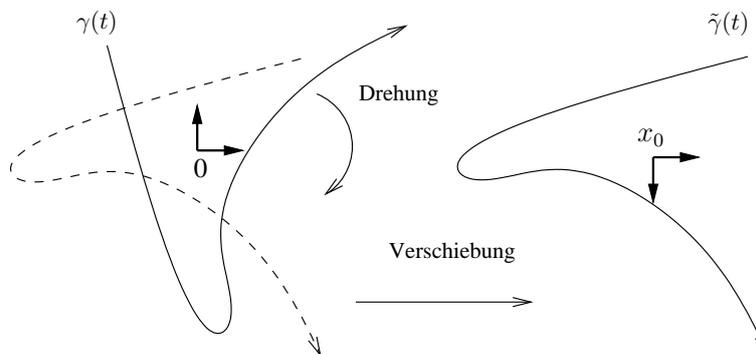
a)  $\tilde{\gamma}$  entsteht aus  $\gamma$  durch orientierungserhaltende Umparametrisierung

$$\begin{aligned} \tau : \tilde{I} &\rightarrow I \quad \text{ein Diffeomorphismus mit} \quad \tau' > 0 \\ \tilde{\gamma} &= \gamma \circ \tau. \end{aligned}$$

b)  $\tilde{\gamma}$  entsteht aus  $\gamma$  durch eine eigentliche Euklidische Bewegung im  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x_0 + Ax \quad , \text{ mit } x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ fixiert (Verschiebung um } x_0) \text{ und} \\ &A \in SO(n) \text{ (Drehung)}. \end{aligned}$$

Eine solche Euklidische Bewegung entspricht der Einführung eines neuen Koordinatensystems, in dem die gleiche Kurve beschrieben werden kann. Man sagt  $\gamma$  ist kongruent zu  $\tilde{\gamma}$  ( $\gamma \approx \tilde{\gamma}$ ) genau dann, wenn  $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$  mit einer euklidischen Bewegung  $F$ .



Aus Analysis II kennen wir bereit die folgenden Eigenschaften der Bogenlänge:

1. Für eine umparametrisierte Kurve  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$  gilt  $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$ .
2. Für ein euklidisch bewegte Kurve  $\tilde{\gamma} = x_0 + A\gamma$  gilt ebenfalls  $l(\tilde{\gamma}) = l(\gamma)$ .
3. Eine Kurve heißt nach ihrer Bogenlänge parametrisiert, falls

$$l(\gamma|_{[s,t]}) = t - s = \text{Länge des durchlaufenen Parameterbereiches.}$$

Dann gilt

- $\gamma$  ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn  $\|\gamma'(t)\| \equiv 1$ .
- Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regulär. Dann existiert eine orientierungserhaltende Umparametrisierung  $\tau : \tilde{I} \rightarrow I$ , so daß  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \tau$  nach Bogenlänge parametrisiert ist.

**Ziel:** Wir suchen ein vollständiges Invariantensystem für (auf Bogenlänge parametrisierte) Kurven, d.h. wir suchen Größen, die entscheiden, ob  $\gamma = \delta$ . Bei diesen Größen wird es sich um  $(n-1)$  Funktionen handeln (sogenannte Krümmungen), die man  $\gamma$  zuordnet:  $k_1^\gamma, \dots, k_{n-1}^\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\gamma = \delta \iff k_j^\gamma = k_j^\delta \text{ für } j = 1, \dots, n-1.$$

Diese wurden von *Frenet* (1847) und *Serret* (1851) definiert und studiert. Man schränkt sich dabei auf Kurven „in allgemeiner Lage“ ein.

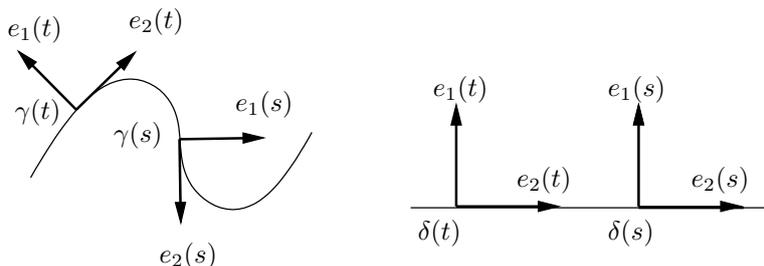
### 8.5.2 Frenet-Kurven und deren Krümmungen

**Definition 8.19** Eine  $C^\infty$ -Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt Frenet-Kurve (allgemein gekrümmt), falls die Vektoren

$$\gamma'(t), \gamma''(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$$

linear unabhängig sind für alle  $t \in I$ .

Insbesondere ist eine Frenet-Kurve regulär und liegt nicht in einer  $(n-2)$ -dimensionalen Ebene des  $\mathbb{R}^n$ . Die **Idee** besteht nun in folgendem: Die Krümmungen von  $\gamma$  beschreibt man durch die Änderung eines begleitenden Euklidischen Koordinatensystems.



Wir ordnen jedem Kurvenpunkt  $\gamma(t)$  ein Euklidisches Koordinatensystem  $(\gamma(t); e_1(t), \dots, e_n(t))$  zu, so daß:

- die Abbildungen  $e_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind  $C^\infty$ ,
- $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis, d.h.

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij} \text{ und}$$

$$\det(\underbrace{e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)}_{\text{als Spaltenvektoren}}) = 1.$$

Dazu orthonormieren wir die linear unabhängigen Vektoren  $\gamma'(t), \dots, \gamma^{(n-1)}(t)$  nach dem Erhard-Schmittschen Orthonormalisierungsverfahren:

$$e_1(t) := \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

$$e_j(t) := \frac{\gamma^{(j)}(t) - \sum_{k=1}^{j-1} \langle \gamma^{(j)}(t), e_k(t) \rangle e_k(t)}{\left\| \gamma^{(j)}(t) - \sum_{k=1}^{j-1} \langle \gamma^{(j)}(t), e_k(t) \rangle e_k(t) \right\|} \quad \text{für } j = 2, \dots, n-1$$

$$e_n(t) := e_1(t) \times \dots \times e_{n-1}(t).$$

Dabei ist  $\times$  das Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^n$ , welches wie folgt definiert ist:

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n-1 \text{ mal}} \xrightarrow{\times} \mathbb{R}^n$$

$$(a_1, \dots, a_{n-1}) \longmapsto a_1 \times \dots \times a_{n-1} := \text{der eindeutig definierte Vektor mit}$$

$$\det(a_1, \dots, a_{n-1}, y) = \langle a_1 \times \dots \times a_{n-1}, y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Für das Vektorprodukt gelten dann die folgenden Eigenschaften:

- $a_1 \times \dots \times a_{n-1} = 0$  genau dann, wenn  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  linear abhängig,
- $a_1 \times \dots \times a_{n-1} \perp \text{span}(a_1, \dots, a_n)$ ,
- $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \times \dots \times a_{n-1})$  ist positiv orientiert,
- Die Länge  $\|a_1 \times \dots \times a_{n-1}\|$  ist gleich dem Volumen des durch  $a_1, \dots, a_{n-1}$  erzeugten Parallelepipeds.

Sind also  $a_1, \dots, a_{n-1}$  orthonormale Vektoren, so ist  $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_1 \times \dots \times a_{n-1})$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis im  $\mathbb{R}^n$ .

Seien nun  $e_1(t), \dots, e_n(t)$  die oben definierten orthonormalen Vektoren entlang einer Kurve  $\gamma(t)$ . Dann gilt:

1.  $\text{span}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)}(t)) = \text{span}(e_1(t), \dots, e_j(t))$  für alle  $t \in I$  und  $j = 1, \dots, n-1$ .
2. Die Vektoren  $(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)}(t))$  und  $(e_1(t), \dots, e_j(t))$  sind gleichorientiert für alle  $t$ , d.h. die Übergangsmatrix hat eine positive Determinante.
3.  $e_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist  $C^\infty$ .
4.  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis für alle  $t \in I$ .

$(e_1, \dots, e_n)$  mit diesen Eigenschaften ist eindeutig bestimmt.

**Definition 8.20**  $(\gamma(t); e_1(t), \dots, e_n(t))$  heißt begleitendes Frenetsches Koordinatensystem von  $\gamma$ .

Wie ändert sich nun ein Frenetsches Koordinatensystem mit der Zeit  $t$ ?

Sei dazu  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Frenetsche Kurve und  $(\gamma(t); e_1(t), \dots, e_n(t))$  das Frenetsche Koordinatensystem zu  $\gamma$ . Wir betrachten dann die Funktionen

$$e'_j(t) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{zeitliche Änderung von } e_j.$$

Wir stellen nun den Vektor  $e'_j(t)$  in der Basis  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  dar:

$$e'_j(t) = \sum_{k=1}^n \omega_{jk}(t) e_k(t),$$

$$\text{d.h.} \quad \omega_{jk} = \langle e'_j(t), e_k(t) \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Es gilt der

**Satz 8.42** Sei  $(\gamma(t); e_1(t), \dots, e_n(t))$  das begleitende Frenetsche Koordinatensystem einer Frenet-Kurve  $\gamma$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} e'_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12}(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -\omega_{12}(t) & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \omega_{n-1n}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -\omega_{n-1n}(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n(t) \end{pmatrix},$$

d.h. die  $\omega_{ij}$  erfüllen für jedes  $t \in I$

$$\begin{aligned} \omega_{kj}(t) &= -\omega_{jk}(t), \\ \omega_{jk} &= 0 \text{ für } k > j + 1. \end{aligned}$$

**Beweis:** Da  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  eine Orthonormalbasis ist, gilt  $\langle e_j(t), e_k(t) \rangle = \delta_{jk}$ . Differenziert man diese Beziehung nach  $t$ , so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e'_j(t), e_k(t) \rangle + \langle e_j(t), e'_k(t) \rangle \\ &= \omega_{jk}(t) + \omega_{kj}(t). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt, daß  $e_j(t) \in \text{span}(\gamma'(t), \dots, \gamma^{(j)})$  und damit

$$e'_j(t) \in \text{span}(\gamma''(t), \dots, \gamma^{(j+1)}) \subset \text{span}(e_1(t), \dots, e_{j+1}(t)).$$

Somit ist aber  $\langle e'_j(t), e_k(t) \rangle = 0$  für  $k > j + 1$ . □

**Definition 8.21** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Frenet-Kurve. Die  $C^\infty$ -Funktionen  $k_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch

$$k_j(t) := \frac{\omega_{jj+1}(t)}{\|\gamma'(t)\|} \text{ für } j = 1, \dots, n-1$$

heißen Krümmungen der Frenet-Kurve  $\gamma$ .

Für ein Frenetsches Koordinatensystem  $(\gamma(t); e_1(t), \dots, e_n(t))$  einer Frenet-Kurve  $\gamma$  gilt dann

$$\boxed{\begin{pmatrix} e'_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e'_n(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1(t) & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & k_{n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n(t) \end{pmatrix}.$$

Dies sind die Frenetschen Formeln für  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Es gilt

**Satz 8.43** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Frenet-Kurve. Die Krümmungen  $k_j : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  erfüllen dann:

1.  $k_j(t) > 0$  für alle  $t \in I$  und für  $j = 1, \dots, n-2$ .
2. Ist  $\tau : \tilde{I} \rightarrow I$  eine orientierungserhaltende Parametertransformation ( $\tau' > 0$ ) und  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$  die Umparametrisierung von  $\gamma$ , so ist  $\tilde{\gamma}$  eine Frenet-Kurve und es gilt für die Krümmung von  $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{k}_j(t) = k_j(\tau(t)) \text{ für } j = 1, \dots, n-1.$$

3. Ist  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine eigentliche Euklidische Bewegung, d.h.  $F(x) = x_0 + Ax$  mit  $x_0$  fixiert in  $\mathbb{R}^n$  und  $A \in SO(n)$ , und sei  $\hat{\gamma} = F \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\hat{\gamma}$  eine Frenet-Kurve, für deren Krümmungen gilt, daß

$$\hat{k}_j(t) = k_j(t) \text{ für } j = 1, \dots, \mathbb{R}^n.$$

**Beweis:** Der Beweis bleibt als Übungsaufgabe. □

Wir beweisen nun den

**Satz 8.44 (Hauptsatz der Kurventheorie)** Seien  $k_1, \dots, k_{n-1} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatte Funktionen mit  $k_1, \dots, k_{n-2} > 0$ . Dann existiert eine auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit den Krümmungen  $k_1, \dots, k_{n-1}$ .

Ist  $\tilde{\gamma}$  eine weitere auf Bogenlänge parametrisierte Kurve mit den Krümmungen  $k_1, \dots, k_{n-1}$ , so existiert eine eigentliche Euklidische Bewegung  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\tilde{\gamma} = F \circ \gamma$ .

(D.h. die Krümmungen sind ein vollständiges Invariantensystem für die Kongruenzklassen von Frenet-Kurven.)

**Beweis:** Seien  $k_1, \dots, k_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  gegeben. Wir betrachten das lineare Differentialgleichungssystem im  $\mathbb{R}^{n^2}$  für die Funktionen  $e_1, \dots, e_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\left( \begin{array}{c} e_1'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n'(t) \end{array} \right) = \|\gamma'(t)\| \left( \begin{array}{cccccc} 0 & k_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1(t) & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & k_{n-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -k_{n-1}(t) & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} e_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n(t) \end{array} \right) \quad (8.61)$$

mit den Anfangsbedingungen  $e_j(t_0) = a_j \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $(a_1, \dots, a_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis ist.

Aus dem Abschnitt 8.3. wissen wir:

Es existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems (8.61) auf dem gesamten Intervall  $I$ . Die Lösung

$$(e_1, \dots, e_n) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$$

ist  $C^\infty$ , da die Koeffizientenmatrix  $C^\infty$  ist.

Weiterhin gelten die folgenden Behauptungen:

1.  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.
2. Diese bestimmt eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve  $\gamma$  mit dem Frenetschen Koordinatensystem  $(\gamma(t); e_1(t), \dots, e_n(t))$ .
3. Diese Kurve  $\gamma$  ist eindeutig modulo eigentlicher Euklidischer Bewegungen.

Wir zeigen

1.) Dazu betrachten wir die Funktionen  $f_{ij}(t) := \langle e_i(t), e_j(t) \rangle$ . Diese erfüllen die DGL'en

$$\begin{aligned} f_{ij}'(t) &= \langle e_i(t)', e_j(t) \rangle + \langle e_i(t), e_j'(t) \rangle \\ &= -k_{i-1} \langle e_{i-1}(t), e_j(t) \rangle + k_i \langle e_{i+1}(t), e_j(t) \rangle - k_{j-1} \langle e_i(t), e_{j-1}(t) \rangle + k_j \langle e_i(t), e_{j+1}(t) \rangle \\ &= -k_{i-1} f_{i-1j}(t) + k_i f_{i+1j}(t) - k_{j-1} f_{ij-1}(t) + k_j f_{ij+1}(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen  $f_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ .

Dies ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit Anfangsbedingungen. Es existiert also genau eine Lösung, und zwar

$$f_{ij} = \delta_{ij}. \quad (\text{Einsetzen!})$$

Das heißt aber, daß  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  eine Orthonormalbasis für jedes  $t \in I$  ist.

Es ist nach Wahl der Anfangsbedingung  $\det(e_1(t_0), \dots, e_n(t_0)) > 0$ . Nun ist  $\det(e_1(t), \dots, e_n(t))$  stetig in  $t$  und  $I$  zusammenhängend. Daher ist  $\det(e_1(t), \dots, e_n(t)) > 0$  für alle  $t \in I$ , d.h.  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

2.) Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  fixiert. Wir betrachten die  $C^\infty$ -Kurve

$$\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t e_1(s) ds \quad \forall t \in I.$$

Dann ist

- $\gamma(t_0) = x_0$ ,
- $\gamma'(t) = e_1(t)$ , d.h.  $\gamma$  ist auf Bogenlänge parametrisiert,
- $\gamma$  ist  $C^\infty$  auf  $I$ .

Die Behauptung lautet nun

$(\gamma(t); e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist ein Frenetsches Koordinatensystem von  $\gamma$ .

Wir beweisen zunächst die folgende Formel

$$\gamma^{(j)}(t) = e_j(t) \cdot \left( \prod_{r=1}^{j-1} k_r(t) \right) \text{ mod span}(e_1(t), \dots, e_{j-1}(t)) \quad (8.62)$$

für  $j = 2, \dots, n-1$ . Dazu führen wir eine Induktion über  $j$  durch.

- Induktionsanfang: Es ist  $\gamma' = e_1$  und damit  $\gamma'' = e_1' = k_1 e_2$ .
- $j \rightsquigarrow j+1$ : Es ist

$$\begin{aligned} \gamma^{(j+1)} &= (\gamma^{(j)})' \\ &= \left( e_j \cdot \prod_{r=1}^{j-1} k_r + \sum_{l=1}^{j-1} a_l e_l \right)' \\ &= e_j' \cdot \prod_{r=1}^{j-1} k_r \text{ mod span}(e_1, \dots, e_j) \\ &\stackrel{\text{DGL}}{=} e_{j+1}(t) \cdot \prod_{r=1}^j k_r \text{ mod span}(e_1, \dots, e_j) \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen.

Wir haben also

a)  $\text{span}(\gamma', \dots, \gamma^{(j)}) = \text{span}(e_1, \dots, e_j)$ ,

b)  $(\gamma', \dots, \gamma^{(j)}) \sim (e_1, \dots, e_j)$  mit der Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & k_1 & & & \\ & & k_1 k_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \prod_{r=1}^{j-1} k_r \end{pmatrix}.$$

Da nun  $k_1, \dots, k_{n-2} > 0$  ist  $\det M > 0$

c)  $(e_1(t), \dots, e_n(t))$  ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Da nun das Frenetsche Koordinatensystem durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, haben wir 2. bewiesen.

3.) Sei  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine weitere auf Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve mit den Krümmungen  $k_1, \dots, k_{n-1}$ . Sei weiterhin  $(\tilde{\gamma}(t); \tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t))$  das Frenetsche Koordinatensystem zu  $\tilde{\gamma}$ .

Nun ist  $(\tilde{e}_1(t), \dots, \tilde{e}_n(t))$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis, d.h. es existiert ein  $A \in SO(n)$  mit

$$A e_j(t_0) = \tilde{e}_j(t_0) \quad j = 1, \dots, n.$$

Dann erfüllen  $\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \vdots \\ \tilde{e}_n \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} A e_1 \\ \vdots \\ A e_n \end{pmatrix}$  das DGL-System (8.61) mit der gleichen Anfangsbedingung in  $t_0$ . Dies ist klar, denn es ist

$$\begin{aligned} (A e_j)' &= A e_j' \\ &= A(-k_{j-1} e_{j-1} + k_j e_{j+1}) \\ &= -k_{j-1} A e_{j-1} + k_j A e_{j+1}. \end{aligned}$$

Damit ist aber wegen der Eindeutigkeit der Lösung  $\tilde{e}_j = A e_j$  auf  $I$ .

Insbesondere gilt

$$\tilde{\gamma}'(t) = A \gamma'(t) = (A \gamma)'(t) \quad \text{d.h.} \quad (\tilde{\gamma} - A \gamma)' \equiv 0.$$

Das heißt aber  $\tilde{\gamma}(t) = A \gamma(t) + a_0$  mit  $a_0 \in \mathbb{R}^n$  konstant. □

### 8.5.3 Berechnung und geometrische Deutung der Krümmung in Spezialfällen

#### 8.5.3.1 Kurven im $\mathbb{R}^2$

Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^2$ . Das Frenetsche Koordinatensystem ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} && \underline{\text{Tangentenvektor}}, \\ e_2(t) &= D_{\frac{\pi}{2}}(e_1(t)) && \underline{\text{Normalenvektor}}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $D_{\frac{\pi}{2}}$  die Drehung um  $\frac{\pi}{2}$  gegen den Uhrzeigersinn, d.h.

$$D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & -\sin \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad D_{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Frenetsche Formel:

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k(t) \\ -k(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei heißt  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  Krümmung von  $\gamma$ .

Es gilt der

**Satz 8.45** Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine reguläre Kurve. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:

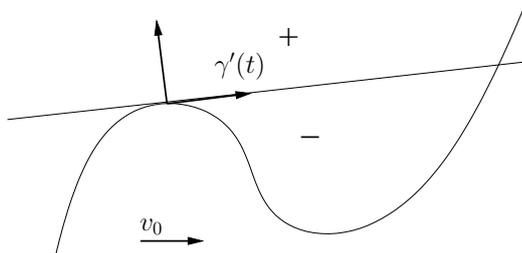
1. Sei  $v_0 \in \mathbb{R}^2$  fixiert,  $v_0 \neq 0$ .  $\omega(t) := \sphericalangle(v_0, \gamma'(t))$  sei der positiv orientierte Drehwinkel. Dann gilt

$$k(t) = \frac{\omega'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

D.h. die Krümmung einer auf Bogenlänge parametrisierten Kurve ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Tangente der Kurve dreht.

2. Sei  $\text{Tan}_{t_0}\gamma := \gamma(t_0) + \mathbb{R} \cdot \gamma'(t_0)$  die Tangente im Parameter  $t_0$ . Dann gilt in den beiden Fällen

- $k(t_0) > 0$ :  $\gamma$  liegt nahe  $t_0$  auf der positiven Seite der Tangente.
- $k(t_0) < 0$ :  $\gamma$  liegt nahe  $t_0$  auf der negativen Seite der Tangente.



3. Die Krümmung berechnet sich wie folgt:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

**Beweis:** Der Beweis erfolgt analog wie die folgenden für Aussagen im  $\mathbb{R}^3$ . □

Als eine Folgerung aus dem Satz erhält man die folgenden beiden Aussagen.

1. Ist  $k(t) \equiv 0$  so liegt das Bild von  $\gamma$  auf einer Geraden.
2. Ist  $k(t) \equiv r \neq 0$  so liegt das Bild von  $\gamma$  auf einem Kreis mit dem Radius  $\frac{1}{|r|}$ .

### 8.5.3.2 Kurven im $\mathbb{R}^3$

Sei  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine reguläre Kurve im  $\mathbb{R}^3$ . Das Frenetsche Koordinatensystem ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} && \underline{\text{Tangentenvektor}}, \\ e_2(t) &= \frac{\gamma''(t) - \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle}{\|\gamma''(t) - \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle\|} && \underline{\text{Hauptnormalenvektor}}, \\ e_3(t) &= e_1(t) \times e_2(t) \\ &= \frac{\gamma''(t) \times \gamma'(t)}{\|\gamma''(t) \times \gamma'(t)\|} && \underline{\text{Binormalenvektor}}. \end{aligned}$$

Wir erhalten als Frenetsche Formeln:

$$\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{pmatrix} = \|\gamma'(t)\| \begin{pmatrix} 0 & k(t) & 0 \\ -k(t) & 0 & \tau(t) \\ 0 & -\tau(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix}.$$

Dabei heißt  $k$  Krümmung und  $\tau$  Windung oder Torsion von  $\gamma$ .

**Formeln zur Berechnung von Krümmung und Windung:** Sei zunächst  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf Bogenlänge parametrisiert. Dann ist  $e_1(t) = \gamma'(t)$ , was  $\gamma' \perp \gamma''$  zur Folge hat. Damit vereinfacht sich der Rest des Frenetschen Koordinatensystems und man erhält:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \gamma'(t) \\ e_2(t) &= \frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|} \\ e_3(t) &= \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}. \end{aligned}$$

Für die Frenetschen Formeln ergibt dies

$$e_1'(t) = \gamma''(t) = k(t) e_2(t) \text{ mit } k(t) > 0.$$

Daraus erhält man die folgende Beziehung, wegen der man  $\gamma''$  auch Krümmungsvektor nennt:

$$\boxed{k(t) = \|\gamma''(t)\|}. \quad (8.63)$$

Weiter hat man

$$e_2'(t) = -k e_1 + \tau e_3.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \langle e_2'(t), e_3(t) \rangle \\ &= \left\langle \frac{\gamma'''(t)}{k(t)} + \gamma''(t) \left( \frac{1}{k(t)} \right)', \frac{\gamma'(t) \times \gamma''(t)}{k(t)} \right\rangle \\ &= \frac{1}{k^2(t)} \langle \gamma'''(t), \gamma'(t) \times \gamma''(t) \rangle \end{aligned}$$

und damit als Formel für die Windung

$$\boxed{\tau(t) = \det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}. \quad (8.64)$$

Daraus erhält man die Formeln für eine beliebige Frenet-Kurve.

**Satz 8.46** Für die Krümmung und Windung einer Frenet-Kurve  $\gamma : I \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad (8.65)$$

$$\tau(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{k^2(t) \cdot \|\gamma'(t)\|^6}. \quad (8.66)$$

**Beweis:** Wir parametrisieren  $\gamma$  auf Bogenlänge um. Sei  $a \in I$  fixiert und

$$l(t) := \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds.$$

Dann ist  $l : I \rightarrow \tilde{I} := l(I)$  und monoton wachsend, da  $l'(t) = \|\gamma'(t)\|$ . Nun betrachten wir die Kurve

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : \tilde{I} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ definiert durch:} \\ \tilde{\gamma}(l(t)) &= \gamma(t). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(l(t)) l'(t) &= \gamma'(t) \text{ und damit} \\ \|\tilde{\gamma}(l(t))\| &= \frac{\|\gamma'(t)\|}{l'(t)} \\ &= 1, \end{aligned}$$

d.h.  $\tilde{\gamma}$  ist auf Bogenlänge parametrisiert.

Dann ergibt sich aus Satz 8.43 für die Krümmung und Windung von  $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} \tilde{k}(l(t)) &= K(t) \\ \tilde{\tau}(l(t)) &= \tau(t). \end{aligned}$$

Man errechnet nun

$$\begin{aligned} \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} &= \frac{1}{(l'(t))^3} (\tilde{\gamma}'(l(t)) \cdot l'(t)) \times (\tilde{\gamma}''(l(t)) \cdot (l'(t))^2 + \tilde{\gamma}'(l(t)) l''(t)) \\ &= \frac{1}{(l'(t))^3} \|\tilde{\gamma}'(l(t)) \times \tilde{\gamma}''(l(t))\| (l'(t))^3 \\ &= \|\tilde{\gamma}'(l(t)) \times \tilde{\gamma}''(l(t))\| \\ &= \|\tilde{\gamma}''(l(t))\| \\ &\stackrel{(8.63)}{=} \tilde{k}(l(t)) \\ &= k(t). \end{aligned}$$

Damit ist die Formel für die Krümmung bewiesen.

Für die Windung errechnet man zunächst:

$$\gamma''' = \tilde{\gamma}'''(l) \cdot (l')^3 + 3\tilde{\gamma}''(l) \cdot l' \cdot l'' + \tilde{\gamma}'(l) \cdot l'''.$$

Damit ergibt sich

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = (l')^6 \cdot \det(\tilde{\gamma}'(l), \tilde{\gamma}''(l), \tilde{\gamma}'''(l)).$$

Da  $\tilde{\gamma}$  nun auf Bogenlänge parametrisiert war, ergibt sich aus (8.64)

$$\det(\gamma', \gamma'', \gamma''') = \|\gamma'\|^6 \cdot \tilde{\tau}(l) \cdot \tilde{k}(l)^2$$

und somit für die Windung

$$\tau(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma'\|^6 \cdot \tilde{k}(l(t))^2}.$$

□

### 8.5.3.3 Geometrische Bedeutung von Krümmung und Windung von Raumkurven

Sei  $\gamma$  eine auf Bogenlänge parametrisierte Kurve im  $\mathbb{R}^3$ .

**Definition 8.22** Sei  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  ein Frenetsches Koordinatensystem der Kurve  $\gamma$ . Dann nennt man

$$\text{Binorm}_t \gamma := \gamma(t) + \mathbb{R}e_3(t)$$

die Binormale und

$$E_s^\gamma(t) := \gamma(t) + \text{span}(\gamma'(t), \gamma''(t))$$

die Schmiegebene von  $\gamma$  in  $t$ .

Weiterhin definiert man den Drehwinkel der Binormalen

$$\nu_{t_0}(t) := \sphericalangle(e_3(t_0), e_3(t)).$$

Für die Schmiegebene gilt dann, dass

$$E_s(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0^*} (\text{Ebene durch } \gamma(t_0), \gamma(t_0 + h), \gamma(t_0 - h)).$$

Damit ist der Drehwinkel der Binormalen gleich dem Drehwinkel der Schmiegebene

$$\nu_{t_0}(t) = \sphericalangle(E_s(t_0), E_s(t)).$$

Es gilt der

**Satz 8.47** Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  auf Bogenlänge parametrisiert und  $t_0 \in I$  fixiert. Dann gelten die folgenden Eigenschaften

1. Für den nichtorientierten Winkel  $\omega_{t_0}(t) := \sphericalangle(\gamma'(t_0), \gamma'(t)) \in [0, \pi]$  gilt

$$k(t_0) = \omega'_{t_0}(t_0).$$

D.h.  $k$  misst die Geschwindigkeit, mit der sich die Tangente dreht.

2. Für den Drehwinkel des Binormalenvektors gilt

$$|\tau(t_0)| = \nu'_{t_0}(t_0).$$

D.h. der Betrag der Windung beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich die Binormale (bzw. die Schmiegebene) dreht.

**Beweis:** Da  $\|\gamma'(t)\| = 1$  gilt

$$\sin\left(\frac{\omega_{t_0}(t)}{2}\right) = \frac{\|\gamma'(t) - \gamma'(t_0)\|}{2}. \quad (8.67)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \omega'_{t_0}(t_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega_{t_0}(t_0 + h) - \overbrace{\omega_{t_0}(t_0)}^{=0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega_{t_0}(t_0 + h)}{h} \\ &\stackrel{(8.67)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \underbrace{\frac{\gamma'(t_0 + h) - \gamma'(t_0)}{h}}_{\rightarrow_{h \rightarrow 0} \|\gamma''(t)\|} \cdot \underbrace{\frac{\omega_{t_0}(t_0 + h)}{2} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega_{t_0}(t_0 + h)}{2}\right)}}_{\rightarrow_{h \rightarrow 0} 1} \right) \\ &= k(t_0). \end{aligned}$$

Für die zweite Aussage benutzt man die Beziehung

$$\sin\left(\frac{\nu_{t_0}(t)}{2}\right) = \frac{\|e_3(t) - e_3(t_0)\|}{2}$$

und rechnet dann analog

$$\begin{aligned}\nu'_{t_0}(t_0) &= \|e'_3(t_0)\| \\ &= \|- \tau(t_0) e_2(t_0)\| \\ &= |\tau(t_0)|.\end{aligned}$$

□

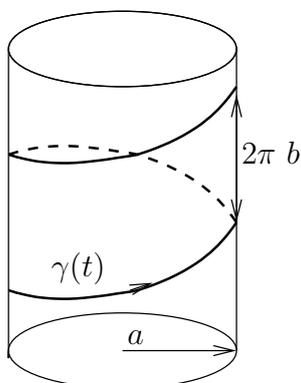
Als **Folgerung** aus diesem Satz ergibt sich:

$\tau \equiv 0$  genau dann, wenn das Bild von  $\gamma$  in einer Ebene liegt( d.h.  $E_s^\gamma(t_0)$  dreht sich nicht).

Das ist klar, denn man hat

$$\begin{aligned}\tau \equiv 0 &\iff e_3(t) = \text{const} = v_0 \\ &\iff \langle \gamma'(t), e_3(t) \rangle = 0 = \langle \gamma'(t), v_0 \rangle \\ &\iff \underbrace{\langle \gamma(t), v_0 \rangle = \text{const.}} \\ &= \text{Ebenengleichung}\end{aligned}$$

**Beispiel:** Die einzigen Kurven mit konstanter Krümmung und Windung sind Stücke von Geraden, Kreisen und Schraubenlinien.



Schraubenlinien sind definiert durch

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$k(t) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{und} \quad \tau(t) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

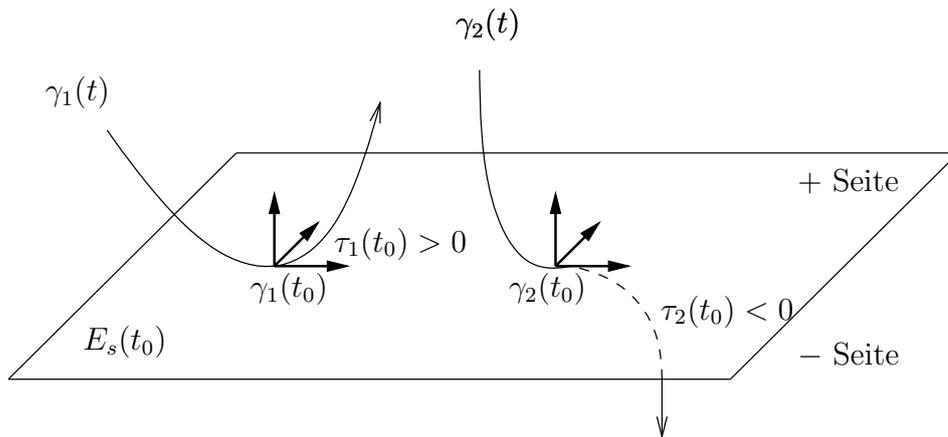
Welche Interpretation hat das Vorzeichen der Krümmung?

Wir betrachten die Schmiegebene in  $t$

$$\begin{aligned}E_s(t) &= \gamma(t) + \text{span}(e_1(t), e_2(t)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (\text{Ebene durch } \gamma(t), \gamma(t+h), \gamma(t-h))\end{aligned}$$

Es gilt:

- Ist  $\tau(t_0) > 0$ , so durchstößt die Kurve  $\gamma$  in  $t = t_0$  die Schmiegebene  $E_s(t_0)$  von der negativen zur positiven Seite.
- Ist  $\tau(t_0) < 0$ , so durchstößt die Kurve  $\gamma$  in  $t = t_0$  die Schmiegebene  $E_s(t_0)$  von der positiven zur negativen Seite.



Dazu betrachten wir die Kurve  $\gamma(t)$  in einem fixierten Koordinatensystem  $(\gamma(t_0); e_1(t_0), e_2(t_0), e_3(t_0))$  und die Taylorentwicklung von  $\gamma$  um  $t_0$ :

$$\begin{aligned} \gamma(t) - \gamma(t_0) &= \gamma'(t_0)(t - t_0) + \gamma''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2} + \gamma'''(t_0) \frac{(t - t_0)^3}{6} + \mathcal{O}((t - t_0)^3) \\ &= x(t)e_1(t_0) + y(t)e_2(t_0) + z(t)e_3(t_0). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= e_1(t) \text{ da } \gamma \text{ auf Bogenlänge parametrisiert ist,} \\ \gamma'' &= e_1'(t) \\ &= k(t)e_2(t) \\ \gamma'''(t) &= k'(t)e_2(t) + k(t)e_2'(t) \\ &= k'(t)e_2(t) + k(t)(-k(t)e_1(t) + \tau(t)e_3(t)). \end{aligned}$$

Macht man nun einen Koeffizientenvergleich vor  $e_3(t_0)$ , so erhält man:

$$z(t) = \underbrace{k(t_0)}_{>0} \cdot \tau(t_0) \cdot \frac{(t - t_0)^3}{6} + \mathcal{O}((t - t_0)^3).$$

Ist nun

$$\begin{aligned} \tau(t_0) > 0, \text{ so ist } z(t) < 0 \text{ falls } t < t_0 \\ \text{und } z(t) < 0 \text{ falls } t > t_0, \\ \text{d.h. } \gamma \text{ läuft von } - \text{ nach } +, \\ \tau(t_0) < 0, \text{ so } \gamma \text{ läuft von } + \text{ nach } -. \end{aligned}$$

□

## 8.6 Wiederholungsfragen zur Prüfungsvorbereitung

Die folgenden Fragen fassen den in Kapitel 8 behandelten Stoff zusammen. Sie sollen die Vorbereitung auf die Analysisprüfung erleichtern. Sie sollen in der mündlichen Prüfung nachweisen, dass Sie den Stoff dieses Kapitels verstanden haben und ihn so sicher beherrschen, dass Sie einzelne der behandelten Themen zusammenhängend darlegen können. Dazu gehören klar formulierte Definitionen (die man ggf. durch Beispiele und Gegenbeispiele illustrieren kann), die Beweise bzw. Beweisideen zu den formulierten Aussagen und die Erläuterung von Bezügen zu anderen Themen der Vorlesung. Außerdem sollten Sie den Vorlesungsstoff auf die Lösung von Aufgaben anwenden können (wie in der Übung behandelt bzw. in den wöchentlichen Hausaufgaben gestellt wurden).

1. Was ist eine gewöhnliche Differentialgleichung? Wo treten solche Gleichungen auf (Beispiele)?
2. Erläutern Sie den Reduktionsprozess einer Differentialgleichung  $k$ . Ordnung auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung.
3. Was versteht man unter der Integralkurve eines Vektorfeldes? Wie hängt dieser Begriff mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zusammen?
4. Erläutern Sie die elementaren Integrationsmethoden für folgende Klassen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit einer Variablen:
  - Differentialgleichung mit getrennten Variablen
  - Euler-homogene Differentialgleichung
  - DGL  $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{pt+qx+v}\right)$
  - Exakte Differentialgleichung
  - Lineare Differentialgleichung
  - Bernoullische Differentialgleichung
  - Riccatische Differentialgleichung
5. Welche Kriterien für die Kompaktheit von Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes kennen Sie. Formulieren Sie insbesondere den Satz von Arzela-Ascoli (Kompaktheitskriterium für Teilmengen des Banachraumes der stetigen Abbildungen eines kompakten metrischen Raumes in einen endlich-dimensionalen normierten Vektorraum) und erläutern Sie die Beweisidee.
6. Formulieren und beweisen Sie die Beziehung zwischen gewöhnlichen Differentialgleichungen und Integralgleichungen.
7. Erläutern Sie die Aussagen und Beweisideen der Fixpunktsätze von Banach, Brouwer und Schauder. Wo werden diese Sätze in der Theorie der Differentialgleichungen angewendet?
8. Was wissen Sie über Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für eine gewöhnliche Differentialgleichung (Satz von Cauchy-Peano, Satz von Picard-Lindelöf)? Erläutern Sie die Beweisideen.
9. Was wissen Sie über die Abhängigkeit der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung von den Anfangswerten bzw. von Parametern?

10. Definieren Sie den Begriff der maximalen Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung. Erläutern Sie deren Existenz. Nennen Sie Eigenschaften der maximalen Lösung für spezielle Klassen von Differentialgleichungen.
11. Wie sieht die allgemeine Struktur des Lösungsraumes einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung im  $\mathbb{R}^n$  aus (Beweis)? Was ist ein Fundamentalsystem einer linearen homogenen Differentialgleichung? Wie erhält man aus dem Fundamentalsystem des homogenen Teils einer linearen DGL eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen DGL?
12. Definieren Sie den Begriff des Exponentials einer Matrix (oder allgemeiner des Exponentials eines Elementes einer Banachalgebra) und nennen Sie seine Eigenschaften (mit Beweis).
13. Geben Sie die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mittels des Exponentials der Koeffizientenmatrix  $A$  an (Beweis). Leiten Sie daraus die spezielle Form des Fundamentalsystems her, die man aus der Jordanschen Normalform von  $A$  erhält (im komplexen und reellen Fall).
14. Erläutern Sie das Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten im  $\mathbb{R}^1$ . Diskutieren Sie den Spezialfall harmonischer Schwingungen mit einem Freiheitsgrad.
15. Welche Lösungsverfahren kennen Sie für lineare DGL höherer Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten im  $\mathbb{R}^1$  (Eulersche Differentialgleichung, Reduktionssatz von d'Alambert, Potenzreihenansatz).
16. Was versteht man unter den Krümmungen einer Frenetkurve im  $\mathbb{R}^n$ ?. Formulieren und beweisen Sie den Hauptsatz der (lokalen) Kurventheorie. Welche Sätze aus der Theorie der gewöhnlichen DGL werden dabei angewendet?. Erläutern Sie die geometrische Bedeutung von Krümmung und Windung von ebenen Kurven und von Raumkurven.

## 8.7 Weitere Literatur zur Vorlesung

- V.I. Arnold: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer-Verlag, 2. Auflage, 2001
- H. Ammann: Gewöhnliche Differentialgleichungen. De Gruyter Lehrbuch, 1994
- H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vieweg + Teubner Wiesbaden 2009
- E. Kamke: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Lösungen und Lösungsmethoden. Teubner-Verlag Stuttgart, 1983
- W. Walter: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Springer-Verlag, 7. Auflage 2000