Kapitel 9

Einführung in die Maß- und Integrationstheorie

Dozentin: Prof. Dr. Helga Baum

Nach Vorlesungen
– im Sommersemester 2002 (1. Teil von Analysis IV),
– im Sommersemester 2008 (1. Teil von Analysis IIIb),
– im Wintesemester 2012/13 (Teil der Analysis III).

Letzte Korrekturen und Änderungen: 27.03.2008 (Helga Baum)

Inhaltsverzeichnis

9.1 Das Problem der Volumendefinition

Einleitend wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob man für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionales Volumen $\mu(A)$ definieren kann, das eine Reihe von vernünftigen Eigenschaften erfüllt? Zum Beispiel soll das Volumen einer klassischen Fläche im $\mathbb{R}^2$ ihr geometrischer Flächeninhalt sein und das Volumen eines "klassischer Körpers" im $\mathbb{R}^3$ sein geometrisches Volumen. Wir stellen außerdem folgende "vernünftige" Forderungen an eine Volumenfunktion μ: μ sei eine Funktion mit nicht negativen Werten

$$\mu : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mu(A) = \text{ Volumen von } A \ \in \ [0, +\infty] := [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. Ist $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie).

2. μ ist translationsinvariant, d.h. für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mu(A + x_0) = \mu(A)$.

3. Ist $W = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader, so ist $\mu(W)$ das geometrische Volumen, d.h.
$$\mu(W) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

4. Sind $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele disjunkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so gilt
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma - \text{Additivität}).$$

Erstaunlicherweise kann man sich sehr schnell davon überzeugen, dass eine solche Volumenfunktion für kein $n \in \mathbb{N}$ existieren kann. Alle Beispiele und Beweise, die dies zeigen, benutzen das Auswahlaxiom. Wir setzen dessen Gültigkeit in diesem Analysis-Grundkurs voraus.

Satz 9.1. *Es existiert keine Funktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften (1)-(4), d.h. ein n-dimensionales Volumen kann nicht für alle Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert werden.*

Beweis: Angenommen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$ wäre eine Abbildung mit den Eigenschaften (1)-(4). Wir betrachten auf $[0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n.$$

Sei $A \subset [0, 1]^n$ eine Teilmenge, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Wir betrachten die Menge
$$B := \bigcup_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}^n} A + \{r\}.$$

Da $\mathbb{Q}^n$ abzählbar ist, ist B die Vereinigung abzählbar vieler Mengen. Des Weiteren gilt

1. B ist eine disjunkte Vereinigung: Sei $r_1 \neq r_2$. Angenommen, $a + r_1 = \hat{a} + r_2$ für $a, \hat{a} \in A$. Dann folgt $a - \hat{a} = r_2 - r_1 \in \mathbb{Q}^n$, d.h. $a \sim \hat{a}$, also $a = \hat{a}$. Somit wäre $r_1 = r_2$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

2. Wir betrachten $\mu(B)$. Nach Definition ist
$$[0, 1]^n \subset B \subset [-1, 2]^n.$$

Aus der Monotonie von μ folgt $1 \leq \mu(B) \leq 3^n$. Wegen der σ-Additivität und der Translationsinvarianz von μ gilt dann auch

$$1 \leq \underbrace{\sum_{r \in [-1,1]^n \cap \mathbb{Q}}^{n} \underbrace{\mu(A + \{r\})}_{=\mu(A)}}_{\mu(B)} \leq 3^n$$

Um $\mu(B)$ zu erhalten, wird $\mu(A)$ unendlich oft addiert. Dies bleibt aber nicht beschränkt, da $\mu(A) > 0$. Damit haben wir einen Widerspruch erhalten. ■

Auch wenn man die Forderungen an das Volumen etwas abschwächt und z.B. an Stelle der σ-Additivität nur noch die Additivität fordert, bekommt man Probleme. Wir wollen dies hier an zwei paradox erscheinenden Eigenschaften von Kugeln erläutern. Eine Ausarbeitung von T. Neukirchner zu diesen Paradoxien findet man im Anhang 11.8.

Das Banach-Tarski-Paradox:
Sei $B_r^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 | \, \|x\| \leq r\} \subset \mathbb{R}^3$ die Vollkugel im $\mathbb{R}^3$ vom Radius r. Man kann die Kugel B_1^3 in Mengen $A_1, \ldots, A_m$ und die Kugel B_2^3 in Mengen $\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_m}$ zerlegen, so dass jede Menge A_i kongruent zu $\widetilde{A_i}$ ist, wobei $i = 1, \ldots, m$. Kongruenz bedeutet hier, dass eine Euklidische Bewegung T_i existiert, die A_i in $\widetilde{A_i}$ überführt. Als 2. Kugel könnte man auch eine von beliebig großem Radius nehmen. Man kann also die Kugel B_1^3 beliebig vergrößern, indem man sie geeignet zerschneidet, die einzelnen Teile bewegt und wieder zusammenfügt.

Das Hausdorff-Paradox:
Die punktierte Einheitskugel $B_1^3 \backslash \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ kann man derart in 3 zueinander kongruente Teilmengen A_1, A_2, A_3 zerlegen, dass auch $A_1 \cup A_2$ kongruent zu A_3 ist.

Es kann also keine Funktion geben, die *jeder* Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ein "n-dimensionales Volumen" zuordnet. Man möchte aber natürlich ein Volumen für Teilmengen haben. Der Ausweg besteht darin, ein Vulumen nicht für *alle* Teilmengen, sondern nur für eine bestimmte *Auswahl* von Teilmengen zu definieren. Die wichtigsten Konstruktionen im $\mathbb{R}^n$ sind dafür

1. Das Jordansche Volumen
   $\mu(A)$ wird für bestimmte beschränkte Teilmengen A definiert. Man approximiert dazu A von innen und von außen durch Würfel und fordert, dass das Supremum der inneren Würfelvolumen gleich dem Infimum der äußeren Würfelvolumen ist. Ist dies der Fall, so nennt man die entstehende Zahl das Jordan-Volumen von A. Dies führt auf die Verallgemeinerung des Riemann-Integrals für Funktionen mehrerer Variablen. (Das wurde in Kapitel 8 der Vorlesung Analyis IIIa vom WS 2007/08 behandelt, hier aber nicht vorausgesetzt).

2. Das Lebesgue-Maß
   Dabei wird das Volumens für eine größere Klasse von Teilmengen als in 1. definiert, z.B. auch für unbeschränkte Teilmengen. Dies wird in dieser Vorlesung behandelt und führt auf die Definition des Lebesgue-Integrals.

Das Ziel von Kapitel 11 der Vorlesung besteht in folgendem:

1. Wir wollen den Begriff des Volumens (Maßes) für Teilmengen einer beliebigen nichtleeren Menge X mathematisch präzisieren. Wir benötigen dazu 3 Objekte $(X, \mathcal{A}, \mu)$:
   X ist eine nichtleere Menge
   $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ beschreibt diejenigen Teilmengen von X, deren "Größe" wir messen wollen ("meßbare Mengen")
   $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ist eine Vorschrift, die jeder meßbaren Menge ihre Größe zuordnet (Maß)

2. Wir wollen eine Integrationstheorie für Abbildungen auf einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ herleiten. Jeder "meßbaren" Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ wollen wir dabei einen 'Mittelwert bezgl. μ' zuordnen, d.h. ein Integral

   $$\int_X f d\mu = \quad ?$$

   Dieses Integral soll das Riemann-Integral aus Analysis II (Kapitel 7) und Analysis IIIa (Kapitel 8) verallgemeinern und das Maß μ beschreiben: Ist $A \in \mathcal{A}$ eine meßbare Menge und χ_A die charakteristische Funktion von A

   $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases},$$

   so soll gelten

   $$\mu(A) = \int_X \chi_A d\mu$$

   Ist insbesondere $A = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so soll für ein geeignetes Maß μ auf $\mathbb{R}$ das Riemann-Integral entstehen, d.h.

   $$\mu(A) = \text{ Länge}(A) \ = \mathcal{R} - \int_A \chi_A(x) dx$$

Anwendungen der Maßtheorie findet man z.B. in der

- Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten
  Wir werden in Kapitel 11 insbesondere das Lebesgue-Integral für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren. Die Differential- und Integralrechnung auf Mannigfaltigkeiten (lokal Euklidische Räume) führt man auf die Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ zurück (siehe Kapitel 9 von Analyis IIIa) und die Vorlesungen zur Differentialgeometrie (Analysis und Geometrie auf Mannigfaltigkeiten).

- Funktionalanalysis
  Ein zentrales Thema der Funktionalanalyis ist die Untersuchung des Spektrum von selbstadjungierten Operatoren in Hilberträumen. Ein wesentliches Hilfsmittel dazu sind Spektralmaße.

- Stochastik
  Die Stochastik baut wesentlich auf der Maßtheorie auf. Zur mathematischen Modellierung zufälliger Prozesse werden Wahrscheinlichkeitsräume benutzt, d.h. Maßräume $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mu(X) = 1$.

9.2 σ-Algebren und Maße

9.2.1 Definition und Beispiele

Wir beschreiben zunächst diejenigen Mengen, die wir messen wollen.
Sei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge, d.h. die Menge aller Teilmengen von X.

Definition: Ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt

- Ring, falls für alle $A, B \in \mathcal{S}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{S}$ und $A \backslash B \in \mathcal{S}$.
- Algebra, falls für alle $A, B \in \mathcal{S}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{S}$ und $X \backslash A \in \mathcal{S}$.
- σ-Algebra, falls die Vereinigung abzählbar vieler Mengen aus $\mathcal{S}$ ebenfalls in $\mathcal{S}$ liegt und mit $A \in \mathcal{S}$ auch $X \backslash A \in \mathcal{S}$ gilt.

Satz 9.2. *Ringe, Algebren und σ-Algebren haben folgende Eigenschaften:*

1. *Ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring, so gilt*
   - $\emptyset \in \mathcal{R}$.
   - $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$.
   - $A_1, \ldots A_m \in \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i \, , \; \bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i \in \mathcal{R}$.
2. *Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra, so gilt*
   - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
   - *$\mathcal{A}$ ist ein Ring.*
3. *Ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring mit $X \in \mathcal{R}$, so ist $\mathcal{R}$ ist eine Algebra.*
4. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra. Sind $A_1, A_2, A_3, \ldots$ abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{A}$, dann gilt $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.*
5. *Der Durchschnitt beliebig vieler σ-Algebren ist eine σ-Algebra.*

Beweis: 1. Sei $\mathcal{R}$ ein Ring.

- Da $\mathcal{R}$ nicht leer ist, gibt es eine Menge $A \in \mathcal{R}$. Folglich ist $\emptyset = A \backslash A \in \mathcal{R}$.
- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$.
- Die dritte Aussage beweist man durch Induktion

2. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra.

- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \backslash A \in \mathcal{A} \Rightarrow X = A \cup (X \backslash A) \in \mathcal{A}$.
- $\emptyset = X \backslash X \in \mathcal{A}$.
- Seien $A, B \in \mathcal{A}$. Dann gilt
  $A \backslash B = A \cap (X \backslash B) = (X \backslash (X \backslash A)) \cap (X \backslash B) = X \backslash (\underbrace{(X \backslash A) \cup B}_{\in \mathcal{A}}) \in \mathcal{A}$.

Den Rest beweist man analog. ■

Beispiele

1. $\mathcal{A}_1 = \{X, \phi\}$ und $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(X)$ sind σ-Algebren.

2. Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein *beliebiges* nichtleeres Mengensystem. Dann ist
$$\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{A}$$
eine σ-Algebra, die man die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra nennt. Dies ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

3. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Dann ist
$$f_*\mathcal{A} := \{B \subset Y | \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$
eine σ-Algebra auf Y (die durch f induzierte σ-Algebra). (Übungsaufgabe 11.1)

4. Sei X eine unendliche Menge und $\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ endlich oder } X\backslash A \text{ endlich}\}$.
$\mathcal{A}$ ist eine Algebra, aber keine σ-Algebra.

5. Sei $X = \mathbb{R}^n$.
Mengen der Form $W = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ nennen wir halboffene Quader.
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, die die Vereinigung endlich vieler paarweise disjunkter halboffener Quader ist, nennen wir Figur.
Im folgenden bezeichne $\mathcal{E}_n$ die Menge der halboffenen Quader im $\mathbb{R}^n$ und
$\mathcal{R}_n := \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist eine Figur im } \mathbb{R}^n\}$ die Menge der Figuren.
$\mathcal{R}_n$ ist ein Ring, aber keine Algebra (Übungsaufgabe 11.3).

6. Sei (X, d) ein metrischer (oder topologischer) Raum und bezeichne
$\mathcal{O}(X)$ die Familie der offenen Teilmengen,
$\mathcal{F}(X)$ die Familie der abgeschlossenen Teilmengen,
$\mathcal{K}(X)$ die Familie der kompakten Teilmengen von X.
Das Mengensystem $\mathcal{B}(X) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X))$ heißt Borelsche σ-Algebra auf X.
Eine Teilmenge $A \in \mathcal{B}(X)$ nennt man eine Borelmenge des metrischen Rauems (X, d).
Es gilt (Übungsaufgabe 11.4):
   (a) $\mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X))$.
   (b) Ist $X = \mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Dann gilt:
$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}_n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n)$$

Definition: Ein Paar $(X, \mathcal{A})$, wobei X eine nichtleere Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ-Algebra ist, heißt meßbarer Raum.

Definition: Sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf X und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty] := [0, \infty) \cup \{\infty\}$ eine Funktion.
μ heißt Inhalt auf $\mathcal{R}$, falls

1. $\mu(\emptyset) = 0$ und
2. μ ist additiv, d.h. für alle disjunkten Mengen $A, B \in \mathcal{R}$ gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

μ heißt <u>σ-Inhalt auf $\mathcal{R}$</u>, falls

1. $\mu(\phi) = 0$ und
2. μ ist <u>σ-additiv</u>, d.h. sind $A_1, A_2, A_3, \ldots$, abzählbar viele, paarweise disjunkte Ringelemente mit $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Ein σ-Inhalt $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt <u>Maß auf $\mathcal{A}$</u>

Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aus einer nichtleeren Menge X, einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ und einem Maß μ auf $\mathcal{A}$ heißt <u>Maßraum</u>. Die Mengen aus $\mathcal{A}$ heißen <u>meßbare Mengen</u> des Maßraumes $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Die Mengen $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ heißen <u>Nullmengen</u> des Maßraumes.

Satz 9.3 (Eigenschaften von Inhalten)**.** *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring, $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$ und $A, B \in \mathcal{R}$.*

1. *Ist $A \subset B$, so gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie).*
   Ist zusätzlich $\mu(A) < \infty$, so gilt $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.
2. $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$
3. *Sind $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{R}$ so gilt*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)$$

4. *Seien $A_1, A_2 \ldots$ abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) .$$

Beweis:
1. B ist die disjunkte Vereinigung $B = A \cup (B \backslash A)$. Aus der Additivität von μ folgt dann $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) \geq \mu(A)$.

2. $A \cup B$ stellen wir als disjunkte Vereinigung $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$ dar. Dann folgt

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A). \qquad (*)$$

B ist die disjunkte Vereinigung $B = (A \cap B) \cup (B \backslash A)$. Deshalb ist

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A). \qquad (**)$$

Ist $\mu(B \backslash A) < \infty$, so erhält man aus (*) und (**)

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) + \mu(B) - \mu(B \backslash A).$$

Ist $\mu(B \backslash A) = \infty$, so folgt die Behauptung, da $\mu(B) = \mu(A \cup B) = \infty$.

3. Seien $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{R}$. Wir definieren paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{R}$ durch

$$B_1 := A_1 \qquad \text{und} \qquad B_i := A_i \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \quad i = 2, \ldots, m.$$

Dann gilt wegen der Additivität und der Monotonie von μ:

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i)\,.$$

4. Seien $A_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen aus $\mathcal{R}$ mit $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Aus der Monotonie folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)\,.$$

Dann folgt die Behauptung, indem wir den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}$ bilden. ■

Satz 9.4 (Eigenschaften von σ-Inhalten)**.** *Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring auf X und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein σ-Inhalt.*

1. *Sind $A_1, A_2, A_3, \ldots$ abzählbar viele Ringelemente mit $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$, so gilt*

   $$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-}Halbadditivit\ddot{a}t)$$

2. *<u>Stetigkeit von unten:</u>*
   Sei $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots$ eine monoton wachsende Folge von Ringelementen mit $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Dann gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$$

3. *<u>Stetigkeit von oben:</u>*
   Sei $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset B_{n+1} \supset \ldots$ eine monoton fallende Folge von Ringelementen mit $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{R}$ und $\mu(B_1) < \infty$. Dann gilt

   $$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\Big)$$

Beweis:
1. Wir definieren abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $E_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, durch

$$E_1 := A_1 \qquad \text{und} \qquad E_i := A_i \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1}) \quad i > 1.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{R}$$

und wegen der σ-Additivität und der Monotonie von μ

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

2. Wir definieren abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $F_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, durch

$$F_1 := A_1 \qquad \text{und} \qquad F_i := A_i \backslash A_{i-1} \quad i > 1.$$

Dann gilt

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$$

und

$$\mu(A_n) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$$

Aus der σ-Additivität von μ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i).$$

3. Da $B_n \supset B_{n+1}$, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subset B_n \subset B_1$. Folglich sind alle Maße endlich:

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i) \leq \mu(B_n) \leq \mu(B_1) < \infty \ .$$

Wir betrachten die monoton wachsende Folge der Mengen

$$C_i := B_1 \backslash B_i \subset C_{i+1} = B_1 \backslash B_{i+1} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Mengen C_i liegen im Ring $\mathcal{R}$ und es gilt

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_1 \backslash B_i) = B_1 \backslash \underbrace{\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i}_{\in \mathcal{R}} \in \mathcal{R}$$

Die Folge $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erfüllt somit die Voraussetzung von 2. und es gilt wegen $\mu(B_k) < \infty$

$$\mu(C_k) = \mu(B_1 \backslash B_k) = \mu(B_1) - \mu(B_k) \ .$$

Daraus erhält man

$$\lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \mu(B_1) - \lim_{k\to\infty} \mu(C_k) \overset{(2)}{=} \mu(B_1) - \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) = \mu(B_1) - \mu(B_1 \backslash \bigcap_{i=1}^{\infty} B_k) = \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k).$$

■

Definition: Ein Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf einem Ring $\mathcal{R}$ über X heißt <u>σ-endlich</u>, falls eine monoton wachsende Folge von Ringelementen $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ existiert mit $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ und $\mu(X_n) < \infty$.
(D.h. man kann X durch eine monoton wachsende Folge meßbarer Mengen von endlichem Maß ausschöpfen).

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ heißt <u>vollständig</u>, falls jede Teilmenge einer Nullmenge selbst meßbar ist, d.h. ist $A \in \mathcal{A}$ eine Menge vom Maß $\mu(A) = 0$ und $B \subset A$, so gilt $B \in \mathcal{A}$.

Beispiele:

1. <u>Das Zählmaß</u>
   Das Zählmaß zählt die Anzahl der Elemente einer Menge. Wir definieren $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch
   $$\mu(A) := \begin{cases} card(A) & \text{falls } A \text{ endlich} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$
   μ ist genau dann σ-endlich, wenn X abzählbar ist. μ ist vollständig (da $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$)

2. Das Dirac-Maß

   Sei $p \in X$ ein fixierter Punkt. Das Dirac-Maß entscheidet, ob p in einer Menge liegt oder nicht. Wir definieren $\delta_p : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p \in A \\ 0 & \text{falls } p \notin A \end{cases}$$

   δ_p ist ein vollständiges, σ-endliches Maß.

3. Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$ ohne Häufungspunkte und $f : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ eine "Gewichtsfunktion". Wir definieren $\mu_f : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ durch

$$\mu_f(A) := \sum_{x_n \in A} f(n).$$

   μ_f ist ein vollständiges, σ-endliches Maß. Die σ-Endlichkeit folgt, da man $\mathbb{R}^n$ durch kompakte Kugeln ausschöpfen kann, die jeweils nur endlich viele Folgenglieder x_n enthalten können, da $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ keinen Häufungspunkt hat.

4. Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{R}_n$ der Ring der Figuren aus Beispiel 5, Kapitel 11.2.1. Für einen Quader $Q = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n)$ betrachten wir sein geometrisches Volumen

$$\text{vol}(Q) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

   Wir definieren den Inhalt einer Figur als Summe der Volumen der Quader, deren disjunkte Vereinigung die Figur bildet. D.h. $v_n : \mathcal{R}_n \to [0, \infty)$ ist definiert durch

$$v_n(A) := \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} \text{vol}(Q_i) & \text{falls } A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i\ ,\ Q_i \in \mathcal{E}_n \quad \text{paarweise disjunkt} \\ 0 & \text{falls } A = \emptyset \end{cases}$$

   $v_n(A)$ hängt nicht von der Zerlegung von A ab.
   v_n ist ein σ-endlicher σ-Inhalt (Übungsaufgabe 11.3).

9.2.2 Konstruktion von Maßräumen nach Caratheodory

In diesem Abschnitt lernen wir ein Verfahren kennen, mit dem man Maßräume konstruieren kann. Diese Konstruktion stammt von Caratheodory.
Wir gehen von einem Ring $\mathcal{R}$ und einem Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ aus. Dies ist oft einfach anzugeben. Wir wollen $(\mathcal{R}, \mu)$ zu einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ erweitern mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ und $\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu$.

Definition: Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt äußeres Maß auf X, falls

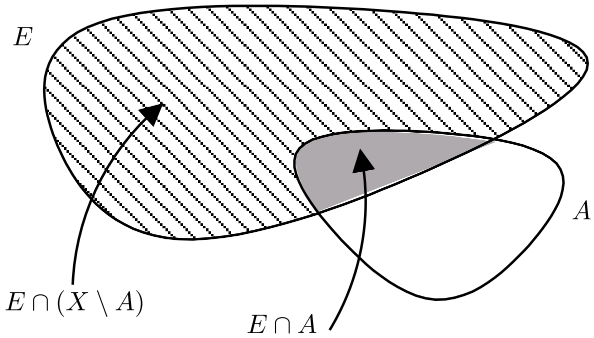
1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (Monotonie).
3. $\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (σ-Halbadditivität)

Bemerkung: Jedes Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist ein äußeres Maß (Satz 9.4), aber es existieren äußere Maße, die keine Maße sind (Übungsaufgabe 11.6).

Definition: (Caratheordory)
Sei μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt μ^*-meßbar, falls für alle Teilmengen $E \subset X$ gilt

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \setminus A)) \qquad (*)\ .$$

D.h. A zerlegt jedes $E \subset X$ in 2 disjunkte Teilmengen, auf denen μ^* additiv ist. Da μ^* σ-halbadditiv ist, genügt es in $(*)$ $\geq$ für alle $E \subset X$ mit $\mu(E) < \infty$ zu fordern.



Die Menge aller μ^*-meßbaren Teilmengen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_{\mu^*}$

Bemerkungen: Es gilt (siehe Übungsaufgabe 11.7)

- $\emptyset\,,\, X \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ (nach Definition).
- Ist $A \subset X$ mit $\mu^*(A) = 0$ so ist A μ^*-meßbar.
- Sind $B \subset A \subset X$ und $\mu^*(A) = 0$ so ist B μ^*-meßbar.

Satz 9.5 (Caratheodory)**.** *Sei* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ *ein äußeres Maß.*
Dann ist $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$ *ein vollständiger Maßraum.*

Beweis:
1. Wir zeigen zuerst, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine Algebra ist:
Da die Definition von $\mathcal{A}_{\mu^*}$ symmetrisch in A und $X \backslash A$ ist, gilt $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ genau dann, wenn $X \backslash A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Seien $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Dann ist zu zeigen, dass $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Sei dazu $E \subset X$ beliebig und $E_1 := E \cap (A \cup B)$. Da $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, gilt $\mu^*(E_1) = \mu^*(E_1 \cap A) + \mu^*(E_1 \cap (X \backslash A))$ und somit

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B \cap (X \backslash A)) \tag{9.1}$$

Wir setzen nun $E_2 := E \cap (X \backslash A)$. Da $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, gilt $\mu(E_2) = \mu^*(E_2 \cap B) + \mu^*(E_2 \cap (X \backslash B))$ und somit

$$\mu^*(E \cap (X \backslash A)) = \mu^*(E \cap B \cap (X \backslash A)) + \mu^*(E \cap (X \backslash (A \cup B))) \tag{9.2}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $\mu^*(E \cap B \cap (X \backslash A)) < \infty$. In diesem Fall erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &\overset{A \in \mathcal{A}_{\mu^*}}{=} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \\
&\overset{(10.1)}{=} \mu^*(E \cap (A \cup B)) - \mu^*(E \cap B \cap (X \backslash A)) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \\
&\overset{(10.2)}{=} \mu^*(E \cap B \cap (X \backslash A)) + \mu^*(E \cap (X \backslash (A \cup B))) \\
&\ \mu^*(E \cap (A \cup B)) - \mu^*(E \cap B \cap (X \backslash A))\ .
\end{aligned}$$

Folglich ist $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.
Ist andererseits $\mu^*(E \cap B \cap (X \backslash A)) = \infty$. Dann folgt aus (9.1) $\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \infty$. Wegen der Monotonie ist $\mu^*(E) = \infty$. Das zeigt ebenfalls, dass $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

2. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eine $\underline{\sigma}$-Algebra ist:
Seien $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ disjunkt, d.h. $B \subset X \backslash A$. Aus (9.1) folgt dann

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap B) \ .$$

Durch Induktion erhält man: Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ paarweise disjunkt, so ist

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$$

und

$$\mu^*(E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) \tag{9.3}$$

Seien nun $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ abzählbar viele μ^*-meßbare Mengen. Wir müssen zeigen, dass $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Dazu betrachten wir die folgende Folge paarweise disjunkter Mengen:

$$\begin{aligned} A_1 &:= B_1 \\ A_i &:= B_i \backslash (B_1 \cup \ldots \cup B_{i-1}) \quad i > 1 \ . \end{aligned}$$

Die Mengen A_i sind μ^*-meßbar und es gilt $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.
Aus (9.3) folgt für alle $E \subset X$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i) + \mu^*(E \cap (X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap (X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_i)) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap (X \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \ . \end{aligned}$$

Bilden wir den Grenzwert für $n \to \infty$, so folgt

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) + \mu^*(E \cap (X \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \geq \mu^*(E \cap \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i}) + \mu^*(E \cap (X \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)) \ .$$

Damit gilt $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

3. Es ist noch zu zeigen, dass $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ein Maß ist. Nach Definition gilt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ σ-additiv ist. Seien dazu $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ paarweise disjunkte μ^*-meßbare Mengen. Für alle $E \subset X$ gilt:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)) + \mu^*(E \cap (X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} A_i)) \geq \mu^*(E \cap (\bigcup_{\imath=1}^{n} A_i)) \\ &= \mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} (E \cap A_i)) \overset{(9.3)}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i) \end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus

$$\mu^*(E) \geq \sum_{\imath=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_i) \tag{9.4}$$

Setzt man in (9.4) $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, so folgt

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Da μ^* σ-halbadditiv ist, gilt andererseits

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$$

Somit ist μ^* ein Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$.

4. Die Vollständigkeit von μ^* folgt nach obiger Bemerkung (Übungsaufgabe 11.7). ■

Wie erhält man äußere Maße? Wir geben hier eine Konstruktion an, die von einem Ring mit Inhalt ausgeht. Andere Konstruktionen für metrische Räume (X, d) werden in der Übung behandelt (metrische äußere Maße, Hausdorff-Maße; man findet sie auch im Buch von J. Elstrodt[1]).

Satz 9.6. *Sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$ über X. Wir definieren $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch*

$$\mu^*(E) := \begin{cases} \inf\left\{ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; \text{wobei } E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ und } A_n \in \mathcal{R} \;\; \forall n \right\} \\ +\infty, \text{ falls } E \text{ nicht in einer abzählbaren Vereinigung von Mengen aus } \mathcal{R} \text{ liegt} \end{cases}$$

Dann gilt:

1. *μ^* ist ein äußeres Maß auf X (das von μ erzeugte äußere Maß).*
2. *$\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.*
3. *Ist μ ein σ-Inhalt, so gilt $\mu = \mu^*|_{\mathcal{R}}$.*

Man kann also jeden Prämaßraum $(X, \mathcal{R}, \mu)$ zu einem vollständigen Maßraum $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*)$ fortsetzen, wobei μ^* das von μ erzeugte äußere Maß ist. Ein Tripel $(X, \mathcal{R}, \mu)$ nennt man Prämaßraum, wenn μ ein σ-Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$ über X ist.

Beweis:
1. μ^* ist ein äußeres Maß:
Da $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $\mu(\emptyset) = 0$, folgt $\mu^*(\emptyset) = 0$. Wir zeigen als nächstes die Monotonie von μ^*. Sei dazu $A \subset B$. Ist $\mu^*(B) = \infty$, so gilt die Behauptung. Wir setzen deshalb voraus, dass $\mu^*(B) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition des Infimums existieren Ringelemente $A_1, A_2, A_3, \ldots,$ mit $B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, so dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(B) + \varepsilon\ .$$

Da $A \subset B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, folgt $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(B) + \varepsilon$. Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Monotonie. Es bleibt die σ-Halbadditivität zu beweisen. Sei $(C_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Teilmengen von X. Zu zeigen ist, dass

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n).$$

[1] J. Elstrodt: Maß-und Integrationstheorie, Springer 1998

OBdA können wir voraussetzen, dass $\mu^*(C_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Definition von μ^* existieren Mengen $A_{nk} \in \mathcal{R}, k = 1, 2, \ldots$ mit $C_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Da $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n \subset \bigcup\limits_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}$ folgt nach Definition von μ^*

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}(\mu^*(C_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}}_{=1}$$

Mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

2. $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$:
Sei $A \in \mathcal{R}$. Zu zeigen ist, dass A μ^*-meßbar ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle $E \subset X$ mit $\mu^*(E) < \infty$ gilt

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \ .$$

Wir wählen dazu $A_n \in \mathcal{R}, n = 1, 2, \ldots$ mit $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Es gilt:

$$A_n = \underbrace{(A_n \cap A)}_{\in\mathcal{R}} \dot{\bigcup} \underbrace{\underbrace{(X \backslash A) \cap A_n}_{=(A_n \backslash A) \cap A_n}}_{\in\mathcal{R}} \ .$$

Da μ ein Inhalt ist, folgt $\mu(A_n) = \mu(A \cap A_n) + \mu(A_n \cap (X \backslash A))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap (X \backslash A)) \quad (*)$$

Da $E \cap A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)$ und $E \cap (X \backslash A) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap (X \backslash A))$, folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) \ &+ \ \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \\
&\leq \ \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap A)) + \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap (X \backslash A)) \quad \text{(Monotonie)} \\
&\leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap (X \backslash A)) \quad (\sigma\text{- halbadditiv}) \\
&\leq \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap (X \backslash A)) \quad (\text{da } A_n \cap A \in \mathcal{R}) \\
&\overset{(*)}{=} \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (**)
\end{aligned}$$

Wir bilden in $(**)$ das Infimum über alle Mengen-Folgen $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ und erhalten

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap (X \backslash A)) \leq \mu^*(E).$$

Also gilt: $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

3. Sei μ ein σ-Inhalt. Wir zeigen nun, dass $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$: Für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Zu zeigen bleibt $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Wir wählen dazu Mengen $A_n \in \mathcal{R}, n = 1, 2, \ldots$ mit $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ und zerlegen A in paarweise disjunkte Mengen C_n aus $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned} C_1 &:= A \cap A_1 \in \mathcal{R} \\ C_n &:= (A \cap A_n) \backslash ((A \cap A_1) \cup \ldots \cup (A \cap A_{n-1})) \in \mathcal{R} \quad n > 1 \,. \end{aligned}$$

Dann ist $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ und aus der σ-Additivität und der Monotonie von μ folgt

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Bilden wir nun das Infimum über alle solche Folgen (A_n), so erhalten wir $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. ■

Das eben in Satz 9.6 definierte äußere Maß hat eine zusätzliche Eigenschaft, die wir jetzt definieren.

Definition: Ein äußeres Maß $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ heißt <u>regulär</u>, falls für jede Menge $E \subset X$ eine μ^*-meßbare Obermenge $A \supset E$ mit $\mu^*(E) = \mu^*(A)$ existiert.

Das in Satz 9.6 definierte äußere Maß ist regulär. Man kann die Obermenge A sogar aus der kleinsten von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ wählen. (Übungsaufgabe 11.8).

Sei $(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Prämaßraum. $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{R}$ enthält, also gilt $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. $(X, \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})})$ ist die "kleinste" Fortsetzung des Prämaßraumes zu einem Maßraum und evtl. kleiner als der vollständige Maßraum $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}})$.
Wie verhalten sich diese Maßräume zueinander?
Dazu führen wir den Begriff der Vervollständigung eines Maßraumes ein und zeigen, dass im Falle σ-endlichen Inhalts die σ-Algebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$ die Vervollständigung von $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ ist.

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir bezeichnen im folgenden mit

$$\mathcal{A}^0 := \{N \in \mathcal{A} \mid \mu(N) = 0\}$$

die Menge der Nullmengen von $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Desweiteren definieren wir

$$\bar{\mathcal{A}}^\mu := \{E \subset X \mid E = A \cup N;\ A \in \mathcal{A},\ N \subset N_0 \in \mathcal{A}^0\}$$

sowie

$$\begin{aligned} \bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}}^\mu &\longrightarrow [0, \infty] \\ E = A \cup N &\longmapsto \bar{\mu}(E) := \mu(A) \end{aligned}$$

($\bar{\mu}$ ist korrekt definiert: Übungsaufgabe 11.9)

Bemerkung: Nach Definition ist $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}^\mu$. Ist μ vollständig, so gilt $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}^\mu$. Ist nämlich $E = A \cup N \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$, $A \in \mathcal{A}$, $N \subset N_0 \in \mathcal{A}^0$, so ist auf Grund der Vollständigkeit $N \in \mathcal{A}$ und somit $E \in \mathcal{A}$.

Satz 9.7. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann ist $(X, \bar{\mathcal{A}}^\mu, \bar{\mu})$ ein vollständiger Maßraum ("<u>Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$</u>").*

Beweis:
1. $\bar{\mathcal{A}}^\mu$ ist eine σ-Algebra:
Seien $E_i \in \bar{\mathcal{A}}^\mu \quad i = 1, 2, \ldots$. Wir müssen zeigen, dass $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$.
Sei $E_i = A_i \cup N_i,\ A_i \in \mathcal{A},\ N_i \subset N_{i_0} \in \mathcal{A}$. Dann gilt wegen der σ-Halbadditivität von μ

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}_{\in \mathcal{A}} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \quad \text{und} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} N_{i_0} \in \mathcal{A}^0$$

Also gilt: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$.
Sei $E \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$. Zu zeigen ist, dass $X \backslash E \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$.
Sei $E = A \cup N, A \in \mathcal{A}$ und $N \subset N_0 \in \mathcal{A}^0$. Dann gilt

$$X \backslash E = (X \backslash A) \cap (X \backslash N) \quad , \quad X \backslash N_0 \subset X \backslash N$$

und folglich

$$X \backslash E = (X \backslash A) \cap [(X \backslash N_0) \cup \underbrace{((X \backslash N) \backslash (X \backslash N_0))}_{N_0 \backslash N}] = \underbrace{[(X \backslash A) \cap (X \backslash N_0)]}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{[(X \backslash A) \cap (N_0 \backslash N)]}_{\subset N_0}$$

Somit gilt $X \backslash E \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$.

2. $\bar{\mu}$ ist ein σ-Inhalt. $\bar{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$ folgt aus der Definition. Seien $E_i \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$ $i = 1, 2, \ldots$, paarweise disjunkte Mengen und $E_i = A_i \cup N_i, N_i \subset N_{i_0} \in \mathcal{A}^0, A_i \in \mathcal{A}$. Die Mengen $A_i, i = 1, 2, \ldots$, sind dann ebenfalls paarweise disjunkt, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} N_{i_0} \in \mathcal{A}^0$. Damit gilt für

$$\bigcup_i E_i = \bigcup_i A_i \cup \bigcup_i N_i \ ,$$

dass

$$\bar{\mu}(\bigcup_i E_i) \overset{\text{Def}}{=} \mu(\bigcup_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i)$$

$\bar{\mu}$ ist also σ-additiv.

3. Abschließend zeigen wir die Vollständigkeit von $\bar{\mu}$. Sei $E \in \bar{\mathcal{A}}^\mu, \bar{\mu}(E) = 0$ und $F \subset E$. Wir müssen zeigen, dass $F \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$. Sei dazu $E = A \cup N$, wobei $A \in \mathcal{A}, N \subset N_0 \in \mathcal{A}^0$. Da $\bar{\mu}(E) = \mu(A) = 0$, folgt $A \in \mathcal{A}^0$ und somit $F \subset E = A \cup N \subset A \cup N_0 \in \mathcal{A}^0$. Nach Definition ist dann $F \in \bar{\mathcal{A}}^\mu$. ■

Satz 9.8. *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring auf X mit σ-endlichem σ-Inhalt $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$, sei μ^* das von μ definierte äußere Maß und $\tilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}$. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}} = \mathcal{A}_{\mu^*}$$

Beweis:
1. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. Sei dazu $E \in \overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}}$. Dann gilt

$$E = A \cup N, \quad \text{mit } A \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}, \quad N \subset N_0 \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})^0.$$

Da $\mu^*(N_0) = \tilde{\mu}(N_0) = 0$ und $N \subset N_0$, folgt aus der Vollständigkeit von μ^* (Übungsaufgabe 11.7), dass $N \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Somit gilt $E = A \cup N \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

2. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}_{\mu^*} \subset \overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}}$. Sei dazu $E \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. μ^* ist ein reguläres äußeres Maß. D.h. es existiert eine Menge $A \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ mit $E \subset A$ und $\mu^*(E) = \mu^*(A)$ (Übungsaufgabe 11.8). Analog findet man ein $B \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ mit $A\backslash E \subset B$ und $\mu^*(B) = \mu^*(A\backslash E)$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\mu^*(E) < \infty$. Da $A \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$, gilt $A\backslash E \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ und

$$\tilde{\mu}(B) = \mu^*(B) = \mu^*(A\backslash E) = \mu^*(A) - \mu^*(E) = 0.$$

Wir zerlegen nun E in eine Menge aus $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ und eine Teilmenge der Nullmenge B: Wegen $E \subset A$ und $A\backslash E \subset B$ gilt:

$$E = (A\backslash B)\dot{\cup}(E \cap B).$$

Da $A, B \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ gilt $A\backslash B \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$. Außerdem ist $E \cap B \subset B \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})^0$. Folglich ist $E \in \overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}}$. Sei nun $\mu^*(E) = \infty$. Da μ ein σ-endlicher Inhalt ist, existiert eine Ausschöpfung von X durch Mengen von endlichem Maß, d.h.

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap X_n) \quad , \text{wobei } X_n \in \mathcal{R} \quad \text{und } \mu(X_n) < \infty.$$

Folglich ist

$$\mu^*(E \cap X_n) \leq \mu^*(X_n) \leq \mu(X_n) < \infty.$$

Wir wenden die ebend für Mengen von endlichem äußeren Maß bewiesene Behauptung auf $E \cap X_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ an und erhalten $E \cap X_n \in \overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}}$. Da $\overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}}$ eine σ-Algebra ist, folgt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap X_n) \in \overline{\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})}^{\tilde{\mu}}$. ■

Wir zeigen abschließend die Eindeutigkeit der Fortsetzung eines σ-endlichen σ-Inhaltes $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ auf die σ-Algebra $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$.

Satz 9.9 (Hahnscher Fortsetzungssatz)**.** *Sei μ ein σ-endlicher σ-Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Dann existiert genau ein Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$, welches μ fortsetzt, d.h. für das $\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu$ gilt. Dieses Maß $\tilde{\mu}$ ist σ-endlich.*

Beweis:
Die Existenz von $\tilde{\mu}$ folgt aus der Caratheordory-Konstruktion (Satz 9.6). Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen. Sei σ ein weiteres Maß auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$, das μ fortsetzt. Da μ σ-endlich ist, läßt sich X durch eine monoton wachsende Folge $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ von Ringelementen mit endlichem Inhalt ausschöpfen, d.h.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \ , \quad X_n \in \mathcal{R} \ , \quad \mu(X_n) < \infty \ , \quad X_n \subset X_{n+1} \ \forall n.$$

Sei nun $E \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$. Dann hat man auch eine monoton wachsende Ausschöpfung von E:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap X_n)$$

Da Maße unterhalb stetig sind, folgt

$$\sigma(E) = \lim_{n\to\infty} \sigma(E \cap X_n) \quad \text{und} \quad \tilde{\mu}(E) = \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(E \cap X_n).$$

Es genügt also zu zeigen, dass $\sigma(E \cap X_n) = \tilde{\mu}(E \cap X_n)$ gilt. Wir zeigen etwas allgemeiner die folgende Behauptung: Sei $A \in \mathcal{R}$ eine Menge von endlichem Maß und $Y \in \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R})$ eine Teilmenge von A. Dann gilt $\sigma(Y) = \tilde{\mu}(Y)$: Nach Definition ist

$$\tilde{\mu}(Y) = \mu^*(Y) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{=\sigma(A_n)} \quad | \quad Y \subset \bigcup_n A_n \ , \quad A_n \in \mathcal{R} \right\}$$

Es gilt:

$$\sigma(Y) \leq \sigma(\bigcup_n A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

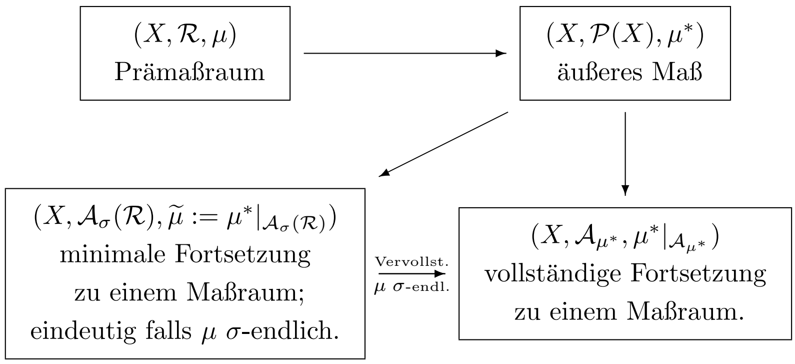
Wir bilden das Infimum über alle derartigen Folgen $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ und erhalten $\sigma(Y) \leq \mu^*(Y) = \tilde{\mu}(Y)$. Analog erhält man $\sigma(A \backslash Y) \leq \tilde{\mu}(A \backslash Y)$. Damit ergibt sich

$$\tilde{\mu}(A) = \sigma(A) = \sigma(A \backslash Y) + \sigma(Y) \leq \tilde{\mu}(A \backslash Y) + \tilde{\mu}(Y) = \tilde{\mu}(A)$$

D.h. in der letzten Kette gilt überall die Gleichheit. Insbesondere ist demnach $\sigma(Y) = \tilde{\mu}(Y)$.

$\blacksquare$

Wir fassen abschließend die in Abschnitt 11.2. dargestellte Konstruktion in dem folgenden Diagramm zusammen.



Im nächsten Abschnitt wenden wir diese Konstruktion auf den folgenden Prämaßraum an: $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_n$ = Ring der Figuren im $\mathbb{R}^n$, $\mu = v_n$ = elementargeometrisches Volumen der Figuren (siehe Abschnitt 11.2.1)

9.2.3 Das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$

Für die Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$ benutzt man das "Lebesgue-Maß", das jetzt definiert wird. Seien $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}_n$ der Ring der Figuren des $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{R}_n = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \ , \quad Q_i \ \text{ paarweise disjunkte halboffene Quader}\}$$

und $\nu_n : \mathcal{R} \to [0, \infty)$ das elementargeometrische Volumen der Figuren

$$\nu_n(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \emptyset \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_i) & \text{falls } A = \bigcup\limits_{i=1}^{m} Q_i \ . \end{cases}$$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}, \nu_n)$ ist ein σ-endlicher Prämaßraum. (Übungsaufgabe 11.3)

Definition: Sei $\lambda_n^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ das von $\nu_n : \mathcal{R}_n \to [0, \infty)$ erzeugte äußere Maß.

- λ_n^* heißt äußeres Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) := \mathcal{A}_{\lambda_n^*} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ heißt σ-Algebra der Lebesgue-(meßbaren) Mengen
- $\lambda_n = \lambda_n^*|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ heißt Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{R}_n)$ heißt σ-Algebra der Borel-Mengen des $\mathbb{R}^n$ (Übungsaufgabe 11.4).
- $\tilde{\lambda_n} := \lambda_n^*|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ heißt Borel-Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$.

Aus Kapitel 11.2.2 wissen wir:

1. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ ist ein vollständiger Maßraum mit $\lambda_n|_{\mathcal{R}_n} = \nu_n$.
3. $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}^{\tilde{\lambda_n}} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
4. Das Borel-Lebesgue-Maß ist nicht vollständig (siehe unten).
5. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, d.h. es existieren Mengen, die nicht Lebesgue-meßbar sind. (Beweis für $n = 1$ siehe Satz 10.1.).
6. λ_n ist translationsinvariant, d.h. ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so gilt $A + x_0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda(A) = \lambda(A + x_0)$. (Übungsaufgabe 11.11).

Die nächsten beiden Sätze geben eine Charakterisierung Lebesgue-meßbarer Mengen durch offene bzw. abgeschlossene Mengen.

Satz 9.10. *Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

1. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \subset U_\varepsilon$ und $\lambda_n(U_\varepsilon \backslash A) \leq \varepsilon$.*
2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ mit $F_\varepsilon \subset A$ und $\lambda_n(A \backslash F_\varepsilon) \leq \varepsilon$.*

D.h. man kann Lebesgue-meßbare Mengen beliebig gut durch offene bzw. abgeschlossene Mengen approximieren.

Beweis:
1. 1. Fall: Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(A) = \lambda_n^*(A) < \infty$. Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$. Nach Definition von λ_n^* existiert eine Folge von Figuren $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{R}_n$ mit $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) \leq \lambda_n(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Jede Figur ist die disjunkte Vereinigung endlich vieler halboffener Quader. Wir nummerieren alle diese Quader fortlaufend und bezeichnen sie mit $W_1, W_2, W_3, \ldots$. Dann erhalten wir

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{l=1}^{\infty} W_l \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) = \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(W_l) \qquad (**)$$

Wir vergrössern nun die Quader W_l etwas: Seien $\tilde{W}_l$ Quader mit $W_l \subset \mathrm{int}\tilde{W}_l$ und

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(\tilde{W}_l) &\leq \sum_{l=1}^{\infty} (\mathrm{vol}(W_l) + \frac{\varepsilon}{2^{l+1}}) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathrm{vol}(W_l) + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (***) \end{aligned}$$

Wir setzen $U := \bigcup_{l=1}^{\infty} \mathrm{int}\tilde{W}_l \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist U offen und es gilt $A \subset U$. Da $\lambda_n(A) < \infty$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \lambda_n(U \backslash A) \quad &= \quad \lambda_n(U) - \lambda_n(A) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \nu_n(\mathrm{int}\tilde{W}_l) - \lambda_n(A) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \nu_n(\tilde{W}_l) - \lambda_n(A) \\ &\overset{(**)(***)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \nu_n(A_k) + \frac{\varepsilon}{2} - \lambda_n(A) \overset{(*)}{\leq} \lambda_n^*(A) + \varepsilon - \lambda_n(A) = \varepsilon \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda_n(U \backslash A) < \varepsilon$.

<u>2. Fall:</u> Sei $\lambda_n(A) = \infty$. Wir führen dies auf den 1. Fall zurück: Sei $W_k = [-k, k)^n \subset \mathbb{R}^n$ und $A_k := A \cap W_k$. Dann gilt $\lambda_n(A_k) \leq \lambda_n((W_k) = \mathrm{vol}(W_k) = (2k)^n < \infty$. Dann benutzt man den 1. Fall für A_k und schließt damit auf A.

2. Sei $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\varepsilon > 0$. Da dann auch $X \backslash A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, existiert nach 1) eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $X \backslash A \subset U$ und $\lambda_n(U \backslash (X \backslash A)) = \lambda_n(U \cap A) < \varepsilon$. Die Menge $F := X \backslash U$ ist abgeschlossen. Es gilt $F \subset A$ und

$$\lambda_n(A \backslash F) = \lambda_n(A \backslash (X \backslash U)) = \lambda_n(A \cap U) < \varepsilon.$$

■

Es gilt auch die Umkehrung von Satz 9.10:

Satz 9.11 (Charakterisierung von Lebesgue-Mengen)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere Menge. Gelte (mindestens) eine der beiden Bedingungen:*

1. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine offene Menge $U \supset A$ mit $\lambda_n(U \backslash A) \leq \varepsilon$.*
2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine abgeschlossene Menge $F \subset A$ mit $\lambda_n(A \backslash F) \leq \varepsilon$.*

Dann ist A Lebesgue-meßbar.

Beweis:
1. Es gelte 1). Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Seien U_k offene Mengen mit $A \subset U_k$ und $\lambda_n^*(U_k \backslash A) \leq \frac{1}{k}$. Wir setzen $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Dann gilt $A \subset B$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (Satz 9.2). Für die Differenzmenge $N := B \backslash A$ gilt dann $N \subset U_k \backslash A$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Folglich ist $\lambda_n^*(N) \leq \lambda_n^*(U_k \backslash A) \leq \frac{1}{k}$ für alle k und deshalb $\lambda_n^*(N) = 0$. Da λ_n^* vollständig ist, erhalten wir $N \in \mathcal{A}_{\lambda_n^*} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Somit ist $A = B \backslash N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

2. Es gelte 2). Wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dann existieren abgeschlossene Mengen $F_k \subset A$ mit $\lambda_n^*(A \backslash F_k) < \frac{1}{k}$. Sei $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt $A = B \cup (A \backslash B)$ und $A \backslash B = A \backslash (\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \subset A \backslash F_k$. Aus der Monotonie des äußeren Maßes folgt $\lambda_n^*(A \backslash B) \leq \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit $\lambda_n^*(A \backslash B) = 0$. Wiederum aus der Vollständigkeit des äußeren Maßes folgt $A \backslash B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Wir erhalten damit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. ■

Folgerung 1: *Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so gilt für das Lebesgue-Maß*

$$\begin{aligned} \lambda_n(A) &= \inf\{\lambda_n(U) \mid U \textit{ offen}, A \subset U\} \\ &= \sup\{\lambda_n(F) \mid F \textit{ abgeschlossen}, F \subset A\} \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

- *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn sie sich in der Form $A = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) \cup N$ darstellen lässt, wobei $F_k \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Mengen sind und $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesguesche Nullmenge ist.*
- *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn es eine Darstellung der Form $A \dot\cup \hat{N} = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$ gibt, wobei $\hat{N}$ eine Lebesguesche Nullmenge ist und $U_k \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge sind.*
- *Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lebesguesche Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln $W_1, W_2, W_3, \ldots$ im $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass*

$$N \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{int} W_i \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(W_i) < \varepsilon \ .$$

■

Beispiele für Lebesgue-Mengen:
1. Sei W ein halboffener Quader: Dann ist der Abschluß cl$W$ und das Innere int$W$ von W Borel-meßbar und es gilt

$$\lambda_n(\mathrm{cl} W) = \lambda_n(\mathrm{int} W) = \mathrm{vol}(W) \ .$$

2. Jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist Borel- und folglich Lebesgue-meßbar und vom Maß Null. Sei nämlich $A = \bigcup_{q \in A}\{q\}$. Jede 1-punktige Menge $\{q\} \subset \mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen, also Borel-meßbar. Folglich ist $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\lambda_n(A) = \sum_{q \in A} \lambda_n(\{q\}) = 0 \ .$$

3. Sei $E = P + W^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$. Die Menge E ist Borel(Lebesgue)-meßbar, da sie abgeschlossen ist und hat das Maß Null (Übungsaufgabe 11.12).

4. Das Cantorsche Diskontinuum C.
Das Cantorsche Diskontinuum ist eine überabzählbare Borelsche Nullmenge. Wir erinnern nochmals an die Definition dieser Menge.

- Aus $[0,1]$ entfernt man das offene Intervall $I_{11} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (mittleres Drittel)
- Aus $[0,1] \backslash I_{11}$ entfernt man ebenfalls die mittleren Drittel der beiden verbleibenden Intervalle d.h.

$$I_{21} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \quad \text{und} \quad I_{22} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

  So fährt man fort und erhält die Menge

$$C := \underbrace{[0,1]}_{\text{abg}} \backslash \underbrace{(I_{11} \cup (I_{21} \cup I_{22}) \cup (I_{31} \cup \ldots \cup I_{34}) \cup \ldots)}_{:= U \text{offen}}$$

Dann gilt:

- C ist eine kompakte Borel-Menge.
- Nach einem Satz von Cantor gibt es eine Bijektion zwischen C und dem Intervall $[0,1]$. Folglich gilt $\operatorname{card} C = \operatorname{card} \mathbb{R}$.
- C ist eine Borelsche Nullmenge: Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(I_{11}) &= \frac{1}{3} \\
\lambda_1(I_{21}) &= \lambda_1(I_{22}) = \frac{1}{9} \\
\lambda_1(I_{nj}) &= \frac{1}{3^n} \quad j = 1, \ldots, 2^{n-1}, \qquad \text{d.h.} \ \ \lambda_1(I_{n1} \cup \ldots \cup I_{n2^{n-1}}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\Big)^n.
\end{aligned}$$

  Folglich ist $\lambda_1(U) = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = 1$ und damit $\lambda_1(C) = \lambda_1([0,1] \backslash U) = \lambda_1([0,1]) - \lambda_1(U) = 0$.
- Da λ_1 vollständig ist, ist jede Teilmenge von C Lebesgue-meßbar. Folglich gilt $\operatorname{card} \mathcal{L}(\mathbb{R}^1) \geq 2^{\operatorname{card} \mathbb{R}^1}$. Es existieren also wesentlich mehr Lebesgue-Mengen als Borel-Mengen.

Lebesgue hat bereits in seiner Promotion gezeigt, dass für jede Dimension n gilt: $\operatorname{card} \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{card} \mathbb{R}$ und $\operatorname{card} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = 2^{\operatorname{card} \mathbb{R}}$.

5. Jede Jordan-meßbare Menge ist Lebesgue-meßbar. Die Jordan-meßbaren Mengen werden in den Übungen behandelt.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes.

Die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes:

Wir wissen bereits, dass das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist. Es ist das einzigste translationsinvariante Maß auf den Lebesgue-Mengen $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, das dem Würfel der Kantenlänge 1 das Maß 1 zuordnet (siehe Übungsaufgabe 11.12).
Wir wollen nun noch untersuchen, wie sich das Lebesgue-Maß bei linearen Abbildungen verhält. Zunächst betrachten wir Nullmengen. Zur Information bemerken wir: Bei stetigen Abbildungen können Nullmengen in Mengen vom positiven Maß abgebildet werden. Ein Beispiel dafür ist die Cantorfunktion (siehe J.Elstrodt II, §8)), eine von Cantor definierte stetige, monoton wachsende reelle Funktion, die die Cantormenge C surjekiv auf $[0,1]$ abbildet.
Wir beweisen jetzt, dass dies bei C^1-Abbildungen nicht auftreten kann.

Satz 9.12. *Sei $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung. Dann gilt: Ist $A \subset U$ eine Lebesguesche Nullmenge, so ist auch $T(A)$ eine Lebesguesche Nullmenge.*

Beweis: Da $U \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, ist U als disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen halboffenen Quadern darstellbar

$$U = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} Q_j \quad \text{mit} \quad cl\, Q_j \subset U.$$

Dann ist

$$T(A) = T(A \cap \bigcup_j Q_j) = T(\bigcup_j (A \cap Q_j)) = \bigcup_j T(A \cap Q_j).$$

Folglich genügt es zu zeigen, dass $T(A \cap Q_j)$ eine Lebesguesche Nullmenge ist. Da A eine Lebesguesche Nullmenge ist, existieren nach dem Kriterium für Lebesguesche Nullmengen aus Folgerung 1 zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Würfel $W_m, m = 1, 2, 3 \ldots$, so dass

$$A \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{int} W_m \qquad \text{und} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \text{vol}\,(W_m) < \varepsilon\,.$$

Sei $2r_m$ die Seitenlänge von W_m und ξ_m das Zentrum von W_m. Für $x \in A \cap Q_j \cap \text{int}(W_m)$ gilt

$$\|x - \xi_m\|_\infty := \max\,\{|x_i - \xi_{mi}| \mid i = 1, \ldots, n\} < r_m$$

Da T eine C^1-Abbildung ist, ist $T|_{clQ_j}$ Lipschitzstetig (siehe Analysis II). Somit existiert eine Konstante $M_j \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\|Tx - T\xi_m\|_\infty \leq M_j \|x - \xi_m\|_\infty < M_j \cdot r_m,$$

d.h. Tx liegt im Inneren eines Würfels $\hat{W}_m$ mit dem Zentrum $T\xi_m$ und der Kantenlänge $2 \cdot M_j \cdot r_m$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} T(A \cap Q_j) &= \bigcup_{m=1}^{\infty} T(A \cap Q_j \cap \text{int} W_m) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \text{int} \hat{W}_m \qquad \text{und} \\ \sum_{m=1}^{\infty} \text{vol}(\hat{W}_m) &= \sum_{m=1}^{\infty} (2r_m \cdot M_j)^n \leq \sum_{m=1}^{\infty} \text{vol}(W_m) \cdot (M_j)^n \leq \varepsilon \cdot (M_j)^n \end{aligned}$$

Dann ist gemäß dem Nullstellen-Kriterium $T(A \cap Q_j)$ eine Lebesguesche Nullmenge. ■

Satz 9.13. *1. Sei $T : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene C^1-Abbildung. Dann gilt: Ist $A \subset U$ Lebesgue-meßbar, so ist $T(A)$ ebenfalls Lebesgue-meßbar.*

2. Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit der Determinante $\text{Det}L \neq 0$. *Ist $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so ist $L(A) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und für die Maße gilt:*

$$\lambda_n(L(A)) = |\text{Det}L| \cdot \lambda_n(A)$$

Beweis: 1. Nach Folgerung 1 ist die Menge A genau dann Lebesgue-meßbar, wenn sie eine Darstellung der Form $A = \big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k\big) \cup N$ besitzt, wobei $F_k \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossene Mengen sind und N eine Lebesguesche Nullmenge ist. Da die Abbildung T abgeschlossen ist, bildet sie die abgeschlossenen Mengen F_k in abgeschlossenen Mengen $T(F_k)$ ab. Nach Satz 9.12 ist $T(N)$ eine Nullmenge. Nach Folgerung 1 ist

$$T(A) = \Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} T(F_k)\Big) \cup T(N)$$

ebenfalls eine Lebesgue-Menge.

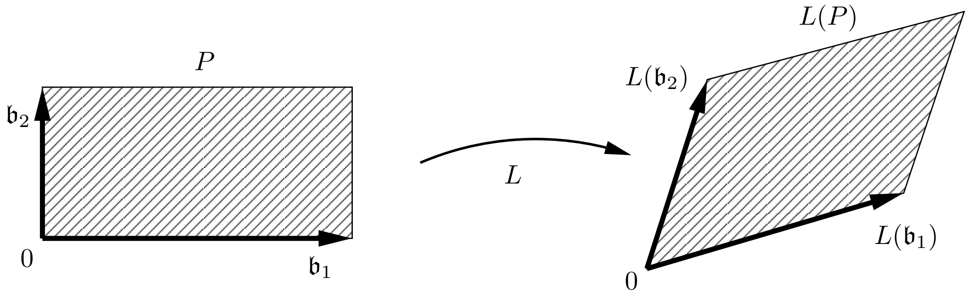
2. Jede lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\text{Det}L \neq 0$ ist ein Isomorphismus, somit ein C^1-Diffeomorphismus und insbesondere abgeschlossen. Also ist mit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ auch $L(A) \in$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Wir müssen zeigen, dass $\lambda_n(L(A)) = |\mathrm{Det}L|\lambda_n(A)$ gilt.

(a) Sei zunächst $A = Q = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^n$ ein halboffender Quader. Wir verschieben Q in den Nullpunkt. Sei $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ und bezeichne $\mathfrak{b}_i$ den Vektor im $\mathbb{R}^n$, der nur an der i. Stelle einen von Null verschiedenen Eintrag hat, und zwar die Zahl $b_i - a_i$. Das von den Vektoren $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ aufgespannte Parallelepiped bezeichnen wir mit

$$\mathcal{P}[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n] := P := \{x \in \mathbb{R}^n| \quad x = \sum x_i \cdot b_i \quad 0 \leq x_i < 1\}.$$

Dann gilt $\quad P = Q - \mathfrak{a} = [0, b_1 - a_1) \times \ldots \times [0, b_n - a_n) = \mathcal{P}[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$.



Für das Bild erhalten wir

$$L(P) = \mathcal{P}[L(\mathfrak{b_1}), \ldots, L(\mathfrak{b_n})] = L(Q) - L(\mathfrak{a}),$$

also wegen der Translationsinvarianz des Volumens insbesondere $\mathrm{vol}(L(Q)) = \mathrm{vol}(L(P))$. Aus der Algebra weiß man, daß das Volumen eines Parallelepipeds $\mathcal{P}[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ die Determinante der von den Spaltenvektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ gebildeten Matrix ist (dies ist die geometrische Bedeutung der Determinante). Also gilt

$$\mathrm{Vol}\ (\mathcal{P}[L(\mathfrak{b}_1), \ldots, L(\mathfrak{b}_n)]) = \mathrm{Det}(L(\mathfrak{b}_1) \ldots L(\mathfrak{b}_n)) = \Big(\prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\Big)|\mathrm{Det}L| = \mathrm{Vol}\ (Q) \cdot |\mathrm{Det}L|.$$

(b) Sei nun $A = U$ eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$. Dann ist $U = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} Q_j$ die Vereinigung von paarweise disjunkten halboffenen Quadern. Da L bijektiv ist, folgt

$$L(U) = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} L(Q_j) \qquad \text{mit} \qquad L(Q_j) \cap L(Q_j) = \emptyset.$$

Folglich ist

$$\lambda_n(L(U)) \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(L(Q_j)) \overset{(a)}{=} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_n(Q_j)\Big) \cdot |\mathrm{Det}L| = |\mathrm{Det}L| \cdot \lambda_n(U)$$

(c) Sei abschließend $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ beliebig. Nach Satz 9.10 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ so dass $A \subset U_\varepsilon$ und $\lambda_n(U_\varepsilon \backslash A) < \varepsilon$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_n(L(A)) \ &\leq \ \lambda_n(L(U_\varepsilon)) \overset{(b)}{=} |\mathrm{Det}L| \cdot \lambda_n(U_\varepsilon) = |\mathrm{Det}L| \cdot (\lambda_n(A) + \lambda_n(U_\varepsilon \backslash A)) \\ &\leq \ |\mathrm{Det}L| \cdot (\lambda_n(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

Geht man mit $\varepsilon \to 0$, so folgt

$$\lambda_n(L(A)) \leq |\mathrm{Det}L| \cdot \lambda_n(A) \qquad (*)$$

Analog existiert eine abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset A$ mit $\lambda_n(A \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$. Dann ist

$$\lambda_n(A) = \lambda_n(F_\varepsilon) + \lambda_n(A \backslash F_\varepsilon) \leq \lambda_n(F_\varepsilon) + \varepsilon,$$

also

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Det}L|(\lambda_n(A)-\varepsilon) &\le |\mathrm{Det}L|\,\lambda_n(F_\varepsilon) \le |\mathrm{Det}L|\cdot\lambda_n(U_\varepsilon) \overset{(b)}{=} \lambda_n(L(U_\varepsilon))\\
&= \lambda_n(L(F_\varepsilon)) + \lambda_n(L(\underbrace{U_\varepsilon\backslash F_\varepsilon}_{\text{offen}})) \le \lambda_n(L(A)) + |\mathrm{Det}L|\cdot\lambda_n(U_\varepsilon\backslash F_\varepsilon)\\
&= \lambda_n(L(A)) + |\mathrm{Det}L|\cdot\lambda_n((U_\varepsilon\backslash A)\cup(A\backslash F_\varepsilon))\\
&\le \lambda_n(L(A)) + |\mathrm{Det}L|\cdot(\varepsilon+\varepsilon)
\end{aligned}$$

Mit $\varepsilon\to 0$ ergibt sich

$$|\mathrm{Det}L|\cdot\lambda_n(A) \le \lambda_n(L(A)). \qquad (**)$$

$(*)$ und $(**)$ ergeben die Behauptung. ■

Bemerkungen:

1. Das Lebesgue-Maß ist insbesondere bewegungsinvariant. Sei $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ eine Euklidische Bewegung
$$F(x) = Lx + x_0 \quad , \quad L\in O(n)\,,\ x_0\in\mathbb{R}^n.$$
Dann gilt: Ist $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, so ist $F(A)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda_n(F(A)) = \lambda_n(A)$.

2. In Kapitel 11.6 werden wir das Lebesgue-Maß $\lambda_n(F(A))$ für einen beliebigen C^1-Diffeomorphismus F bestimmen (Transformationsformel für das Lebesgue-Integral).

Eine Modifikation des Lebesgue-Maßes erhält man durch Gewichtung des Volumens von Quadern:

Das Lebesgue-Stieltjes-Maß im $\mathbb{R}^n$

Sei $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}$ eine monoton-wachsende, linksseitig stetige Funktion. Für einen halboffenen Quader $Q=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ setzt man

$$v_f(Q) := \prod_{i=1}^{n}(f(b_i)-f(a_i)).$$

v_f ist ebenfalls ein σ-endlicher σ-Inhalt auf dem Ring der Figuren $\mathcal{R}_n$. Das davon definierte äußere Maß v_f^* heißt äußeres Lebesgue-Stieltjes-Maß und definiert

$$(\mathbb{R}^n, \mathcal{A}_{v_f^*}, v_f^*|_{\mathcal{A}_{v_f^*}}) \qquad \underline{\text{Lebesgue-Stieltjes-Maß im } \mathbb{R}^n}.$$

9.3 Meßbare Funktionen

Sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein Maßraum. In den folgenden Abschnitten wollen wir erklären, wie man Funktionen $f:X\to\mathbb{R}$ integrieren kann. Das geht nicht für alle Funktionen (wie z.B. das Riemann-Integral zeigt), sondern nur für eine Teilklasse, die “meßbaren” Funktionen.

9.3.1 Definition und Eigenschaften meßbarer Funktionen

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Ist $E \subset X$, so ist

$$\mathcal{A}_E := \{A \subset X \mid \exists \hat{A} \in \mathcal{A} \quad \text{mit} \quad A = \hat{A} \cap E\}$$

eine σ-Algebra auf E, die wir die "auf E induzierte σ-Algebra" nennen. Ist $E = X$, so ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_E$.

Definition: Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ meßbare Räume. Eine Abbildung $f : E \subset X \to Y$ heißt $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meßbar (oder kurz meßbar), falls $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_E$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Die folgenden Eigenschaften sind mit der Definition leicht nachzuprüfen:

Satz 9.14. *Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ meßbare Räume.*

1. *Ist $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$ ein Mengensystem, das $\mathcal{B}$ erzeugt, d.h. für das $\mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S})$ gilt. Dann ist die Abbildung $f : X \to Y$ genau dann $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meßbar, wenn $f^{-1}(S) \in \mathcal{A} \quad \forall S \in \mathcal{S}$.*
2. *Ist $f : X \to Y$ meßbar und $E \subset X$, so ist $f|_E : E \to Y$ meßbar.*
3. *Sei $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, $\quad X_i \in \mathcal{A}$, und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sind die Abbildungen $f|_{X_i} : X_i \subset X \to Y$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ meßbar, so ist f meßbar.*
4. *Ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum und $N \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge. Dann ist jede Abbildung $f : N \subset X \to Y$ meßbar. Insbesondere gilt: Ist $f : X \to Y$ meßbar und $g : X \to Y$ eine Abbildung, die mit f bis auf eine Menge $N \subset X$ vom Maß Null übereinstimmt, so ist g ebenfalls meßbar.*

Ist der Bildraum (Y, d) ein metrischer Raum, so betrachtet man in der Regel als $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borel-Mengen $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(X)) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{F}(X))$$

Defintion Sei $(X, \mathcal{A})$ ein <u>meßbarer</u> Raum und (Y, d) ein <u>metrischer</u> Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt <u>$\mathcal{A}$-meßbar (kurz: meßbar)</u>, falls f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(X))$ meßbar ist, d.h. falls $f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \ \forall\, U \subset Y$ offen.

Folgerung 2: *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, (Y_1, d_1) und (Y_2, d_2) metrische Räume und $h : Y_1 \to Y_2$ eine stetige Abbildung. Ist $f : X \to Y_1$ $\mathcal{A}$-meßbar, so ist $h \circ f : X \to Y_2$ ebenfalls $\mathcal{A}$-meßbar.*

Für die Borelmengen auf $\mathbb{R}$ gilt:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_\sigma(\{[a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}).$$

Daraus ergeben sich die folgenden Kriterien für die Meßbarkeit reellwertiger Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ (siehe Übungsaufgabe 11.16)

Folgerung 3: *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *f ist $\mathcal{A}$-meßbar*

2. $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3. $\{x \in X \mid f(x) > a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
4. $\{x \in X \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$
5. $\{x \in X \mid f(x) < a\} \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Für Konvergenzzwecke dehnt man die Klasse der reellwertigen Funktionen aus, indem man im Wertebereich die Werte $+\infty$ und $-\infty$ zulässt. Bezeichne $\bar{\mathbb{R}}$ die Menge

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} := [-\infty, +\infty].$$

Eine Abbildung $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt numerische Funktion. Mit den Symbolen $\pm\infty$ rechnet man wie naheliegend:

$$\begin{aligned} (\pm\infty) + (\pm\infty) &:= \pm\infty \\ a + (\pm\infty) &:= (\pm\infty) + a := \pm\infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ a \cdot (\pm\infty) &:= (\pm\infty) \cdot a := \begin{cases} \pm\infty & a \in (0, \infty] \\ \mp\infty & a \in [-\infty, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Darüber hinaus treffen wir die folgenden formalen Festlegungen[2]:

$$\begin{aligned} 0 \cdot (\pm\infty) &:= (\pm\infty) \cdot 0 := 0 \\ (+\infty) + (-\infty) &:= (-\infty) + (+\infty) := 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir auf der Menge $\bar{\mathbb{R}}$ die Operationen $+$ und $\cdot$ eingeführt, die die Addition und die Multiplikation von reellen Zahlen auf $\bar{\mathbb{R}}$ fortsetztzten. Beide Operationen sind kommutativ, aber auf $\bar{\mathbb{R}}$ nicht assoziativ. Das Distributivgesetz gilt ebenfalls nicht mehr.
Als nächstes legen wir auf $\bar{\mathbb{R}}$ eine Topologie fest:
Eine Teilmenge $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ sei genau dann offen, wenn $A \cap \mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ offen ist und wenn im Falle $+\infty \in A$ (bzw. $-\infty \in A$) ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $(a, +\infty] \subset A$ (bzw. $[-\infty, a) \subset A$). Mit dieser Topologie erhält man für die Borelmengen auf $\bar{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{O}(\bar{\mathbb{R}})) = \{B \cup E \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), E \subset \{+\infty, -\infty\}\}$$

Insbesondere gilt: $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definition: Eine numerische Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt $\mathcal{A}$-meßbar, falls f $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ meßbar ist.

Folgerung 3 gilt auch für numerische Funktionen. Mit Hilfe von Folgerung 3 beweist man folgenden Satz (Übungsaufgaben 11.17 und 11.18):

Satz 9.15 (Eigenschaften meßbarer Funktionen)**.** *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Dann gilt*

1. *Sind $f, h : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-meßbar, so sind auch die Funktionen $f + h$, $f \cdot h$, $\max(f, h)$, $\min(f, h)$ und $|f|$ $\mathcal{A}$-meßbar.*

[2]Dies wird nicht in allen Büchern zur Maß-und Integrationstheorie so gemacht, aber in einigen, z.B. im Buch von J. Elstrodt. Ich schließe mich dem an, da man dadurch in der Lage ist, auch numerische Funktionen zu addieren und zu multiplizieren

2. $f = (f_1, \dots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ *ist genau dann $\mathcal{A}$-meßbar, wenn alle Komponenten* $f_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ *, $\mathcal{A}$-meßbar sind.*

3. Sei $f_n : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $n = 1, 2, \dots,$ *eine Folge $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen. Dann sind die Funktionen* $\sup f_n$, $\inf f_n$, $\limsup f_n$ *und* $\liminf f_n$ *ebenfalls $\mathcal{A}$-meßbar.*

Wir wollen nun jede nichtnegative numerische $\mathcal{A}$-meßbare Funktion durch "einfache" Funktionen approximieren. Sei $A \subset X$. Die Funktion $\chi_A : X \to \{0, 1\}$

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

heißt charakteristische Funktion von A.

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $A \in \mathcal{A}$, so ist $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ meßbar (Folgerung 3).

Definition: Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt einfach, falls es paarweise disjunkte $\mathcal{A}$-meßbare Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ und reelle Zahlen $c_1, c_2, \dots, c_n$ gibt, so dass

1. $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ und

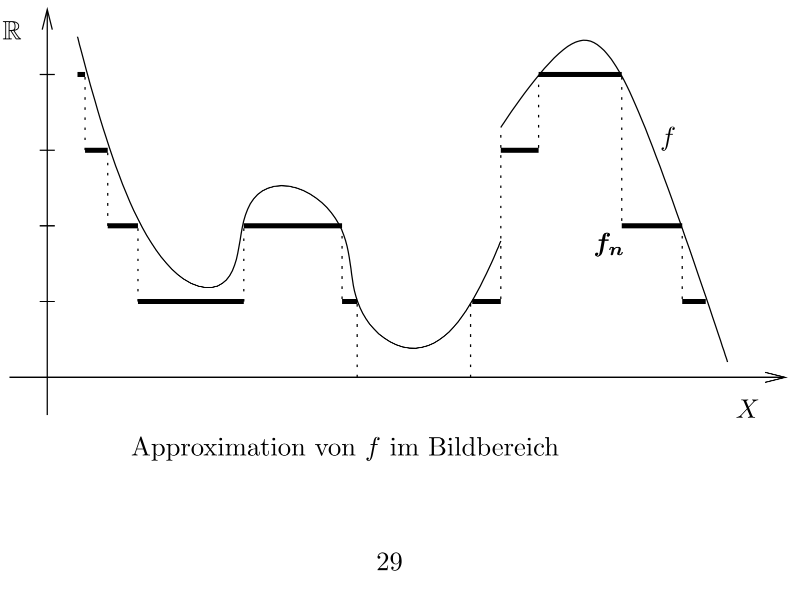
2. $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$.

Jede einfache Funktion ist meßbar.

Satz 9.16. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum und $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine nichtnegative $\mathcal{A}$-meßbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende Folge nichtnegativer einfacher Funktionen $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $f_n \le f$, die punktweise gegen f konvergiert.*
(Wir werden dafür die Bezeichnung $f_n \uparrow f$ benutzen).

Beweis: Sei $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-meßbar und $f \ge 0$. Wir definieren die Funktionenfolge f_n durch

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{falls } f(x) \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}) \ , \quad i = 1, 2, \dots 2^n \cdot n \\ n & \text{falls } f(x) \ge n \end{cases}$$



Approximation von f im Bildbereich

Nach Definition gilt $f_n \leq f$. Die Funktionen f_n sind einfach. Seien nämlich

$$\begin{aligned} A_{ni} &:= \left\{ x \in X \mid \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\} \quad i = 1, \ldots, 2^n \cdot n \\ A_n &:= \{ x \in X \mid f(x) \geq n \} \end{aligned}$$

Da f $\mathcal{A}$-meßbar ist, sind $A_{ni}, A_n \in \mathcal{A}$. Da $f \geq 0$, ist X die disjunkte Vereinigung der Mengen A_n und A_{ni}, $i = 1, \ldots, 2^n \cdot n$. Nach Definition von f_n gilt außerdem

$$f_n = \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} \cdot \chi_{A_{n_i}} + n \cdot \chi_{A_n}.$$

Also ist f_n eine einfache Funktion. Wir zeigen nun, dass die Funktionenfolge (f_n) monoton wachsend ist: Für die Mengen A_{ni} gilt:

$$A_{ni} = \underbrace{\left\{ x \in X \mid \frac{2(i-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2i-1}{2^{n+1}} \right\}}_{A_{n+1,2i-1}} \cup \underbrace{\left\{ x \in X \mid \frac{2i-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2i}{2^{n+1}} \right\}}_{A_{n+1,2i}}$$

Aus der Definition der Funktionen f_n und f_{n+1} erhält man

$$f_{n+1}|_{A_{n+1,2i-1}} = \frac{2(i-1)}{2^{n+1}} = \frac{i-1}{2^n} = f_n|_{A_{ni}}$$

$$f_{n+1}|_{A_{n+1,2i}} = \frac{2i-1}{2^{n+1}} = \frac{i-\frac{1}{2}}{2^n} > f_n|_{A_{ni}}$$

Für die Mengen A_n gilt

$$A_n = A_{n+1} \cup \{ x \in X \mid n \leq f(x) < n+1 \} \qquad \text{und}$$

$$f_{n+1}|_{A_{n+1}} = n+1 > f_n|_{A_{n+1}} = n \qquad \text{und} \qquad f_{n+1}|_{\{n \leq f < n+1\}} \geq n = f_n|_{\{n \leq f < n+1\}}.$$

Also ist die Folge $(f_n)_{n=1}^\infty$ monoton wachsend.
Wir zeigen abschließend, dass die Folge (f_n) punktweise gegen f konvergiert. Ist $f(x) = +\infty$, so ist $f_n(x) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung klar. Ist $f(x) < +\infty$, so gilt für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > f(x)$, dass $x \notin A_n$ und somit

$$x \in \bigcup_{i=1}^{n \cdot 2^n} A_{ni}.$$

Deshalb gibt es eine Menge A_{ni_0}, die x enthält. Dann folgt

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{i_0}{2^n} - \frac{i_0 - 1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Also ist $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. ■

Satz 9.17. *Sei $(X, \mathcal{A})$ ein meßbarer Raum, Y ein metrischer Raum oder $Y = \bar{\mathbb{R}}$. Sei weiterhin $(f_n : X \to Y)$ eine Folge $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls $\mathcal{A}$-meßbar.*

Beweis: Ist $Y = \bar{\mathbb{R}}$, so folgt die Behauptung bereits aus Satz 9.15 (3). Sei also im folgenden Y ein metrischer Raum. Wir müssen zeigen, dass für jede offene Menge $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ in $\mathcal{A}$ liegt. Dazu betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{N}$ die offene Menge

$$U_k := \{x \in Y \mid \operatorname{dist}(x, \underbrace{Y\backslash U}_{\text{abg}}) > \frac{1}{k}\} \subset Y$$

Es gilt $U = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ und $f^{-1}(U) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f^{-1}(U_k)$. Es genügt somit zu zeigen, dass $f^{-1}(U_k) \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Es ist

$$f^{-1}(U_k) \;=\; \{x \in X \mid f(x) \in U_k\} = \{x \in X \mid d(f(x), X\backslash U) > \frac{1}{k}\}.$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} f^{-1}(U_k) &= \left\{x \in X \mid \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \text{ mit } d(f_n(x), X\backslash U) > \frac{1}{k} \quad \forall\, n \geq n_0\right\} \\ &= \bigcup_{n_0=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq n_0} \underbrace{\{x \in X \mid d(f_n(x), X\backslash U) > \frac{1}{k}\}}_{\{x\in X \;\mid\; f_n(x)\in U_k\}=f_n^{-1}(U_k)} \end{aligned}$$

Da die Funktionen $f_n : X \to Y$ meßbar sind, ist $f_n^{-1}(U_k) \in \mathcal{A} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ und folglich gilt $f^{-1}(U_k) \in \mathcal{A}$. ■

Für vollständige Maßräume kann man die Meßbarkeitsvoraussetzung an die Folge (f_n) etwas abschwächen.

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man sagt: Eine Eigenschaft gilt auf X "μ-fast überall", falls sie auf $X\backslash N$ gilt, wobei $N \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge ist.

Satz 9.18. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, Y ein metrischer Raum oder $Y = \bar{\mathbb{R}}$. Sei $(f_n : X \to Y)$ eine Folge $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen und $f : X \to Y$. Die Folge (f_n) konvergiere μ-fast überall gegen f, d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X\backslash N, N \in \mathcal{A}^0.$$

Dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls $\mathcal{A}$-meßbar.

Beweis: Sei $E := \{x \in X \mid f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$. Es gilt $X = E\dot{\cup}(X\backslash E)$. Nach Voraussetzung ist $X\backslash E \in \mathcal{A}^0$. Da die Funktionen f_n meßbar sind, ist auch $f_n|_E$ meßbar. Nach Definition konvergiert die Folge $(f_n|_E)$ punktweise gegen $f|_E$. Nach Satz 9.17 ist dann $f|_E$ $\mathcal{A}$-meßbar. Da $X\backslash E$ eine Nullmenge und μ vollständig ist , ist $f|_{X\backslash E}$ ebenfalls $\mathcal{A}$-meßbar (Satz 9.14). Wiederum aus Satz 9.14 folgt somit, dass $f : X \to Y$ $\mathcal{A}$-meßbar ist. ■

9.3.2 Lebesgue-meßbare Funktionen auf $\mathbb{R}^n$

Defintion: Eine numerische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt

- Borel-meßbar, falls f $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-meßbar ist.
- Lebesgue-meßbar, falls f $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$-meßbar ist.

Insbesondere ist jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar und somit auch auch Lebesgue-meßbar. Man hat das folgende Kriterium für Lebesgue-meßbare Funktionen:

Satz 9.19 (Lusin). *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar. Dann gilt: Eine Abbildung $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-meßbar, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset E$ gibt, so dass*

1. *f auf F_ε stetig ist und*

2. *$\lambda_n(E \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$.*

(Die Bedingungen 1. und 2. heißen Lusin-Bedingung.)

Beweis:
($\Leftarrow$) Sei $E_a := \{x \in E \mid f(x) \geq a\}$. Es genügt zu zeigen, dass $E_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ (siehe Folgerung 3). Sei $\varepsilon > 0$ und $F_\varepsilon \subset E$ wie in der Lusin-Bedingung. Da f auf F_ε stetig ist, ist die Menge

$$F_a := E_a \cap F_\varepsilon = \{x \in F_\varepsilon \mid f(x) \geq a\} \subset F_\varepsilon$$

in F_ε abgeschlossen. Da F_ε selbst abgeschlossen ist, ist F_a auch abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. Die Menge $E \backslash F_\varepsilon$ ist Lebesgue-meßbar. Wegen $E_a \backslash F_a \subset E \backslash F_\varepsilon$ folgt daraus für das äußere Lebesgue-Maß

$$\lambda_n^*(E_a \backslash F_a) \leq \lambda_*(E \backslash F_\varepsilon) \;=\; \lambda_n(E \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Nach Satz 9.11 ist E_a somit Lebesgue-meßbar.

($\Rightarrow$) Man kann oBdA annehmen, dass f beschränkt ist, denn wegen der Stetigkeit von $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist

$$g = \arctan \circ f : E \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

ebenfalls meßbar und wenn die Lusin-Bedingung für g gilt, so gilt sie auch für f.
Wir zeigen die Lusin-Bedingung zunächst für einfache Funktionen f. Sei

$$f = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{E_i} \quad E = E_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} E_m, \quad E_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \;\; c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}.$$

Da $E_i \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar sind, existieren nach Satz 9.10 abgeschlossene Mengen $F_i \subset E_i$ mit $\lambda_n(E_i \backslash F_i) < \frac{\varepsilon}{m}$. Dann ist $F := F_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} F_m \subset E$ abgeschlossen und $\lambda_n(E \backslash F) < \varepsilon$. Da $f|_{F_i}$ stetig ist und die Mengen $F_1, \ldots, F_m$ paarweise disjunkt sind, ist f auf F stetig. Somit ist die Lusin-Bedingung für einfache Funktionen erfüllt.
Sei nun $f : E \to \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Lebesgue-meßbare Funktion und sei $C \in \mathbb{R}$ eine Schranke für f:

$$|f(x)| \leq C \qquad \forall\, x \in X.$$

Wir definieren eine Funktionenfolge durch

$$f_m(x) := \begin{cases} m & \text{falls } \; f(x) \geq m \\ \frac{k}{2^m} & \text{falls } \; -m \leq \frac{k}{2^m} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^m} \leq m \\ -m & \text{falls } \; f(x) < -m. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) f_m ist eine einfache Funktion.

(b) Für $m \geq C$ erhält man

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{2^m} \quad \forall x \in E.$$

Insbesondere konvergiert die Funktionenfolge (f_m) auf E gleichmäßig gegen f. Für die einfachen Funktionen f_m ist die Lusin-Bedingung nach 1. erfüllt. Folglich existieren abgeschlossene Mengen $F_m \subset E$, so dass

- f_m stetig auf F_m ist und
- $\lambda_n(E \backslash F_m) < \frac{\varepsilon}{2^m} \quad m = 1, 2, \ldots$.

Für die abgeschlossene Menge $F := \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m \subset E$ gilt dann

$$\lambda_n(E \backslash F) \;=\; \lambda_n(\bigcup_{m=1}^{\infty} (E \backslash F_m)) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n(E \backslash F_m) < \varepsilon \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \varepsilon.$$

Da $f_m|_F$ stetig ist und die Funktionenfolge $(f_m|_F)$ gleichmäßig gegen $f|_F$ konvergiert, ist die Grenzfunktion f auf F stetig (Siehe Kapitel 4). Folglich ist die Lusin-Bedingung für f erfüllt. ■

Eine weitere Beziehung zwischen Stetigkeit und Lebesgue-Meßbarkeit gibt der folgende Satz

Satz 9.20 (Frechet)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Menge und $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar. Dann existiert eine Folge stetiger Funktionen $(f_n : E \to \mathbb{R})$, die λ_n-fast überall gegen f konvergiert.*

Beweis: Da $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar ist, findet man nach dem Satz von Lusin zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine abgeschlossene Menge $F_k \subset E$ so dass $\lambda_n(E \backslash F_k) < \frac{1}{k}$ gilt und $f|_{F_k}$ stetig ist.
Wir betrachten die abgeschlossenen Mengen $K_N := F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_N$. Dann gilt

a) $K_N \subset K_{N+1} \quad \forall N \in \mathbb{N}$

b) $f|_{K_N}$ ist stetig.

c) $\lambda_n(E \backslash \bigcup_{N=1}^{\infty} K_N) \leq \lambda_n(E \backslash K_N) \leq \lambda_n(E \backslash F_N) < \frac{1}{N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$.

Also gilt

$$\lambda_n(E \backslash \bigcup_{N=1}^{\infty} K_N) = 0.$$

Wir benutzen nun den Fortsetzungssatz von Titze aus der Topologie: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, dann existiert eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die f fortsetzt, d.h. für die $F|_A = f$ gilt.
Sei nun $F_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion, die die stetige, auf K_N definierte Funktion

$$\widetilde{f_N} := \max\Big(\min(f|_{K_N}, N), -N\Big)$$

fortsetzt. Es bleibt zu zeigen, dass F_N auf $\bigcup_{N=1}^{\infty} K_N$ punktweise gegen f konvergiert. Sei dazu $x \in \bigcup\limits_{N=1}^{\infty} K_N$. Dann ist $x \in K_{N_0}$ für ein N_0 und somit

$$F_N(x) = \max\Big(\min(\underbrace{f|_{K_N}(x)}_{f(x)}, N), -N\Big) \;\; \forall N \geq N_0.$$

Folglich ist $\lim\limits_{N \to \infty} F_N(x) = \max\Big(\min(f(x), +\infty), -\infty)\Big) = f(x)$. ■

9.4 Integration meßbarer Funktionen

9.4.1 Definition und Eigenschaften des Integrals

In diesem Abschnitt definieren wir das Integral über meßbare Funktionen auf einem Maßraum und studieren die Eigenschaften dieses Integrals. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum und $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine numerische, $\mathcal{A}$-meßbare Funktion. Wir wollen ein Integral

$$\int_X f \; d\mu \in \bar{\mathbb{R}}$$

definieren, das schöne Konvergenzeigenschaften hat und das das Maß zurückliefert, d.h. für das insbesondere

$$\mu(A) = \int_X \chi_A \; d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

gilt. Ein solches Integral definieren wir in 3 Schritten:

1. Integral für einfache Funktionen
2. Integral für nichtnegative Funktionen
3. Integral für beliebige numerische Funktionen.

Definition: Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion und $f = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i}$. Die Zahl

$$\int_X f \; d\mu := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i)$$

heißt Integral von f über X bezüglich des Maßes μ.

Man überprüft leicht, dass diese Definition korrekt ist, d.h. nicht von der Wahl der Darstellung von f als einfache Funktion abhängt.

Satz 9.21 (Eigenschaften des Integrals)**.** *Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ einfache Funktionen. Dann gilt:*

1. *Die Funktion $\alpha f + \beta g, \;\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ist einfach und es gilt*

$$\int_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_X f d\mu + \beta \int_X g d\mu$$

2. *Ist $f \leq g$, so gilt*

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Beweis: Wir stellen f und g als einfache Funktionen für eine gemeinsame disjunkte Zerlegung dar. Seien

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{A_i} \quad , \quad g = \sum_{j=1}^{m} d_j \chi_{B_j}.$$

Wir wählen dann die Zerlegung $X = \dot{\bigcup\limits_{i,j}} (B_j \cap A_i)$ und stellen f und g in der Form

$$f = \sum_{i,j=1}^{n,m} c_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad , \quad g = \sum_{i,j=1}^{n,m} d_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

dar. Dann folgen die Behauptungen aus der Definition. ■

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ eine nichtnegative, numerische, $\mathcal{A}$-meßbare Funktion. Dann heißt die Zahl

$$\int_X f d\mu := \sup\left\{ \int_X \varphi \; d\mu \;\middle|\; \varphi : X \to \mathbb{R} \text{ einfach}, \; \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty]$$

<u>Integral von f über X bzgl. des Maßes μ</u>. Ist $A \in \mathcal{A}$, so definiert man das <u>Integral von f über A (bzgl. μ)</u> durch

$$\int_A f d\mu := \int_X f \chi_A d\mu$$

Satz 9.22. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f, g : X \to [0, \infty]$ nichtnegative, $\mathcal{A}$-meßbare Funktionen. Dann gilt*

1. $f \leq g$ *auf* $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$
2. $A, B \in \mathcal{A}, \; A \subset B \quad \Rightarrow \quad \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$
3. *Sind A und B disjunkte Mengen aus $\mathcal{A}$. Dann gilt*
$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$
4. $\int_X f d\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\{x \in X | f(x) > 0\}) = 0$ *, d.h.* $f = 0$ *μ-fast überall.*

Beweis: 1)-3) folgen unmittelbar aus der Definition des Integrals und den Eigenschaften des Integrals für einfache Funktionen (lassen wir als Übung). Wir beweisen nur 4.).
($\Rightarrow$): Wir setzen $E_n := \{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{n}\} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $E_n \subset E_{n+1}$ und

$$E := \{x \in X \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Da f meßbar ist, sind $E_n, E \in \mathcal{A}$ (Folgerung 3.) Aus den Monotonieeigenschaften 1) und 2) folgt

$$0 = \int_X f d\mu \overset{2.}{\geq} \int_{E_n} f d\mu \overset{1.}{\geq} \int_{E_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also gilt $\mu(E_n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Aus der Stetigkeit des Maßes von unten folgt

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = 0.$$

($\Leftarrow$): Sei $E := \{x \in X \mid f(x) > 0\}$ und $\mu(E) = 0$. Für jede einfache, nichtnegative Funktion $\varphi \leq f$ gilt dann $E_\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) > 0\} \subset E$, also $\mu(E_\varphi) = 0$ und folglich $\int_X \varphi \; d\mu = 0$.
Aus der Integraldefinition erhält man dann $\int_X f \; d\mu = 0$. ■

Als nächstes beweisen wir zwei grundlegende Konvergenzeigenschaften für das Integral von Funktionenfolgen:

Satz 9.23 (Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz)**.** *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $(f_n : X \to [0, \infty])$ *eine monoton wachsende Folge* $\mathcal{A}$*-meßbarer, nichtnegativer Funktionen und* $f : X \to [0, \infty]$ *die Grenzfunktion* $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$ *. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Beweis: Nach Satz 9.17 ist $f : X \to [0, \infty]$ meßbar. Da $f_n \le f_{n+1} \le f$ folgt aus Satz 9.22

$$\int_X f_n d\mu \le \int_X f_{n+1} d\mu \le \int_X f d\mu$$

und somit

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \le \int_X f d\mu \tag{9.5}$$

Es bleibt, die Ungleichung in der anderen Richtung zu zeigen. Sei φ eine einfache Funktion mit $\varphi \le f$. Dann ist $\varphi = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i}$. Sei $\lambda \in (0, 1)$ fixiert und $E_n \subset X$ die Menge

$$E_n := \{x \in X \mid \lambda\varphi(x) \le f_n(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Da $f_n \uparrow f$ und $\lambda\varphi < f$, gilt

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \text{und} \qquad E_n \subset E_{n+1}.$$

Die Mengen $A_i \subset X$ sind meßbar und erfüllen $A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_i \cap E_n)$. Aus der Stetigkeit des Maßes von unten folgt $\mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_i \cap E_n)$. Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
\lambda \int_X \varphi d\mu &= \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i \mu(A_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \lambda c_i \mu(A_i \cap E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_X \sum_{i=1}^{m} \lambda c_i \underbrace{\chi_{A_i \cap E_n}}_{\chi_{A_i}\cdot\chi_{E_n}} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \lambda\varphi\chi_{E_n} d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \lambda\varphi d\mu.
\end{aligned}$$

Nach Definition von E_n gilt $\lambda\varphi \le f_n$ auf E_n. Somit folgt

$$\lambda \int_X \varphi d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Bilden wir den Grenzwert $\lambda \to 1$ und das Supremum über alle einfachen Funktionen $\varphi \le f$, so erhalten wir

$$\int_X f d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{9.6}$$

Aus (9.5) und (9.6) folgt die Behauptung. ■

Folgerung 4: *Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A}$-meßbare, nichtnegative Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen (φ_n) mit $\varphi_n \uparrow f$ (Satz 9.16) und es gilt*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

Folgerung 5: *Sei $f_n : X \to [0, \infty]$ eine Folge $\mathcal{A}$- meßbarer, nichtnegativer Funktionen. Dann gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu$$

Für eine *beliebige* Folge meßbarer, nichtnegativer Funktionen gilt der folgende Konvergenzsatz

Satz 9.24 (Lemma von Fatoo)**.** *Sei $(f_n : X \to [0, \infty])$ eine Folge meßbarer Funktionen. Dann gilt*

$$\int_X \liminf_n f_n \; d\mu \leq \liminf_n \int_X f_n \; d\mu$$

Beweis: Für den Limes inferior einer Folge gilt

$$\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k\geq n} f_k$$

Sei nun $g_n := \inf_{k\geq n} f_k$. Nach Satz 9.15 ist die Funktion g_n $\mathcal{A}$-meßbar. Weiterhin gilt $g_n \leq g_{n+1}$ und $g_n \leq f_k \; \forall k \geq n$. Daraus folgt

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_k d\mu \quad \forall k \geq n, \qquad \text{d.h.}$$

$$\int_X g_n d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k d\mu \qquad (*)$$

Wir wenden den Satz über die monotone Konvergenz auf die Funktionenfolge (g_n) an und erhalten

$$\begin{aligned} \int_X \liminf f_n d\mu &= \int_X \sup_n g_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu \\ &= \sup_n \int_X g_n d\mu \overset{(*)}{\leq} \sup_n \inf_{k\geq n} \int_X f_n d\mu = \liminf_n \int_X f_n d\mu. \end{aligned}$$

■

Als nächstes definieren wir das Integral über eine *beliebige* $\mathcal{A}$-meßbare numerische Funktion $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$. Sei $f : X \to \bar{R}$ $\mathcal{A}$-meßbar. Dann sind die Funktionen

$$f^+ := \max\{f, 0\} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad f^- := \max\{-f, 0\} \geq 0$$

ebenfalls $\mathcal{A}$-meßbar und es gilt $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine $\mathcal{A}$-meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt μ-integrierbar, falls

$$\int\limits_X f^+ d\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int\limits_X f^- d\mu < \infty.$$

In diesem Fall definiert man

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu$$

Die Zahl $\int\limits_X f d\mu$ heißt Integral von f über X bzgl. μ. Ist $A \subset X$ und $A \in \mathcal{A}$, so definiert man

$$\int\limits_A f d\mu := \int\limits_X f \chi_A d\mu.$$

(Dies existiert, wenn f μ-integrierbar ist).

Ist $E \in \mathcal{A}$ und $f : E \subset X \to \bar{\mathbb{R}}$ eine nur auf E definierte μ-meßbare Funktion. Dann heißt $f : E \subset X \to \bar{\mathbb{R}}$ über E μ-integrierbar, falls f integrierbar bzgl. dem Maßraum $(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ ist.

Mit dem Symbol $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ bezeichnen wir den Raum der über X μ-integrierbaren numerischen $\mathcal{A}$-meßbaren Funktionen $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$.

Ist $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $E \in \mathcal{A}$, so gilt offensichtlich $f|_E \in \mathcal{L}(E, \mathcal{A}_E, \mu_E)$ und

$$\int\limits_E f|_E d\mu_E = \int\limits_E f d\mu \ .$$

Wollen wir explizit den Namen der Variablen, die im Integrationsbereich liegen, benennen, so schreiben wir für die Integrale auch die längere Form

$$\int\limits_X f(x) \ d\mu(x) := \int\limits_X f \ d\mu.$$

Diese längere Bezeichnung wird vor allem im nächsten Abschnitt sinnvoll, wo wir die Integration über Produkträume behandeln werden und die Faktoren der Produkte deutlich unterscheiden wollen.

In den folgenden 3 Sätzen formulieren bzw. beweisen wir Rechenregeln für das Integral μ-integrierbarer Funktionen.

Satz 9.25 (Rechenregeln für das Integral)**.** *Seien $f, g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und* $\int\limits_X (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \cdot \int\limits_X f d\mu + \beta \cdot \int\limits_X g d\mu.$
2. *Ist* $f \leq g$, *so gilt* $\int\limits_X f d\mu \leq \int\limits_X g d\mu$.
3. $\left| \int\limits_X f d\mu \right| \leq \int\limits_X |f| d\mu$.
4. *Seien $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2 \ldots$, paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt*

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu.$$

5. *Ist* $A \in \mathcal{A}$ *und* $\mu(A) = 0$, *so gilt* $\int\limits_A f \, d\mu = 0$.

Satz 9.26 (Absolute Stetigkeit des Integrals)**.** *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$ *mit folgender Eigenschaft: Ist* $A \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(A) < \delta$, *so gilt*

$$\Big| \int\limits_A f d\mu \Big| < \varepsilon.$$

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$g_n(x) := \begin{cases} |f(x)| & \text{falls } |f(x)| \leq n \\ n & \text{falls } |f(x)| > n \end{cases}$$

Dann gilt $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq |f|$. Weiterhin ist

$$\{g_n \geq a\} = \begin{cases} X & \text{falls } a \leq 0 \\ \{|f| \geq a\} & \text{falls } 0 < a \leq n \\ \emptyset & \text{falls } a > n. \end{cases}$$

Da $|f|$ $\mathcal{A}$-meßbar ist, folgt $\{g_n \geq a\} \in \mathcal{A}$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Nach Folgerung 3 sind die Funktionen g_n somit $\mathcal{A}$-meßbar. Die Funktionenfolge (g_n) konvergiert offensichtlich punktweise gegen $|f|$. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt deshalb

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X g_n d\mu = \int\limits_X |f| d\mu \ .$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$0 \leq \int\limits_X (|f| - g_n) d\mu < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \ n \geq n_0.$$

Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{2n_0}$. Für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Big| \int\limits_X f d\mu \Big| \ &\leq \ \int\limits_A |f| d\mu = \int\limits_X |f| \cdot \chi_A d\mu = \int\limits_X (|f| - g_{n_0}) \chi_A d\mu + \int\limits_X g_{n_0} \cdot \chi_A d\mu \\ &\leq \ \int\limits_X (|f| - g_{n_0}) d\mu \ + \ n_0 \cdot \mu(A) \ < \ \frac{\varepsilon}{2} \ + \ n_0 \cdot \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Satz 9.27. *Sei* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum.*

1. *Ist* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$, *so ist* f μ*-fast überall endlich, d.h.* $\mu(\{x \in X \mid |f(x)| = \infty\}) = 0$.

2. *Ist* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $h : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$*-meßbar und* $f = h$ μ*-fast überall. Dann gilt* $h \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *und*
$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X h d\mu.$$

3. *Sei* $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $h : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$*-meßbar und* $|h| \leq f$. *Dann ist* $h \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Beweis:

1. Da $|f| = f^+ + f^-$, gilt

$$\{x \in X \mid |f(x)| = +\infty\} = \{x \in X \mid f^+(x) = +\infty\} \cup \{x \in X \mid f^-(x) = +\infty\}.$$

Also genügt es, die Behauptung für $\mathcal{A}$-meßbare Funktionen $f : X \to [0, \infty]$ mit $\int\limits_X f d\mu < +\infty$ zu beweisen. Sei $M = \{x \in X \mid f(x) = +\infty\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $f \geq f \cdot \chi_M \geq k \cdot \chi_M$. Folglich ist

$$+\infty > \int\limits_X f d\mu \geq k \cdot \int\limits_X \chi_M d\mu = k \cdot \mu(M) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dann muss aber $\mu(M) = 0$ gelten.

2. Sei $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $h : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-meßbar und $f = h$ μ-fast-überall. Dann gilt $f^{\pm} = h^{\pm}$ μ-fast überall. Es genügt zu zeigen, dass

$$\int\limits_X f^{\pm} d\mu = \int\limits_X h^{\pm} d\mu.$$

Sei $A := \{x \in X |\ f^+(x) \neq h^+(x)\}$. Nach Voraussetzung ist $\mu(A) = 0$. Da $f^+ = f^+ \cdot \chi_A + f^+ \chi_{X \setminus A}$ und $h^+ = h^+ \cdot \chi_A + h^+ \chi_{X \setminus A}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int\limits_X f^+ d\mu &= \int\limits_A f^+ d\mu + \int\limits_X f^+ \chi_{X \setminus A} d\mu \qquad \text{und} \\ \int\limits_X h^+ d\mu &= \int\limits_A h^+ d\mu + \int\limits_X h^+ \cdot \chi_{X \setminus A} d\mu. \end{aligned}$$

Wegen $\mu(A) = 0$ gilt auch $\int\limits_A f^+ d\mu = \int\limits_A h^+ d\mu = 0$. Folglich ist $\int\limits_X f^+ d\mu = \int\limits_X h^+ d\mu$. Analog folgt die Behauptung für f^-.

3. Sei $h : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-meßbar und $|h| \leq f$. Wegen $|h| = h^+ + h^-$ folgt $0 \leq h^+ \leq f$ und $0 \leq h^- \leq f$. Da f μ-integrierbar ist, gilt

$$0 \leq \int\limits_X h^+ d\mu \leq \int\limits_X f d\mu < \infty \qquad \text{und} \qquad 0 \leq \int\limits_X h^- d\mu \leq \int\limits_X f d\mu < \infty.$$

Also ist h μ-integrierbar. ■

Als nächstes beweisen wir einen weiteren wichtigen Konvegenzsatz für das Integral von Funktionenfolgen.

Satz 9.28 (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-meßbar und $(f_n : X \to \bar{\mathbb{R}})$ eine Folge $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen mit*

1. $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad$ *für μ-fast alle $x \in X$.*
2. *Es existiert eine Funktion $F \in \mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit*

$$|f_n(x)| \leq F(x) \qquad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in X.$$

Dann ist f μ-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int\limits_X f_n d\mu.$$

Bemerkung: Für das Riemann-Integral benötigt man die gleichmässige Konvergenz der Funktionenfolge (f_n) gegen f, um Integral und Grenzwert zu vertauschen. Das Lebesgue-Integral hat also bessere Konvergenzeigenschaften als das Riemann-Integral.

Beweis von Satz 9.28: Entsprechend Satz 9.27 können wir, evtl. durch Abändern der Funktionen f, f_n bzw. F auf einer Menge vom Maß Null, folgendes annehmen: f_n und f sind $\mathcal{A}$-meßbare Funktionen mit folgenden Eigenschaften

1. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist f_n über X μ-integrierbar und endlich.
2. Die Folge (f_n) konvergiert auf dem ganzen Raum X punkteise gegen f.
3. $|f_n(x)| < F(x)$ für alle $x \in X$.

Wegen 3) ist $0 \le f_n + F$ und $0 \le F - f_n$. Aus dem Lemma von Fatoo (Satz 9.24) folgt

$$\begin{aligned} 0 &\le \int_X \liminf_n (f_n + F)\, d\mu \le \liminf_n \int_X (f_n + F)\, d\mu \\ &= \int_X F d\mu \;+\; \liminf_n \int_X f_n d\mu \qquad (*) \\ 0 &\le \int_X \liminf (F - f_n) d\mu \;\le\; \int_X F d\mu - \limsup_n \int_X f_n d\mu \qquad (**) \end{aligned}$$

Da $\int_X F d\mu < \infty$ und $\lim f_n = f$, folgt

$$\int_X f d\mu \overset{(*)}{\le} \liminf \int_X f_n d\mu \le \limsup_n \int_X f_n d\mu \overset{(**)}{\le} \int_X f d\mu.$$

Somit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. ■

Satz 9.29 (Ausschöpfungssatz)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, (M_n) eine monoton wachsende Folge meßbarer Mengen, $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ und $f : M \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$-meßbar. Dann gilt:*
f ist über M genau dann μ-integrierbar, wenn

1. *f über jedem M_n μ-integrierbar ist und*
2. *Die Folge $(\int_{M_n} |f| d\mu)_n$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

In diesem Fall ist dann

$$\int_M f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{M_n} f d\mu.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die Äquivalenz.

($\Rightarrow$) Ist f über M integrierbar, so ist auch $|f|$ über M und f bzw. $|f|$ über jeder meßbaren Teilmenge $M_n \subset M$ integrierbar. Da $M_n \subset M$ und

$$\int_{M_n} |f| d\mu \le \int_M |f| d\mu < +\infty,$$

konvergiert die Folge $\Big(\int_{M_n} |f| d\mu\Big)$.

($\Leftarrow$) Nach Voraussetzung an die Folge der Mengen (M_n) gilt $\chi_{M_n} f \to f$ und $\chi_{M_n}|f| \uparrow |f|$. Nach dem Satz über die monotone Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_M \chi_{M_n} |f| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{M_n} |f| d\mu = \int\limits_M |f| d\mu.$$

Nach Voraussetzung 2 ist dann

$$\int\limits_M |f| d\mu < \infty \ ,$$

d.h $|f| \in \mathcal{L}(M, \mathcal{A}_M, \mu_A)$ und demnach auch $f \in \mathcal{L}(M, \mathcal{A}_M, \mu_M)$. Da $\chi_{M_n} f \to f$, folgt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz ($F = |f|$), dass

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{M_n} f \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_M \chi_{M_n} f \ d\mu = \int\limits_M f \ d\mu.$$

■

Satz 9.30 (Integration bezüglich eines Bildmaßes)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(Y, \mathcal{B})$ ein meßbarer Raum und $T : X \to Y$ eine $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-meßbare Abbildung. Es bezeichne $T_*\mu := \mu \circ T^{-1}$ das Bildmaß auf $\mathcal{B}$.*
Ist $f : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $T_*\mu$ -integrierbar, so ist $f \circ T : X \to \bar{\mathbb{R}}$ ebenfalls μ-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_Y f \ d(T_*\mu) = \int\limits_X f \circ T \ d\mu.$$

Beweis:
1. Sei $B \in \mathcal{B}$ und $f = \chi_B$. Dann gilt

$$\int\limits_Y \chi_B d(T_*\mu) \ = \ (T_*\mu)(B) = \mu(T^{-1}(B)) = \int\limits_X \chi_{T^{-1}(B)} d\mu = \int\limits_X \chi_B \circ T d\mu.$$

2. Ist $f : Y \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion, so folgt die Behauptung aus 1.

3. Sei $f : Y \to [0, \infty]$ eine nichtnegative, meßbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende Folge einfacher Funktionen $\varphi_n : Y \to [0, \infty)$ mit $\varphi_n \uparrow f$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X (\varphi_n \circ T) \ d\mu \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_Y \varphi_n \ d(T_*\mu) \ = \ \int\limits_Y f \ d(T_*\mu). \qquad (*)$$

Die Funktionenfolge $(\varphi_n \circ T)_n$ ist ebenfalls monoton wachsend und es gilt $\varphi_n \circ T \uparrow f \circ T$. Nach dem Satz über die monotone Konvergenz folgt

$$\int\limits_Y f \ d(T_*\mu) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_X (\varphi_n \circ T) \ d\mu = \int\limits_X (f \circ T) \ d\mu.$$

4. Sei nun $f : Y \to \bar{\mathbb{R}}$ eine beliebige $T_*\mu$-integrierbare Funktion. Dann wendet man 3. auf die Funktionen f^+ und f^- an und erhält die Behauptung. ■

Bemerkung: Man kann die Integration auch ausdehnen auf Funktionen $f : X \to E$ mit Werten in einem endlich-dimensionalen reellen Vektoraum E (z.B. $E = \mathbb{C}$). Dazu fixiert man eine Basis $(e_1, \dots, e_n)$ in E. Für die Funktion $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i e_i$ setzt man

$$\int\limits_X f d\mu := \sum_{i=1}^{n} \Big(\int\limits_X f_i d\mu \Big) e_i .$$

9.4.2 Vergleich zwischen Riemann- und Lebesgue-Integral

Satz 9.31. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f Lebesgue-meßbar und Lebesgue-integrierbar und das Riemann-Integral von f über $[a, b]$ stimmt mit dem Lebesgue-Integral von f über $[a, b]$ überein.*

Beweis: Wir bezeichnen mit $N \subset [a, b]$ die Menge der Unstetigkeitsstellen von f und mit $\mathfrak{o}(f, x_0)$ die Oszillation von f in x_0

$$\mathfrak{o}(f, x_0) := \lim_{\delta \to 0^+} \big(\sup\{f(x) \mid |x - x_0| < \delta\} - \inf\{f(x) \mid |x - x_0| < \delta\} \big).$$

Wir wissen aus Kapitel 7 von Analysis II, dass eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine Lebesguesche Nullmenge ist. Die Unstetigkeitsstellen kann man durch positive Oszillation charakterisieren. $x_0 \in [a, b]$ ist genau dann eine Unstetigkeitsstelle von f, wenn die Oszillation $\mathfrak{o}(f, x_0)$ von f im Punkt x_0 positiv ist. Folglich gilt:

$$N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \quad \text{, wobei} \quad N_n = \Big\{ x \in [a, b] \mid \mathfrak{o}(f, x) \geq \frac{1}{n} \Big\}.$$

Die Mengen N_n sind abgeschlossen. Deshalb sind N und $A := [a, b] \setminus N$ Borel-meßbar.

1. Wir zeigen nun, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbar ist. Es gilt:

$$f^{-1}((-\infty, a)) = f|_A^{-1}((-\infty, a)) \cup \{x \in N \mid f(x) < a\}.$$

Die Abbildung $f|_A : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist stetig, folglich ist $f|_A^{-1}((-\infty, a))$ in A offen, d.h. es existiert eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ so dass $U \cap A = f|_A^{-1}((-\infty, a))$. Somit ist $f|_A^{-1}((-\infty, a))$ Borel-meßbar. Da $N_0 := \{x \in N \mid f(x) < a\} \subset N$ und N eine Lebesguesche Nullmenge ist, ist auf Grund der Vollständigkeit des Lebesgue-Maßes N_0 ebenfalls eine Lebesgue-Menge. Damit ist f Lebesgue-meßbar.

2. Wir zeigen nun, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist und dass das Lebesgue- und das Riemann-Integral übereinstimmen: Da f beschränkt ist, existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in [a, b]$. Da die Majorante $F := C \cdot \chi_{[a,b]}$ Lebesgue-integrierbar ist, ist f dies auch (siehe Satz 9.27, 3).

Für eine Unterteilung $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ sei $B_{\mathcal{P}} := \{t_0, t_1, \dots, t_k\}$ die Nullmenge, die aus den Teilungspunkten besteht und $\varphi_{\mathcal{P}}$ die Funktion

$$\varphi_{\mathcal{P}}(x) := \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{k} \inf \Big(f|_{[t_{j-1}, t_j]} \Big) & \text{falls} \quad x \in (t_{j-1}, t_j) \\ 0 & \text{falls} \quad x \in B_{\mathcal{P}}. \end{cases}$$

Da $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist, existiert eine Folge von Unterteilungen $\mathcal{P}_n = \{a = t_{n_0} < t_{n_1} < \ldots < t_{nk_n} = b\}$ von $[a, b]$ mit $\|\mathcal{P}_n\| \to 0$ und

$$\mathcal{R}\text{–}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} \inf \big(f|_{[t_{n_{j-1}}, t_{n_j}]} \big) \cdot (t_{n_j} - t_{n_{j-1}}) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \varphi_{\mathcal{P}_n} \, d\lambda_1 .$$

Da f auf der Menge $[a,b] \setminus (N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\mathcal{P}_n})$ stetig und $N \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\mathcal{P}_n}$ eine Nullmenge ist, konvergiert die Funktionenfolge $\left(\varphi_{\mathcal{P}_n}\right)$ λ_1-fast überall gegen f. Dann folgt aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[a,b]} \varphi_{\mathcal{P}_n} d\lambda_1 = \int\limits_{[a,b]} f \; d\lambda_1 \; .$$

Somit stimmt das Riemann-Integral mit dem Lebesgue-Integral überein. ■

Satz 9.32. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über jedem kompakten Teilintervall von I. f ist genau dann Lebesgue-integrierbar über I, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über I ist.*
Das uneigentliche Riemann-Integral von f stimmt in diesem Fall mit dem Lebesgue-Integral von f über I überein.

Beweis: Sei $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ und $a < a_n < b_n < b$, $a_n \downarrow a$, $b_n \uparrow b$. Nach Satz 9.31 ist $f = \lim\limits_{n\to\infty} f \cdot \chi_{[a_n,b_n]}$ Lebesgue-meßbar und nach dem Satz über die monotone Konvergenz gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R} - \int\limits_{a_n}^{b_n} |f(x)|dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_I |f| \cdot \chi_{[a_n,b_n]} d\lambda_1 = \int\limits_I |f| d\lambda_1 \qquad (*)$$

Ist nun $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so ist die linke Seite von $(*)$ endlich, also ist $|f|$ und damit auch f Lebesgue-integrierbar über I. Ist andererseits f Lebesgue-integrierbar, so ist die rechte Seite von $(*)$ endlich, d.h. $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über I. Ist $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar, so liefert Satz 9.31 und der Satz über die majorisierte Konvergenz

$$\mathcal{R} - \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_I f \cdot \chi_{[a_n,b_n]} d\lambda_1 = \int\limits_I f d\lambda_1 .$$

Ist I halboffen, schließt man analog. ■

Beispiele:

1. Die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$
$$f(x) := \frac{\sin x}{x}$$
ist uneigentlich Riemann-integrierbar, aber nicht Lebesgue-integrierbar.

2. Für jedes $x > 0$ ist die Funktion
$$h : (0,\infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad h(t) := e^{-t} t^{x-1}$$
uneigentlich Riemann- und Lebesgue-integrierbar. Das Integral
$$\Gamma(x) := \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dx$$
ist die Gamma-Funktion, deren Eigenschaften wir in Kapitel 7 von Analysis II besprochen haben.

3. Wir betrachten die Dirichlet-Funktion $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \backslash Q) \end{cases}$$

δ ist Lebesgue-meßbar, aber nirgends stetig. Folglich ist δ nicht Riemann-integrierbar. δ ist aber eine charakteristische Funktion, also Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_{[0,1]} f d\lambda^1 = \int\limits_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} d\lambda^1 = \lambda_1([0,1] \cap \mathbb{Q}) \; = \; 0.$$

9.5 Produkte von Maßräumen und Integration über Produkträumen

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume und $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion auf dem Produktraum. Wir wollen f über $X \times Y$ integrieren. Dazu müssen wir festlegen, welches Maß wir auf $X \times Y$ benutzen wollen. Dieses Maß soll so definiert werden, dass man das Integral über $X \times Y$ durch schrittweise Integration über X und Y ausrechnen kann:

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y) \; d\lambda(x,y) = \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f(x,y) d\nu(y) \Big) d\mu(x)$$

Ist zum Beispiel $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$, so soll gelten

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int\limits_{\mathbb{R}} \dots \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_n) \; dx_1 \Big) dx_2 \Big) dx_3 \dots dx_n$$

Im nächsten Abschnitt werden wir zunächst dieses Maß auf dem Produktraum definieren.

9.5.1 Das Produktmaß

Als Vorbemerkung dazu betrachten wir noch ein weiteres spezielles Mengensystem, die *monotonen* Systeme. Die Eigenschaften von monotonen Systemen werden wir in diesem Kapitel als Beweistechnik benutzten.

Definition: Eine nichtleere Familie von Mengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt <u>monoton</u>, falls gilt

1. Ist (A_n) eine monoton wachsende Folge von Mengen aus $\mathcal{S}$, d.h. $A_n \in \mathcal{S}$ und $A_n \subset A_{n+1}$, so gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$.
2. Ist (B_n) eine monoton fallende Folge von Mengen aus $\mathcal{S}$, d.h. $B_n \in \mathcal{S}, B_n \supset B_{n+1}$, so gilt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{S}$.

Für ein beliebiges Mengensystem $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ist das Mengensystem

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{E} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ monoton}}} \mathcal{M}$$

monoton. $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ heißt monotone Hülle von $\mathcal{E}$.

Satz 9.33. *1. Jede σ-Algebra ist monoton.*

2. Jede monotone Algebra ist eine σ-Algebra.

3. Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra, so gilt $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$.

Beweis: Den Beweis haben wir aus Zeitgründen in der Vorlesung weggelassen und überlassen ihn dem Leser als Übungsaufgabe. ■

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume. Wir wollen auf $X \times Y$ eine σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$ und ein Maß $\lambda : \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \to [0, \infty]$ definieren, so dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ und $B \in \mathcal{B}$ gilt

$$A \times B \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \qquad \text{und} \qquad \lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Dazu betrachten wir folgendes Mengensystem disjunkter Vereinigungen

$$\mathcal{E} := \Big\{ E \subset X \times Y \mid \quad E = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \times B_i) \quad \text{disjunkte Vereinigung} \; A_i \in \mathcal{A},\, B_i \in \mathcal{B} \quad i = 1, \ldots, m \Big\}.$$

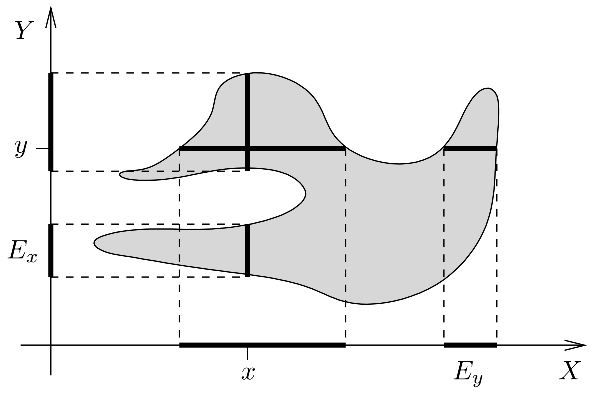
Man prüft leicht nach, dass $\mathcal{E}$ eine Algebra ist.

Definition: Die σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} := \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$ heißt Produkt der σ-Algebren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Nach Satz 9.33 gilt $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$

Sei $E \subset X \times Y$ eine Teilmenge und $x \in X$, $y \in Y$ fixiert. Wir betrachten die folgenden Mengen

$$\begin{aligned} E_x &:= \{t \in Y \mid (x,t) \in E\} \subset Y \qquad \underline{x\text{-Schnitt von } E} \\ E_y &:= \{s \in X \mid (s,y) \in E\} \subset X \qquad \underline{y\text{-Schnitt von } E} \end{aligned}$$



Satz 9.34. *Sei $E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$. Dann gilt $E_x \in \mathcal{B}$ $\forall x \in X$ und $E_y \in \mathcal{A}$ $\forall y \in Y$.*

Beweis: Wir beweisen die Behauptung für die x-Schnitte. Für die y-Schnitte geht das analog. Sei dazu

$$\mathcal{S} := \{E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \mid E_x \in \mathcal{B} \;\; \forall x \in X\} \subset \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}.$$

Zu zeigen ist, dass $\mathcal{S} = \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} = \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E})$. Dazu genügt es zu zeigen, dass

a) $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ und

b) $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra über $X \times Y$ ist.

Zu a) Sei $E = \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \times B_i)$ eine disjunkte Vereinigung mit $A_i \in \mathcal{A}$ und $B_i \in \mathcal{B}$. Dann gilt:

$$E_x = \{t \in Y \mid (x,t) \in \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \times B_i)\} = \bigcup_{i=1}^{m} \underbrace{\{t \in Y \mid (x,t) \in A_i \times B_i\}}_{\begin{cases} \emptyset & \text{falls } x \notin A_i \\ B_i & \text{falls } x \in A_i \end{cases}}$$

Also gilt $E_x \in \mathcal{B}$.

Zu b) Sei $E \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\begin{aligned} [(X \times Y) \setminus E]_x &= \{t \in Y \mid (x,t) \in (X \times Y) \setminus E\} = \{t \in Y \mid (x,t) \notin E\} \\ &= Y \setminus E_x \in \mathcal{B} \qquad \text{da } E_x \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Also gilt $(X \times Y) \setminus E \in \mathcal{S}$.

Sei (E_n) eine Folge von Mengen aus $\mathcal{S}$. Dann gilt

$$\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \Big)_x = \{t \in Y \mid (x,t) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{t \in Y \mid (x,t) \in E_n\}}_{(E_n)_x} \in \mathcal{B}.$$

Also gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}$. ■

Satz 9.35. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann gilt für alle $E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$*

1. $x \in X \longmapsto \nu(E_x) \in [0, \infty]$ *ist eine $\mathcal{A}$-meßbare Abbildung.*
2. $y \in Y \longmapsto \mu(E_y) \in [0, \infty]$ *ist eine $\mathcal{B}$-meßbare Abbildung.*
3. $\int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$.

Beweis: Wir definieren das Mengensystem

$$\mathcal{S} := \{E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \mid E \quad \text{erfülle 1., 2., 3.}\} \subset \mathcal{A} \times_\sigma \mathcal{B}$$

Wir wollen $\mathcal{S} = \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$ beweisen. Dazu genügt es zu zeigen, dass

a) $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$ und
b) $\mathcal{S}$ ein monotones System ist.

Zu a) Sei $E \in \mathcal{E}$, also E die disjunkte Vereinigung $E = \bigcup_{i=1}^{m} (\overbrace{A_i \times B_i}^{E_i})$, $A_i \in \mathcal{A}$, $B_i \in \mathcal{B}$.

Der x-Schnitt E_x ist die disjunkte Vereinigung $E_x = \bigcup_{i=1}^{m} (E_i)_x$. Somit gilt $\nu(E_x) = \sum_{i=1}^{m} \nu((E_i)_x)$. Da

$$(E_i)_x = \begin{cases} \emptyset & x \notin A_i \\ B_i & x \in A_i \end{cases}$$

erhalten wir

$$\nu(E_x) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{A_i}(x) \cdot \nu(B_i) \qquad (*)$$

Also ist die Abbildung $x \in X \longmapsto \nu(E_x)$ $\mathcal{A}$-meßbar. Analog zeigt man, dass die Abbildung $y \in Y \longmapsto \mu(E_y)$ $\mathcal{B}$-meßbar ist und

$$\mu(E_y) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{B_i}(y)\mu(A_i) \qquad (**)$$

gilt. Für die Integrale erhält man

$$\int\limits_X \nu(E_x)d\mu(x) \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{m} \int\limits_X \chi_{A_i} \cdot \nu(B_i)d\mu = \sum_{i=1}^{n} \nu(B_i) \cdot \mu(A_i) \overset{**}{=} \int\limits_Y \mu(E_y)d\nu(y).$$

Zu b) Sei (E_n) eine monoton wachsende Folge von Mengen aus $\mathcal{S}$, d.h. $E_n \subset E_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass die Menge $E := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ ebenfalls in $\mathcal{S}$ liegt. Wegen $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ und der Stetigkeit des Maßes ν von unten, gilt

$$\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((E_n)_x).$$

Jede Abbildung $x \in X \mapsto \nu((E_n)_x)$, $n \in \mathbb{N}$, ist $\mathcal{A}$-meßbar. Damit ist der Grenzwert $\mathcal{A}$-meßbar (Satz 9.17). Analog zeigt man, dass die Abbildung $y \in Y \mapsto \mu(E_y)$ $\mathcal{B}$-meßbar ist. Da $E_n \in \mathcal{S}$, gilt nach Definition von $\mathcal{S}$

$$\int\limits_X \nu((E_n)_x)d\mu(x) = \int\limits_Y \mu((E_n)_y)d\nu(y) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (***)$$

Die Funktionenfolge $(x \in X \mapsto \nu((E_n)_x))_{n=1}^{\infty}$ ist monoton wachsend. Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt, dass

$$\int\limits_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int\limits_Y \mu(E_y)d\nu(y).$$

Also gilt $E \in \mathcal{S}$.

Sei nun (F_n) eine monoton fallende Folge von Mengen aus $\mathcal{S}$, d.h. $F_{n+1} \subset F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass die Menge $F := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ ebenfalls in $\mathcal{S}$ liegt.

1. Fall: Sei zunächst $F_1 \subset A \times B$, wobei $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ und $\mu(A) < \infty, \nu(B) < \infty$.
Mit den gleichen Argumenten wie im eben besprochenen Fall folgt aus der Stetigkeit des Maßes von oben, dass

$$\nu(F_x) = \lim_{n\to\infty} \nu((F_n)_x) \qquad \text{und} \qquad \mu(F_y) = \lim_{n\to\infty} \mu((F_n)_y).$$

Da $F_1 \subset A \times B$ und $\nu(B) < \infty$, folgt

$$\nu((F_n)_x) \le \nu((F_1)_x) \le \chi_A(x) \cdot \nu(B) < \infty$$

Aus dem Satz über die majorisierte Konvergenz folgt dann

$$\int\limits_X \nu(F_x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \nu((F_n)_x)d\mu(x) \overset{\text{Vor}}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_Y \mu((F_n)_y)d\nu(y) = \int\limits_Y \mu(F_y)d\nu(y) .$$

Also ist $F \in \mathcal{S}$.

2. Fall: Sei jetzt F_1 beliebig.
Da die Maße μ und ν σ-endlich sind, gibt es Ausschöpfungen von X und Y durch Mengen endlichen Maßes. Sei also

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad , \qquad X_n \in \mathcal{A}\,,\ X_n \subset X_{n+1}\,,\ \mu(X_n) < \infty \\ Y &= \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \quad , \qquad Y_n \in \mathcal{B}\,,\ Y_n \subset Y_{n+1}\,,\ \nu(Y_n) < \infty \end{aligned}$$

Sei weiter

$$\mathcal{N} := \{E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \mid \quad E \cap (X_n \times Y_n) \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}\ .$$

Da $F_1 \cap (X_n \times Y_n) \subset X_n \times Y_n$ und X_n und Y_n endliches Maß haben, kann man auf $\mathcal{N}$ die in Punkt a) und im Punkt b) bereits bewiesenen Eigenschaften anwenden und erhält, dass $\mathcal{E} \subset \mathcal{N}$ und dass $\mathcal{N}$ monoton ist. Folglich gilt $\mathcal{N} = \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} = \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Für die Menge $F := \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} = \mathcal{N}$ erhält man deshalb

$$F \cap (X_n \times Y_n) \in \mathcal{S} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Weiterhin ist $F \cap (X_n \times Y_n) \subset F \cap (X_{n+1} \times Y_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir haben bereits bewiesen, dass die Vereinigung einer monoton wachsenden Folge von Mengen aus $\mathcal{S}$ wieder in $\mathcal{S}$ liegt, somit gilt

$$F = F \cap (X \times Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F \cap (X_n \times Y_n) \in \mathcal{S}\ .$$

■

Definition: Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Für $E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$ definieren wir

$$\lambda(E) := \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$$

λ heißt das Produkt der Maße μ und ν. Bezeichnung: $\lambda = \mu \otimes \nu$.

Satz 9.36. *Für das Produktmaß $\lambda = \mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \to [0, \infty]$ gilt*

1. *λ ist ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$.*
2. *$\lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$.*
3. *Ist $\tau : \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \to [0, \infty]$ ein weiteres Maß auf $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$ mit $\tau(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$ $\forall A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}$. Dann gilt $\lambda = \tau$.*

D.h. λ ist die eindeutige ! Fortsetzung der Funktion $\mu \times \nu : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to [0, \infty]$ zu einem Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$.

Beweis:
Zu 1.: Es gilt $\lambda(\emptyset) = 0$, da $\emptyset_x \equiv \emptyset$ und $\nu(\emptyset) = 0$.

Wir zeigen, dass λ σ-additiv ist: Seien dazu $E_n \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \ldots,$ paarweise disjunkte Mengen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \int_X \nu\Big((\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)_x\Big) d\mu(x) = \int_X \nu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x\Big) d\mu(x) \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu((E_n)_x) d\mu(x) \overset{\text{Folg.5}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu((E_n)_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \ .\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass λ ist σ-endlich ist: Da μ und ν σ-endliche Maße sind, gibt es eine Ausschöpfung von X und Y durch Mengen vom endlichen Maß.

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad X_n \subset X_{n+1}, \quad X_n \in \mathcal{A}, \quad \mu(X_n) < \infty \\ Y &= \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n, \quad Y_n \subset Y_{n+1}, \quad Y_n \in \mathcal{B}, \quad \nu(Y_n) < \infty \end{aligned}$$

Dann gilt aber

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \times Y_n) \quad , \qquad X_n \times Y_n \in \mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$$

und die Mengen $X_n \times Y_n$ haben endliches Maß

$$\begin{aligned}\lambda(X_n \times Y_n) &= \int_X \nu((X_n \times Y_n)_x) d\mu(x) = \int_X \chi_{X_n}(x) \cdot \nu(Y_n) d\mu(x) \\ &= \mu(X_n) \cdot \nu(Y_n) < \infty \ .\end{aligned}$$

Zu 2.: Für das Maß des Produktes zweier Mengen aus $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt

$$\lambda(A \times B) = \int_X \nu((A \times B)_x) d\mu(x) = \int_X \chi_A(x) \cdot \nu(B) d\mu(x) = \mu(A) \cdot \nu(B) \ .$$

Zu 3.: Um die Eindeutigkeit des Produktmaßes zu zeigen, benutzen wir den Hahnschen Fortsetzungssatz (Satz 9.9). Das Mengensystem $\mathcal{E}$ ist ein Ring (sogar eine Algebra) und die Abbildung $\tilde{\lambda} : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\tilde{\lambda}\Big(\dot{\bigcup_{i=1}^{m}} A_i \times B_i\Big) := \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \cdot \nu(B_i)$$

ist ein σ-endlicher σ-Inhalt auf $\mathcal{E}$. Dann existiert genau ein Maß λ auf $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{E}) =: \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$, das $\tilde{\lambda}|_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ fortsetzt. ■

Folgerung 6: *Sei $E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$. Dann gilt*

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \nu)(E) = 0 \iff & \mu(E_y) = 0 \ \ \nu - \textit{fast überall auf}\, Y \ \textit{und} \\ & \nu(E_x) = 0 \ \ \mu - \textit{fast überall auf}\, X.\end{aligned}$$

Wir merken uns folgenden Fakt: Das Produktmaß einer Menge $E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$ berechnet man, indem man über die Maße der x- bzw. y-Schnitte integriert:

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y) \ .$$

Dies nennt man das "Prinzip von Cavalieri".

9.5.2 Integration über Produkträumen (Satz von Fubini)

Satz 9.37 (Satz von Fubini)**.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume.*
1. Sei $f : X \times Y \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$-meßbare Funktion. Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned} \varphi_f : x \in X &\mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad \mathcal{A}\text{-meßbar,} \\ \psi_f : y \in Y &\mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x) \quad \mathcal{B}\text{-meßbar} \end{aligned}$$

und es gilt

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \otimes \nu) = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X f(x,y)d\mu(x) \Big) d\nu(y) \ .$$

2. Sei $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\mu \otimes \nu$-integrierbare Funktion. Dann sind die Funktionen

$$\begin{aligned} x \in X \to f(x, y_0) &\quad \text{integrierbar für } \nu\text{-fast alle } y_0 \in Y \ \text{(d.h. auf } Y_0 \subset Y) \\ y \in Y \to f(x_0, y) &\quad \text{integrierbar für } \mu\text{-fast alle } x_0 \in X \ \text{(d.h. auf } X_0 \subset X) \end{aligned}$$

und es gilt:

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \otimes \nu) = \int_{X_0} \Big(\int_Y f(x_0,y)d\nu(y) \Big) d\mu(x_0) = \int_{Y_0} \Big(\int_X f(x,y_0)d\mu(x) \Big) d\nu(y_0)$$

Man schreibt anstelle von X_0 bzw.Y_0 oft auch X bzw. Y, da man eine integrierbare Funktion auf Nullmengen beliebig abändern kann.

Beweis:
1. Wir beweisen die 1. Behauptung in 3 Schritten: für charakteristische Funktionen, für einfache Funktionen und für nichtnegative meßbare numerische Funktionen.

a) Sei f eine charakteristische Funktion, d.h. $f = \chi_E$, wobei $E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$. Da $E_x \in \mathcal{B}$, ist $f(x, \cdot) = \chi_{E_x}$ $\mathcal{B}$-meßbar. Analog folgt, dass $f(\cdot, y) = \chi_{E_y}$ $\mathcal{A}$-meßbar ist. Weiterhin gilt:

$$\varphi_f(x) = \int_Y \chi_E(x,y)d\nu(y) = \int_Y \chi_{E_x} d\nu(y) = \nu(E_x) \ .$$

Nach Satz 9.35 ist die Funktion φ_f $\mathcal{A}$-meßbar. Analog zeigt man, dass ψ_f $\mathcal{B}$-meßbar ist. Nach Defintion des Produktmaßes gilt außerdem

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} \chi_E(x,y)d(\mu\otimes\nu) &= (\mu \otimes \nu)(E) \\ &= \int_X \nu(E_x)d\mu(x) = \int_Y \mu(E_y)d\nu(y) \\ &= \int_X \Big(\int_Y \chi_E(x,y)d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X \chi_E(x,y)d\mu(x) \Big) d\nu(y) \ . \end{aligned}$$

b) Wegen der Additivität des Integrals gilt die Behauptung auch für einfache Funktionen f.

c) Sei $f : X \times Y \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$-meßbare Funktion. Dann existiert eine monoton wachsende Folge von einfachen Funktionen $f_n : X \times Y \to [0,\infty]$ mit $f_n \uparrow f$. Die Funktionenfolge $\big(\int\limits_Y f_n(x,y)d\nu(y) \big)$ ist ebenfalls monoton wachsend. Nach dem Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu) &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{X\times Y} f_n d(\mu\otimes\nu) \overset{b)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f_n(x,y)d\nu(y) \Big) \\
&= \int\limits_X \Big(\lim_{n\to\infty} \int\limits_Y f_n(x,y)d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int\limits_X \Big(\int\limits_Y \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)}_{f(x,y)} \Big) d\mu(x) \ .
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die andere Formel.

2. Sei nun $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ $\mu\otimes\nu$-integrierbar. Wir zerlegen $f = f^+ - f^-$ wie oben. Dann ist

$$\int\limits_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes\nu) < +\infty \quad , \quad \int\limits_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes\nu) < +\infty \ .$$

Diese Integrale sind nach 1. gleich den iterierten Integralen und folglich sind

$$\int\limits_X \Big(\int\limits_Y f^\pm(x,y)d\nu(y) \Big) d\mu(x) < \infty$$

$$\int\limits_Y \Big(\int\limits_X f^\pm(x,y)d\mu(x) \Big) d\nu(y) < \infty$$

Nach Satz 9.27 (1) ist dann $\int\limits_Y f^\pm(x_0,y)d\nu(y) < +\infty$ für μ-fast alle $x_0 \in X$ und $\int\limits_X f^\pm(x,y_0)d\mu(x) < +\infty$ für ν-fast alle $y_0 \in Y$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{X\times Y} fd(\mu\otimes v) &= \int\limits_{X\times Y} f^+ d(\mu\otimes v) - \int\limits_{X\times Y} f^- d(\mu\otimes v) \\
&\overset{1.}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f^+(x,y)dv(y) \Big) d\mu(x) - \int\limits_X \Big(\int\limits_Y f^-(x,y)dv(y) \Big) d\mu(x) \\
&= \int\limits_{X_0} \Big(\underbrace{\int\limits_Y f^+(x,y)dv(y)}_{<+\infty} \Big) d\mu(x) - \int\limits_{X_0} \Big(\underbrace{\int\limits_Y f^-(x,y)d\nu(y)}_{<+\infty} \Big) d\mu(x) \\
&= \int\limits_{X_0} \Big(\int\limits_Y f^+(x,y)d\nu(y) - \int\limits_Y f^-(x,y)d\mu(y) \Big) \ d\mu(x) \\
&= \int\limits_{X_0} \Big(\int\limits_Y f(x,y)d\nu(y) \Big) \ d\mu(x) \ .
\end{aligned}$$

Die andere Formel zeigt man analog. ■

9.5.3 Der Satz von Fubini für die Vervollständigung von Produktmaßen

Um Lebesgue-Integrale für Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ auszurechnen, möchte man die iterierte Integration auch für diesen Fall anwenden. Der Satz von Fubini aus Abschnitt 11.5.2 lässt sich allerdings nicht direkt anwenden, da $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ gilt. Wir benötigen deshalb den Satz von Fubini auch für die Vervollständigung von Produktmaßen. Dies werden wir in diesem Abschnitt behandeln. Dazu betrachten wir zunächst Eigenschaften der Lebesque-meßbaren Teilmengen auf dem Produkt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Es gilt:

1. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ (Übungsaufgabe 11.14)
2. $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)) =: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$
3. $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \neq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.

Um Behauptung 3. einzusehen, betrachten wir folgendes Beispiel: Sei $B \subset \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge, die nicht Lebesgue-meßbar ist, und $p \in \mathbb{R}^n$. Dann liegt $\{p\} \times B$ in einer Hyperebene $H \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, ist demnach Lebesgue-meßbar mit dem Maß Null, d.h. $\{p\} \times B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Andererseits ist aber $\{p\} \times B \notin \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$, da der x-Schnitt von $\{p\} \times B$

$$(\{p\} \times B)_x = \begin{cases} \emptyset & x \neq p \\ B & x = p \end{cases}$$

für $x = p$ nicht Lebesgue-meßbar ist (Satz 9.34).

4. Es gilt

$$\lambda_{n+m}|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} = \lambda_n \otimes \lambda_m \ .$$

Dies folgt aus der Eindeutigkeit der Fortsetzung des Maßes auf den Produktraum, da nach Übungsaufgabe 11.14

$$\lambda_{n+m}(A \times B) = \lambda_n(A) \cdot \lambda_m(B) \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \forall B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m).$$

5. Es gilt

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \overline{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)}^{\lambda_n \otimes \lambda_m} \qquad \text{und} \qquad \lambda_{n+m} = \overline{\lambda_n \otimes \lambda_m}$$

d.h. das Lebesgue-Maß λ_{n+m} ist die Vervollständigung des Produktmaßes $\lambda_n \otimes \lambda_m$. Zum Beweis von 5. bemerken wir zunächst, dass

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \ .$$

Nach Übungsaufgabe 11.14 ist nämlich $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ und somit per Definition

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \ .$$

Andererseits wird $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ aus den halboffenen Quadern $Q \subset \mathbb{R}^{n+m}$ erzeugt, die sich in der Form $Q = Q_1 \times Q_2$ darstellen lassen, wobei $Q_1 \subset \mathbb{R}^n$ und $Q_2 \subset \mathbb{R}^m$ selbst halboffene Quader sind. Demnach ist $Q \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ und somit

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \ .$$

Wir erhalten also

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \ .$$

Da $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)}^{\lambda_{n+m}} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ und $\lambda_{n+m}|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes_\sigma \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)} = \lambda_n \otimes \lambda_m$, folgt die Behauptung 5.

Für die iterierte Berechnung von Lebesgue-Integralen benötigen wir also einen "Satz von Fubini" für die Vervollständigung von Produktmaßen.

$$(X \times Y, \overline{\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}}^{\mu \otimes \nu}, \overline{\mu \otimes \nu})$$

Satz 9.38. *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige, σ-endliche Maßräume. Sei $E \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}$ eine Nullmenge, d.h. $(\mu \otimes \nu)(E) = 0$, und $F \subset E$. Dann gilt für die Schnitte von F*

1. *$\mu(F_y) = 0$ für ν-fast alle $y \in Y$.*
2. *$\nu(F_x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$.*

Beweis: Nach Folgerung 6 ist $\nu(E_x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$. Da $F_x \subset E_x$ und ν vollständig ist, ist $F_x \in \mathcal{B}$ und $\nu(F_x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$. Analog zeigt man die andere Behauptung. ∎

Satz 9.39 (Satz von Fubini für die Vervollständigung von Produktmaßen)**.** *Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vollständige σ-endliche Maßräume.*

1. Sei $f : X \times Y \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A} \otimes_\sigma B$-meßbare Abbildung. Dann gilt:

a) $x \in X \mapsto f(x, y)$ ist $\mathcal{A}$-meßbar für ν-fast alle $y \in Y$ (d.h. auf Y_0)
$y \in Y \mapsto f(x, y)$ ist $\mathcal{B}$-meßbar für μ-fast alle $x \in X$ (d.h. auf X_0)

b) $x \in X_0 \mapsto \int\limits_Y f(x, y) d\nu(y)$ ist $\mathcal{A}$-meßbar
$y \in Y_0 \mapsto \int\limits_X f(x, y) d\mu(x)$ ist $\mathcal{B}$-meßbar.

c) $$\int\limits_{X \times Y} f(x, y) d(\overline{\mu \otimes \nu}) = \int\limits_{X_0} \Big(\int\limits_Y f(x, y) d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int\limits_{Y_0} \Big(\int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \Big) d\nu(y).$$

2. Sei $f : X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}$ eine $\overline{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}^{\mu \otimes \nu}$-integrierbare Funktion. Dann gilt

a) $y \in Y \mapsto f(x, y)$ ist ν-integrierbar für μ-fast alle $x \in X$ (d.h. auf X_0)
$x \in X \mapsto f(x, y)$ ist μ-integrierbar für ν-fast alle $y \in Y$ (d.h auf Y_0)

b) $x \in X_0 \mapsto \int\limits_Y f(x, y) d\nu(y)$ ist integrierbar
$y \in Y_0 \mapsto \int\limits_X f(x, y) d\mu(x)$ ist integrierbar.

c) $$\int\limits_{X \times Y} f(x, y) d(\overline{\mu \otimes \nu}) = \int\limits_{X_0} \Big(\int\limits_Y f(x, y) d\nu(y) \Big) d\mu(x) = \int\limits_{Y_0} \Big(\int\limits_X f(x, y) d\mu(x) \Big) d\nu(y).$$

Beweis: Wir beweisen lediglich die Behauptung 1 für charakteristische Funktionen. Danach schliesst man wie in Satz 9.37, dass die Behauptung 1 auch für einfache und nichtnegative meßbare Funktionen gilt. Die Behauptung 2 folgt dann wie im Satz 9.37 durch Zerlegung von f in $f = f^+ - f^-$ und Anwendung von 1. auf $f^\pm$.
Sei $H \in \overline{\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}}^{\mu \otimes v}$. Dann gilt nach Definition der Vervollständigung

$$H = G \cup F \quad , \quad G \in \mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B} \quad , \quad F \subset E \in \big(\mathcal{A} \otimes_\sigma \mathcal{B}\big)^0 .$$

Für die x-Schnitte gilt: $H_x = G_x \cup F_x$. Nach Satz 9.34 ist $G_x \in \mathcal{B}$, nach Satz 9.38 ist $F_x \in \mathcal{B}$ und $\nu(F_x) = 0$ für μ-fast alle $x \in X$. Demnach ist $H_x \in \mathcal{B}$ für μ-fast alle $x \in X$. Die Menge dieser $x \in X$ bezeichnen wir mit X_0. Auf X_0 gilt

$$\nu(H_x) = \nu(G_x \cup F_x) \leq \nu(G_x) + \underbrace{\nu(F_x)}_{=0} = \nu(G_x) .$$

Wegen $G_x \subset H_x$ und der Monotonie des Maßes erhalten wir $\nu(H_x) = \nu(G_x)$. Die Funktion $\chi_H(x, \cdot) = \chi_{H_x}$ ist meßbar auf X_0 und für $x \in X_0$ gilt

$$\int\limits_Y \chi_H(x, y) d\nu(y) = \nu(H_x) = \nu(G_x) = \int\limits_Y \chi_G(x, y) d\nu(y)$$

Die Behauptung 1.b) folgt dann aus Satz 9.37. Analog beweist man die Aussage für die y-Schnitte. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}\int\limits_{X\times Y} \chi_H d(\overline{\mu\otimes\nu}) &= \overline{(\mu\otimes\nu)}(H) = (\mu\otimes\nu)(G) \\ &\overset{9.37}{=} \int\limits_X \Big(\int\limits_Y \chi_G d\nu\Big) d\mu = \int\limits_Y \Big(\int\limits_X \chi_G d\mu\Big) d\nu \\ &= \int\limits_{X_0} \Big(\int\limits_Y \chi_H d\nu\Big) d\mu = \int\limits_{Y_0} \Big(\int\limits_X \chi_G d\mu\Big) d\nu\end{aligned}$$

■

Folgerung 7: Satz von Fubini für Lebesgue-integrierbare Funktionen
Seien $A \subset \mathbb{R}^n$ und $B \subset \mathbb{R}^m$ Lebesgue-meßbare Mengen und $f : A \times B \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare oder nichtnegative, Lebesgue-meßbare Abbildung. Dann gilt

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y) d\lambda_{n+m}(x,y) = \int\limits_{A_0} \Big(\int\limits_B f(x,y) d\lambda_m(y)\Big) d\lambda_n(x) = \int\limits_{B_0} \Big(\int\limits_A f(x,y) d\lambda_n(x)\Big) d\lambda_m(y)$$

Ist f das Produkt von Funktionen, d.h. $f(x,y) = h(x)\cdot g(y)$ für integrierbare Funktionen $h : A \to \bar{\mathbb{R}}$ und $g : B \to \bar{\mathbb{R}}$, so gilt

$$\int\limits_{A\times B} f \; d\lambda_{n+m} = \Big(\int\limits_A h \; d\lambda_n\Big) \cdot \Big(\int\limits_B g \; d\lambda_m\Big) .$$

Folgerung 8: *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-meßbare Menge und $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ eine Lebesgue-integrierbare oder nichtnegative, meßbare Abbildung. Dann gilt für das Lebesgue-Integral*

$$\begin{aligned}\int\limits_E f d\lambda_n &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_E f d\lambda_n = \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (\chi_E f)(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n) \; d\lambda_{n-1}(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)\Big) dx_i \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(\int\limits_{E_{x_i}} f(x_1,\ldots,x_n) \; d\lambda_{n-1}(x_1,\ldots,\hat{x}_i,\ldots,x_n)\Big) dx_i\end{aligned}$$

Hier benutzen wir zur Abkürzung das Symbol dx_i für das 1-dimensionale Lebesgue-Maß $d\lambda_1(x_i)$. Für die Schnitte E_{x_i} gilt

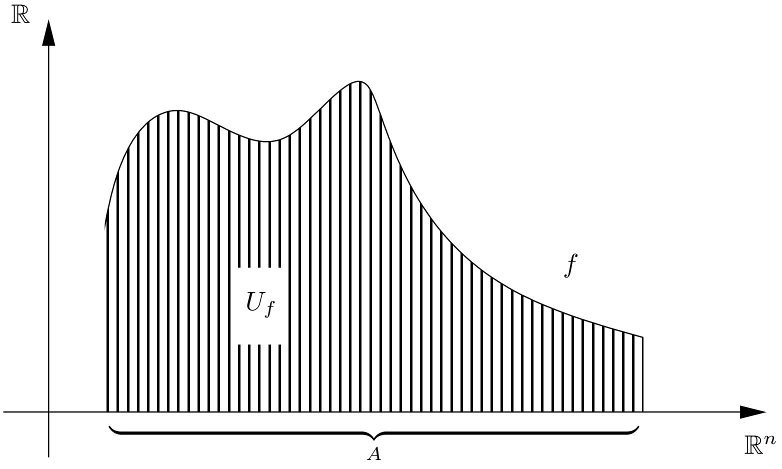
$$E_{x_i} = \{(y_1,\ldots,y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (y_1,\ldots,y_{i-1},x_i,y_i,\ldots,y_{n-1}) \in E\} .$$

Folgerung 9: Prinzip von Cavalieri
Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-meßbare Menge. Dann berechnet sich das Lebesgue-Maß durch

$$\lambda_n(E) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(E_{x_i}) dx_i \qquad i = 1,\ldots,n$$

(Man integriert die Maße der x_i-Schnitte von E).

Beispiel 1: Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar und $f : A \to [0, \infty]$ Lebesgue-integrierbar. Wir bezeichnen mit U_f die Menge $U_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A,\, y \in [0, f(x)]\}$



Dann gilt:

$$\lambda_n(U_f) = \int_A f(x) d\lambda_n(x)$$

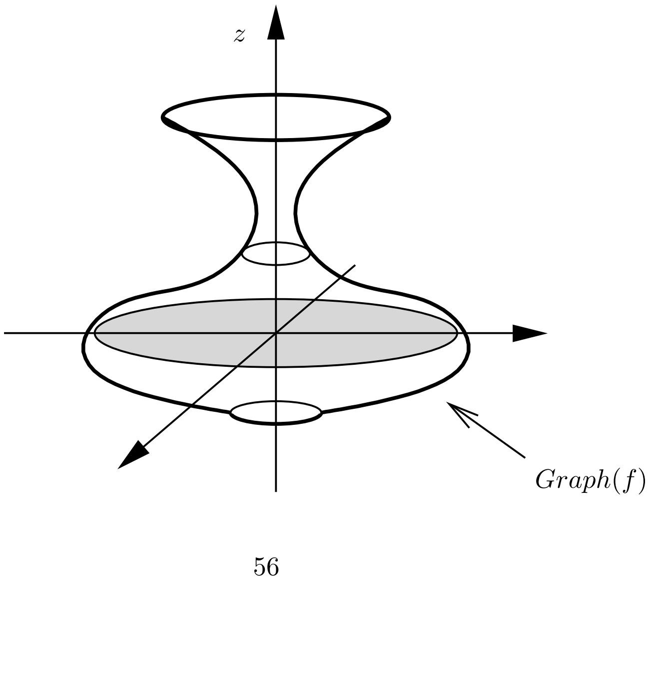
Dies ist die Verallgemeinerung der entsprechenden Formel für das Riemann-Integral. Dies folgt da

$$(U_f)_x \;=\; \{t \in \mathbb{R} \mid (x, t) \in U_f\} \;=\; \begin{cases} \emptyset & \text{falls } x \notin A \\ [0, f(x)] & \text{falls } x \in A \end{cases}$$

und folglich

$$\lambda_n(U_f) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1((U_f)_x)\; d\lambda_n(x) = \int_A \lambda_1([0, f(x)])\; d\lambda_n(x) = \int_A f(x)\; d\lambda_n(x)$$

Beispiel 2: Das Volumen von Rotationskörpern im $\mathbb{R}^3$.
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^1$ Lebesgue-integrierbar, $f \geq 0$. Wir betrachten den Graphen der Funktion $x = f(z)$ in der (x, z)-Ebene und rotieren diese Kurve um die z-Achse



Sei V_f die Menge, die von der dabei entstehenden Fläche eingeschlossen wird. V_f heißt *der von f erzeugte Rotationskörper*. Es gilt

$$V_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [a,b] \text{ und } x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

Das Lebesgue-Maß von V_f ist

$$\lambda_3(V_f) = \pi \cdot \int_a^b f(z)^2 \, d\lambda_1(z) \ .$$

Um das einzusehen, berechnen wir das Maß der z-Schnitte. Die Menge

$$(V_f)_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq f(z)^2\}$$

ist eine Kreisscheibe vom Radius $f(z)$. Für das Maß gilt deshalb

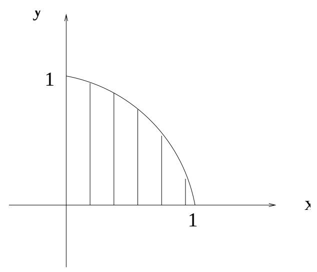
$$\lambda_2((V_f)_z) \ = \ \text{Area}(K(0, f(z))) = \pi \ \cdot f(z)^2 \ .$$

Aus dem Prinzip von Cavalieri erhalten wir

$$\lambda_3(V_f) = \int_{V_f} d\lambda_3 = \int_a^b \lambda_2((V_f)_z) \, d\lambda_1(z) = \pi \int_a^b f(z)^2 d\lambda_1(z) \ .$$

Beispiel 3: Sei $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \ , \ x, y \geq 0\}$ die Viertelkreisscheibe und f die durch $f(x,y) = x \cdot y$ definierte stetige Funktion. Wir berechnen das Integral von f über A.
Für die x-Schnitte von A erhalten wir

$$A_x = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ [0, \sqrt{1-x^2}] & \text{falls } x \in [0,1] \end{cases}$$



Für das Integral folgt dann aus dem Prinzip von Cavalieri

$$\begin{aligned} \int_A f d\lambda^2 \ &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_A f \ d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} (\chi_A f)(x,y) \ d\lambda_1(y) \Big) d\lambda_1(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{A_x} f(x,y) \ dy \Big) dx = \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \ dy \Big) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

9.6 Die Transformationsformel für Lebesgue-Integrale

Für Riemann-Integrale kennen wir die folgende Transformationsformel. Ist $\varphi : I \to \hat{I}$ ein C^1-Diffeomorphismus und $f : \hat{I} \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_I f(\varphi(t)) \cdot |\varphi'(t)| \; dt = \int_{\hat{I}=\varphi(I)} f(x) \; dx$$

Dies erhält man durch die Variablensubstitution $x = \varphi(t)$. Wir wollen diese Formel auf Lebesgue-Integrale im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern. Dazu erinnern wir zunächst nochmal an die Jacobi-Matrix einer glatten Abbildung $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Ist x ein Punkt der offenen Menge U, so ist die Jacobi-Matrix von φ in x gegeben durch

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Satz 9.40 (Transformationsformel für das Lebesgue-Integral). *Seien U und V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $\varphi : U \longrightarrow V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $(f \circ \varphi) \cdot |\mathrm{Det} D\varphi| : U \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Es gilt dann*

$$\int_{V=\varphi(U)} f \; d\lambda_n = \int_U (f \circ \varphi) \cdot |\mathrm{Det} D\varphi| \; d\lambda_n.$$

Folgerung 10: *Ist $A \subset U$ eine Lebesgue-meßbare Menge und $\varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist das Bild $\varphi(A) \subset V$ ebenfalls Lebesgue-meßbar und man kann das Maß folgendermaßen berechnen:*

$$\lambda_n(\varphi(A)) = \int_A |\mathrm{Det} D\varphi(x)| \; d\lambda_n(x) \qquad (*)$$

Die Lebesgue-Meßbarkeit von $\varphi(A)$ folgt bereits aus Satz 9.13. Folgerung 10 verallgemeinert die Formel für $\lambda_n(L(A))$ für lineare Abbildungen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aus Satz 9.13. Ist nämlich L linear, so gilt $DL(x) = L$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und man erhält aus Folgerung 10

$$\lambda_n(L(A)) = \int_A |\mathrm{Det} DL(x)| \; d\lambda^n(x) = \int_A |\mathrm{Det} L| \; d\lambda_n = |\mathrm{Det} L| \cdot \lambda_n(A) \; .$$

Beweis von Satz 9.40:[3]
Wir benutzen die Transformationsformel für Riemann-Integrale im $\mathbb{R}^1$ und führen den allgemeinen Fall mittels Induktion und dem Satz von Fubini darauf zurück.

1. Die Folgerung 10 ist offensichtlich ein Spezialfall von Satz 9.40 (Man setze $f = 1$). Wir zeigen als erstes, dass die Transformationsformel aus Satz 9.40 bereits aus Folgerung 10

[3]Dieser Beweis stammt aus dem Buch von T. Bröcker: Analysis II

folgt: Ist f eine Treppenfunktion, so folgt aus $(*)$ und der Linearität des Integrals sofort, dass $(f\circ\varphi)\cdot|\mathrm{Det}D\varphi|$ integrierbar ist und die Integralformel aus Satz 9.40 gilt. Ist $f : V \to \mathbb{R}$ nichtnegativ, so wählt man eine monotone Folge einfacher Funktionen $f_n \uparrow f$ und erhält die Behauptung von Satz 9.40 aus dem Satz von Beppo Levi. Eine beliebige integrierbare Funktion f zerlegt man in $f = f^+ - f^-$ und benutzt die schon bewiesene Aussage für $f^\pm$. Die Umkehrung folgt, indem man die Transformation φ^{-1} anwendet und analog argumentiert. Zum Beweis von Satz 9.40 genügt es also, die Formel $(*)$ aus Folgerung 10 zu beweisen:

2. Weiterhin genügt es, folgende lokale Aussage zu beweisen: Jeder Punkt $p \in U$ hat eine offene Umgebung W, so dass die Formel $(*)$ für die Transformation $\varphi|_W : W \to \varphi(W)$ gilt. Ist dies gezeigt, so überdeckt man U durch abzählbar viele solche offenen Mengen W_j, $j \in \mathbb{N}$, z.B. durch Kugeln mit rationalem Durchmesser und Mittelpunkt. Dann zerlegt man A in disjunkte Teile $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ mit $A_k \subset W_{j(k)}$ und benutzt, dass beide Seiten von $(*)$ σ-additiv sind.

3. Wir zeigen als nächstes, dass die Formel $(*)$ für $n = 1$ gilt: Die Transformationsformel für das Riemann-Integral zeigt, dass die Maße

$$\begin{aligned} \mu_1 : A \in \mathcal{L}(U) &\to \lambda_1(\varphi(A)) \qquad \text{und} \\ \mu_2 : A \in \mathcal{L}(U) &\to \int\limits_A |\mathrm{Det}D\varphi(x)| d\lambda_1(x) \end{aligned}$$

auf allen kompakten Intervallen übereinstimmen. Da Maße unterhalb stetig sind, und $[a,b) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [a, b-\frac{1}{n}]$ gilt, stimmen beide Maße auch auf halboffenen Intervallen überein. μ_1 und μ_2 sind auf kompakten Mengen endlich und U läßt sich durch kompakte Mengen ausschöpfen. Folglich sind die Maße μ_1 und μ_2 σ-endlich. Nach dem Hahnschen Fortsetzungssatz, stimmen dann μ_1 und μ_2 auf $\mathcal{L}(U)$ überein.

4. Gilt die Formel $(*)$ für zwei Transformationen $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$, so gilt sie auch für die Hintereinanderausführung $\psi\circ\varphi : U \to W$. Dies folgt aus der Produktregel für die Determinante

$$\mathrm{Det}(D(\psi\circ\varphi)(x)) = \mathrm{Det}[(D\psi)(\varphi(x))]\cdot\mathrm{Det}[(D\varphi)(x)]$$

und der Äquivalenz von $(*)$ und Satz 9.40.
Die Formel $(*)$ gilt insbesondere für die Permutation von Variablen, da dies eine lineare Abbildung ist, für die die Behauptung bereits in Satz 9.13 gezeigt wurde. Wir können also OBdA Variablen im Bildbereich und im Urbildbereich vertauschen, ohne die Gültigkeit von $(*)$ zu verletzen.

5. Wir beweisen nun die lokale Aussage 2.) durch Induktion über n.
Für $n = 1$ wurde die Behauptung bereits im Punkt 3.) gezeigt. Wir setzen voraus, dass die Behauptung in Dimension $n-1$ gilt und schließen auf die Dimension n.
Sei $\varphi : U \to \varphi(U) = V$ ein Diffeomorphismus und $p \in U$. Da $D\varphi(p) \neq 0$, kann man nach Permutation von Koordinaten in U und V annehmen, dass $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$. Wir zerlegen nun φ lokal um p wie folgt in die Verknüpfung zweier Abbildungen:
Sei $\psi(x_1,\dots,x_n) := (\varphi_1(x), x_2,\dots,x_n)$. Dann gilt

$$D\psi = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & * \\ \hline 0 & 1 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & \quad 1 \end{array}\right)$$

Also ist $\mathrm{Det}(D\psi(p)) \neq 0$. Folglich ist ψ lokaler Diffeomorphismus um p (siehe Analysis II, Kapitel 6). Sei nun U so klein gewählt, dass $\psi : U \to W$ ein Diffeomorphismus von U auf eine offene Menge W ist. Wir bezeichnen dann mit $\rho : W \to V$ die Abbildung $\rho := \varphi \circ \psi^{-1}$. Dann gilt offensichtlich $\rho(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1, \rho_2(y), \ldots, \rho_n(y))$. Wir haben also lokal um p den Diffeomorphismus φ in die Verknüpfung zweier Diffeomorphismen ψ und ρ zerlegt, die beide mindestens eine Koordinate festlassen:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & V \\ & W \arrow[ur, "\rho:=\varphi\cdot\psi^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Entsprechend Punkt 4.) genügt es somit, die lokale Behauptung 2.) für Abbildungen φ zu beweisen, die die 1. Koordinate festlassen. Sei also

$$\begin{aligned} \varphi &: (t,x) \in U \to (t, \varphi_t(x)) \qquad \text{mit} \\ \varphi_t &: U_t := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (t,x) \in U\} \to \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

Dann gilt

$$(D\varphi)(t,x) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\ldots 0 \\ \hline * & (D\varphi_t)(x) \end{array}\right)$$

d.h. $\mathrm{Det}(D\varphi(t,x)) = \mathrm{Det}\, D\varphi_t(x)$. Wir wenden nun die Induktionsvoraussetzung, das Prinzip von Cavalieri und den Satz von Fubini an, und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varphi(A)) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi(A)_t)\, d\lambda_1(t) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(\varphi_t(A_t))\, d\lambda_1(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{A_t} |\mathrm{Det}\ D\varphi_t(x)|\, d\lambda_{n-1}(x) \Big)\, d\lambda_1(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t} |\mathrm{Det}\ D\varphi_t(x)|\, d\lambda_{n-1}(x) \Big)\, d\lambda_1(t) \\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A\, |\mathrm{Det}\ D\varphi|\, d\lambda_n \\ &= \int_A |\mathrm{Det}\ D\varphi|\, d\lambda_n. \end{aligned}$$

■

Beispiel: Das Volumen der Kugel vom Radius R im $\mathbb{R}^n$

Sei $D^n(R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq R\}$ die Vollkugel vom Radius R im $\mathbb{R}^n$. Wir wollen folgende Formel für das Volumen zeigen:

Satz 9.41. *Für das Volumen der Kugel $D^n(R)$ gilt*

$$\text{Vol }(D^n(R)) = \begin{cases} \frac{\pi^{n/2}\cdot R^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!} & n \text{ gerade} \\ \\ \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\cdot\pi^{\frac{n-1}{2}}\cdot R^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für die kleinen Dimensionen erhält man

$$\begin{aligned} \text{Vol }(D^1(R)) &= 2R \\ \text{Vol }(D^2(R)) &= \pi R^2 \\ \text{Vol }(D^3(R)) &= \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{Vol }(D^4(R)) &= \frac{1}{2}\pi^2 R^4 \\ \text{Vol }(D^5(R)) &= \frac{8}{15}\pi^2 R^5 \ . \end{aligned}$$

Außerdem folgt folgende Rekursionsformel für das Volumen:

$$\text{Vol }(D^n(R)) = \frac{2}{n}\ \pi\ R^2\ \text{Vol }(D^{n-2}(R))\ .$$

Beweis von Satz 9.41:
Um das Volumen der Kugel zu berechnen, führen wir Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ ein.
Sei g_n die Abbildung

$$g_n : \underbrace{(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})^{n-2}}_{U_1} \to \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus A}_{U_2}$$

$$g_n(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n) =: (x_1,\ldots,x_n) \qquad \text{mit}$$

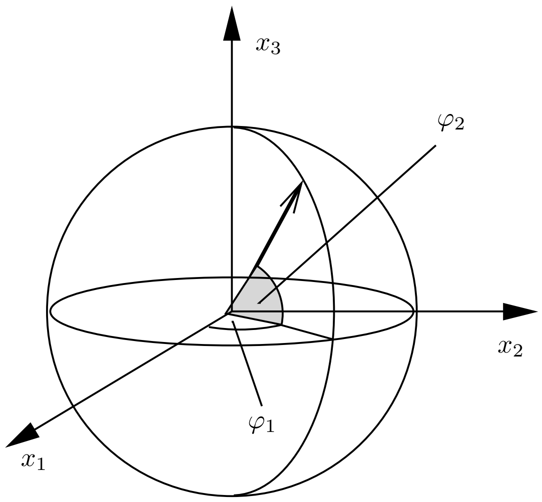
$$\begin{aligned} x_1 &:= r\cdot\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\cdot\cos\varphi_3\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-2}\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ x_2 &:= r\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\cdot\cos\varphi_3\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-2}\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ x_3 &:= r\cdot\sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_3\cdot\ldots\cdot\cos\varphi_{n-2}\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ x_4 &:= r\cdot\sin\varphi_3\cdot\cos\varphi_4\cdot\cdots\cdot\cos\varphi_{n-2}\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ &\vdots \\ x_{n-1} &:= r\cdot\sin\varphi_{n-2}\cdot\cos\varphi_{n-1} \\ x_n &:= r\cdot\sin\varphi_{n-1} \end{aligned}$$

$g_n : U_1 \to U_2$ ist ein C^1-Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen U_1 und U_2, A bezeichnet dabei die Nullmenge, die man herausnehmen muß, um einen Diffeomorphismus zu erhalten.
Für $n = 2$ sind dies z.B. die Polarkoordinaten in der Ebene

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cdot\cos\varphi_1 \\ x_2 &= r\cdot\sin\varphi_1. \end{aligned}$$

Für $n = 3$ sind dies z.B. die Kugelkoordinaten im Raum

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cdot\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 \\ x_2 &= r\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 \\ x_3 &= r\cdot\sin\varphi_2\ . \end{aligned}$$



Offensichtlich gilt

$$g_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}) = \big(g_{n-1}(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2})\cdot\cos\varphi_{n-1}, r\cdot\sin\varphi_{n-1}\big)$$

Daraus erhalten wir

$$Dg_n = \left(\begin{array}{c|c} Dg_{n-1}\cdot\cos\varphi_{n-1} & -\sin\varphi_{n-1}\cdot g_{n-1}^t \\ \hline \sin\varphi_{n-1}\ 0\dots\ 0 & r\cdot\cos\varphi_{n-1} \end{array}\right)$$

Es folgt

$$\mathrm{Det}\big((Dg_n)(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\big) = r\cdot\cos^{n-2}(\varphi_{n-1})\cdot\mathrm{Det}\big((Dg_{n-1})(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-2})\big)$$

Durch Induktion ergibt sich für die Funktionaldeterminante von g_n

$$|\mathrm{Det}\big(Dg_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})\big)| = r^{n-1}\cos\varphi_2\cdot\cos^2\varphi_3\dots\cdot\cos^{n-2}(\varphi_{n-1})$$

Wir setzen dies in die Formel (*) aus Folgerung 10 ein, benutzen den Satz von Fubini und erhalten für das Volumen der Kugel

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}\ (D^n(R)) &= \int\limits_{[0,R)}\int\limits_{[0,2\pi]}\int\limits_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} |\mathrm{Det}Dg_n(r,\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})|\ dr d\varphi_1\dots d\varphi_{n-1} \\
&= \int_0^R r^{n-1}dr\cdot\int_0^{2\pi}d\varphi_1\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi_2 d\varphi_2\ \cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi_3 d\varphi_3\cdot\ldots\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}(\varphi_{n-1})d\varphi_{n-1} \\
&= \frac{2\pi}{n}\cdot R^n\cdot 2^{n-2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(t)dt\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt\cdot\ldots\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}(t)dt
\end{aligned}$$

In Kapitel 7 von Analysis II haben wir die folgenden Integrale berechnet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k(t)dt = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)}\cdot\frac{\pi}{2} & k=2m \\ \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2m)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2m+1)} & k=2m+1 \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-3}(t)dt \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(t)dt &= \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)} & n-2=2k \\ \\ \frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k+1)} \cdot \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k)} \cdot \frac{\pi}{2} & n-2=2k+1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2} & n-2=2k \\ \\ \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{\pi}{2} & n-2=2k+1 \end{cases} \\
&= \frac{1}{n-2} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Setzt man dies in die obigen Integrale ein, so folgt für das Volumen die folgende Rekursionsformel

$$\text{Vol }(D^n(R)) = \frac{2}{n}\pi R^2 \cdot \text{Vol }(D^{n-2}(R))$$

Für $n=1$ und $n=2$ berechnet man das Volumen direkt und erhält

$$
\begin{aligned}
\text{Vol }(D^1(R)) &= 2R \\
\text{Vol }(D^2(R)) &= \pi R^2 \ .
\end{aligned}
$$

Dann folgt die Behauptung von Satz 9.41 durch Induktion aus der Rekursionsformel. ■

9.7 L^p-Räume

In diesem Abschnitt lernen wir weitere unendlich-dimensionale Banachräume kennen, die L^p-Räume.
Zur Erinnerung: Ein Banachraum ist ein vollständiger normierter Vektorraum $(E, \|\cdot\|)$, d.h. jede Cauchy-Folge in diesem normierten Raum konvergiert. Wir kennen bereits folgende Beispiele aus Analysis I und II:

1. Jeder endlich-dimensionale normierte Vektorraum ist ein Banachraum (siehe Analysis II, Kapitel 7).

2. Sei E die Menge aller beschränkten Folgen $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ von reellen Zahlen mit der Vektorraumstruktur

$$\lambda \cdot \underline{x} + \mu \cdot \underline{y} := (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \ldots)$$

und der Norm

$$\|\underline{x}\| := \sup_i |x_i| \ .$$

Dann ist $(E, \|\cdot\|)$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum.

3. Sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $E := C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig } \}$ der Vektorraum der reellwertigen stetigen Funktionen auf X mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Dann ist $(C(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum.

4. Sei $E := C([0,1],\mathbb{R})$ und $\|f\|_1 := \int\limits_0^1 |f(t)|dt$. Dann ist $(E, \|\cdot\|_1)$ ein ∞-dimensionaler, aber nicht vollständiger normierter VR. Um dies einzusehen betrachtet man die Folge

$$f_n(t) := \begin{cases} \min(n, \frac{1}{\sqrt{t}}) & \text{falls } t > 0 \\ n & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

und zeigt, dass (f_n) eine Cauchy-Folge in $(E, \|\cdot\|_1)$ ist, die nicht konvergiert (die Grenzfunktion ist nicht stetig (Übungsaufgabe 11.35).

Im folgenden werden wir nun jedem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eine Serie von Banachräumen zuordnen. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und p eine positive reelle Zahl. $\mathbb{K}$ bezeichne den Vektorraum $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, die erweiterten reellen Zahlen $\bar{\mathbb{R}}$ oder den Vektorraum $\mathbb{C}$ der komlexen Zahlen. Wir betrachten die Menge der Funktionen

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^p := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \mid f \ \mathcal{A}\text{-meßbar und } \int\limits_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

und nennen für $f \in \mathcal{L}^p$ die Zahl

$$0 \leq \|f\|_p := \left(\int\limits_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

die <u>L^p-Norm von f</u>.

Es ist natürlich sofort zu sehen, dass $\|\cdot\|_p$ <u>keine</u> Norm auf $\mathcal{L}^p$ ist, denn es gilt ja $\|f\|_p = 0$ für Funktionen $f : X \to \mathbb{K}$, die nur fast überall Null sind. Wir werden deshalb den Funktionenraum $\mathcal{L}^p$ durch Bildung von Äquivalenzklassen so modifizieren, dass ein Vektorraum entsteht, auf dem $\|\cdot\|_p$ zumindest im Fall $1 \leq p < +\infty$ tatsächlich eine Norm ist.
Zunächst bemerken wir, dass für jede positive reelle Zahl p die Eigenschaft

$$\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p \qquad f \in \mathcal{L}^p\,,\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}$$

gilt. Als nächstes wollen wir die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$ beweisen. Dazu beweisen wir die Hölder- und die Minkowski-Ungleichung für Maßräume, die die klassische Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und die Dreiecksungleichung für Euklidische Vektorräume verallgemeinern.

Satz 9.42 (Hölder-Ungleichung). *Seien $1 < p,\ q < +\infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für $f \in \mathcal{L}^p$ und $h \in \mathcal{L}^q$ gilt $f \cdot h \in \mathcal{L}^1$ und es ist*

$$\|f \cdot h\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|h\|_q \qquad \textit{(Hölderungleichung)}$$

d.h.

$$\int\limits_X |f \cdot h| \ d\mu \leq \Big(\int\limits_X |f|^p d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int\limits_X |h|^q d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Beweis: Wir zeigen zunächst die folgende Ungleichung für reelle Zahlen:

$$a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} \cdot a + \frac{1}{q} \cdot b \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad (*)$$

Zum Beweis von $(*)$ betrachten wir die Funktion $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\varphi(t) := \frac{1}{p} t + \frac{1}{q} - t^{\frac{1}{p}} .$$

Dann ist

$$\varphi'(t) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\, t^{\frac{1}{p}-1} = \frac{1}{p}\Big(1 - \frac{1}{t^{1-\frac{1}{p}}}\Big) \quad \begin{cases} > 0 & \text{falls } t \in (1,\infty) \\ < 0 & \text{falls } t \in (0,1) \end{cases}$$

Die Funktion φ ist somit monoton wachsend auf $(1,+\infty)$ und monoton fallend auf $(0,1)$. Da $\varphi(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 = 0$, ist $\varphi \geq 0$ auf $(0,+\infty)$. Wir setzen nun $t := \frac{a}{b},\ a,b > 0$. Dann folgt

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{a}{b} + \frac{1}{q} - \Big(\frac{a}{b}\Big)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

d.h.

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q} \;\geq\; a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{1-\frac{1}{p}} \;=\; a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \;.$$

Falls $\|f\|_p = 0$ oder $\|h\|_q = 0$ gilt, so folgt $f = 0$ oder $h = 0$ μ-fast überall und somit die Behauptung des Satzes unmittelbar. Wir können also annehmen, dass $\|f\|_p > 0$ und $\|h\|_q > 0$ gilt.
Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die Werte $|f(x)|^p$ und $|h(x)|^q$ für jedes $x \in X$ endlich. Im Falle $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{R}}$ gilt dies nach Satz 9.27 für μ-fast alle $x \in X$, dh. auf einer Menge $X_0 \subset X$, die sich von X nur durch eine Nullmenge unterscheidet. Wir können also weiterhin annehmen, dass

$$|f(x)|^p < \infty \quad \text{und} \quad |h(x)|^q < \infty \quad \forall x \in X_0 \;.$$

Wir setzen nun für $x \in X_0$ in $(*)$

$$a := \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{und} \quad b := \frac{|h(x)|^q}{\|h\|_q^q} \;.$$

Dann folgt

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|h(x)|}{\|h\|_q} \;\leq\; \frac{1}{p}\,\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|h(x)|^q}{\|h\|_q^q} \;.$$

Integrieren wir dies über X_0 (bzw. über die sich von X_0 nur durch eine Nullmenge unterscheidende Menge X), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|h\|_q} \cdot \int\limits_X |f(x)\cdot h(x)|\; d\mu \;&\leq\; \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{\|f\|_p^p}\int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x) + \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{\|h\|_q^q}\cdot\int\limits_X |h(x)|^q d\mu(x) \\ &=\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \;=\; 1 \end{aligned}$$

und somit

$$\|f \cdot h\|_1 \;\leq\; \|f\|_p \cdot \|h\|_q \;.$$

■

Satz 9.43 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Sei* $1 \leq p < \infty$ *und seien* $f, h \in \mathcal{L}^p$*. Dann gilt* $f + h \in \mathcal{L}^p$ *und*

$$\|f + h\|_p \leq \|f\|_p + \|h\|_p \qquad \textit{(Minkowski-Ungleichung)}$$

d.h.

$$\Big(\int\limits_X |f + h|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int\limits_X |f|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_X |h|^p d\mu\Big)^{\frac{1}{p}} \;.$$

Beweis: Für $p = 1$ ist die Behauptung trivial. Sei $p > 1$. Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt

$$|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p) \ , \qquad (**)$$

denn

$$\begin{aligned} |a+b|^p \ &\leq \ (|a|+|b|)^p \ \leq \ (2 \cdot \max(|a|,|b|))^p \\ &\leq \ 2^p \cdot \max(|a|^p, |b|^p) \ \leq \ 2^p(|a|^p + |b|^p) \ . \end{aligned}$$

Wir setzen nun $a = f(x)$ und $b = h(x)$ und integrieren $(**)$. Damit erhält man

$$\int\limits_X |f(x)+h(x)|^p d\mu(x) \ \leq \ 2^p \ \Big(\int\limits_X |f(x)|^p d\mu(x) + \int\limits_X |h(x)|^p d\mu(x) \Big) < \infty$$

und somit $f + h \in \mathcal{L}^p$. Wir zeigen nun die Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$. Wir benutzen dazu die Hölderungleichung:

$$\begin{aligned} \int\limits_X |f+h|^p d\mu \ &= \ \int\limits_X |f+h| \cdot |f+h|^{p-1} d\mu \\ &\leq \ \int\limits_X |f| \cdot |f+h|^{p-1} d\mu \ + \ \int\limits_X |h| \cdot |f+h|^{p-1} d\mu \\ &\leq \ \|f\|_p \Big(\int\limits_X |f+h|^{q(p-1)} d\mu \Big)^{\frac{1}{q}} \ + \ \|h\|_p \cdot \Big(\int\limits_X |f+h|^{q(p-1)} \Big)^{1/q} \\ &= \ (\|f\|_p + \|h\|_p) \cdot \Big(\int\limits_X |f+h|^{q(p-1)} d\mu \Big)^{1/q} \ . \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, folgt $p = q(p-1)$ und deshalb

$$\int\limits_X |f+h|^p d\mu \ \leq \ (\|f\|_p + \|h\|_p) \cdot \Big(\int\limits_X |f+h|^p d\mu \Big)^{1/q} \ .$$

Daraus folgt

$$\|f+h\|_p \ = \ \Big(\int\limits_X |f+h|^p d\mu \Big)^{1-1/q} \ \leq \ \|f\|_p + \|h\|_p \ .$$

■

Als Konsequenz erhalten wir, dass $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$ ist, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} \|f\|_p \ &\geq \ 0 \\ \|f+h\|_p \ &\leq \ \|f\|_p + \|h\|_p \\ \|\lambda \cdot f\|_p \ &= \ |\lambda| \cdot \|f\|_p \qquad\qquad \forall \ f, h \in \mathcal{L}^p, \ \lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \ \text{bzw.} \ \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Um einen normierten Vektorraum zu erhalten, müssen wir alle diejenigen $f \in \mathcal{L}^p$ "heraus-faktorisieren", für die $\|f\|_p = 0$ gilt. Das sind gerade diejenigen Funktionen, die sich nur auf einer μ-Nullmenge von Null unterscheiden. Im Falle $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ können wir durch Abändern auf einer Menge von Maß Null erreichen, dass f endliche Werte hat. Sei also

$$\mathcal{N} := \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f \ \ \mathcal{A}\text{-meßbar und } f = 0 \ \ \mu\text{-fast überall} \}$$

und bezeichne

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) = L^p := \mathcal{L}^p / \mathcal{N} \ .$$

Dies ist die Menge von Äquivalenzklassen gezüglich folgender Äquivalenzrelation $\sim$ auf der Menge $\mathcal{L}^p$

$$f \sim h \Longleftrightarrow f = h \quad \mu\text{-fast überall} .$$

Die Vektorraumstruktur und die Norm auf L^p definiert man vertreterweise (im Falle $\mathbb{K} = \bar{\mathbb{R}}$ für die Vertreter mit endlichen Werten):

$$[f] + [h] := [f + h] \quad , \quad \lambda \cdot [f] = [\lambda \cdot f] \quad , \quad \|[f]\|_p := \|f\|_p$$

Satz 9.44. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $(L^p(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum.*

Dieser Banachraum heißt *Banachraum der L^p-Funktionen* oder *der p-fach integrierbaren Funktionen auf dem Maßraum* $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Man schreibt auch kurz $f \in L^p$ und versteht darunter die von f erzeugte Klasse $[f] \in L^p$. Die Konvergenz $f_n \stackrel{L^p}{\to} f$ bzgl. $\|\cdot\|_p$ heißt *Konvergenz im p-Mittel.* Die Funktionen $f \in L^2$ nennt man *quadratisch integrierbar* und die Konvergenz in L^2 heißt *Konvergenz im quadratischen Mittel.*

Beweis von Satz 9.44: Sei (f_n) eine Cauchy-Folge aus $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$ einen Index n_k, so dass

$$\|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall n, m \geq n_k .$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Wir betrachten nun die folgende Funktionenfolge (g_k)

$$g_k := |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \qquad , \quad k \in \mathbb{N} .$$

Die Funktionen $g_k : X \to [0, \infty]$ sind $\mathcal{A}$-meßbar, nichtnegativ und es gilt $g_k \leq g_{k+1}$. Aus der Minkowski-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
\|g_k\|_p &= \| \, |f_{n_1}| + \sum_{j=1}^{k} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \, \|_p \\
&\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \\
&\leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^j} \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \|f_{n_1}\|_p + 1 < \infty .
\end{aligned}$$

Aus dem Satz über die monotone Konvergenz und der Existenz der Majorante folgt

$$\lim_{h \to \infty} \|g_k\|_p^p = \lim_{k \to \infty} \int_X g_k^p \, d\mu = \int_X \big(\lim_{k \to \infty} g_k^p \big) d\mu < \infty .$$

Nach Satz 9.27 folgt daraus, dass die Funktion $\lim\limits_{k \to \infty} g_k^p$ μ-fast überall endlich ist. Sei nun $A \subset X$ eine Nullmenge, so dass $\lim\limits_{k \to \infty} g_k(x) < \infty$ für alle $x \in X \setminus A$ gilt. Wir fixieren ein $x \in X \setminus A$. Nach Definition von $g_k(x)$ gilt

$$\lim_{k \to \infty} g_k(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| .$$

Somit ist die Reihe

$$f_{n_j}(x) + \sum_{j=1}^{\infty}(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) \qquad (*)$$

im Vektorraum $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ absolut konvergent, also auch konvergent. Die $(k-1)$.-Partialsumme der Reihe $(*)$ ist $f_{n_k}(x)$. Folglich existiert der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$. Wir setzen nun

$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x) & x \in X \setminus A \\ 0 & x \in A \end{cases}$$

Die Funktion $f|_{X\setminus A}$ ist als Grenzfunktion $\mathcal{A}$-meßbarer Funktionen ebenfalls $\mathcal{A}$-meßbar. $f|_A$ ist konstant, also $\mathcal{A}$-meßbar. Somit ist f $\mathcal{A}$-meßbar (Sätze 9.14 und 9.17). Wir zeigen nun, dass

$$f_n \longrightarrow f \qquad \text{in } \; L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \; .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Index n_ε so dass $\|f_n - f_m\|_m < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_\varepsilon$. Aus dem Lemma von Fatoo (Satz 9.24) folgt

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_p^p &= \int_X |\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p d\mu(x) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_k}(x) - f_n(x)|^p d\mu(x) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_n\|_p^p < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $n > n_\varepsilon$. Da

$$\|f\|_p \leq \|f - f_n\|_p + \|f_n\|_p < \varepsilon + \|f_n\|_p < \infty \; ,$$

ist $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $f_n \to f$ in L^p. ■

Bemerkung: Im Satz 9.44 haben wir uns auf den Fall $1 \leq p < \infty$ beschränkt. Für $0 < p < 1$ ist $\|\cdot\|_p$ keine Norm, denn die Dreiecksungleichung gilt nur für $p \geq 1$. Für $0 < p < 1$ kann man auf L^p aber eine Metrik durch

$$d_p(f, h) := \|f - h\|_p^p \qquad\qquad f, h \in L^p$$

definieren, deren Vollständigkeit man analog beweist. Man kann auch $p = +\infty$ zulassen. Dazu betrachtet man den Raum der wesentlich beschränkten Funktionen L^∞. Die Definition des Raumes $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ und seine Eigenschaften findet man in den Übungsaufgaben 11.38*-11.41*.

Aus dem Beweis von Satz 9.44 erhält man auch die folgende Beziehung zwischen der Konvergenz im p-Mittel und der punktweisen Konvergenz:

Folgerung 11: *Sei (f_n) eine Folge von L^p-Funktionen, die im p.- Mittel gegen die Funktion $f \in L^p = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ konvergiert. Dann existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) die μ-fast überall punktweise gegen f konvergiert.*

Satz 9.45. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < +\infty$. Dann gilt für $1 \le p < r$*

$$L^r(X, \mathcal{A}, \mu) \subset L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \ .$$

Beweis: Sei $f \in L^r$. Da $\mu(X) < \infty$ gilt, liegt die Funktion, die konstant den Wert 1 annimmt, für jedes $s \ge 1$ im Raum L^s. Aus der Hölderungleichung für die Zahl $\frac{r}{p} > 1$ folgt

$$\int\limits_X |f(x)|^p \cdot 1 \; d\mu(x) \;\le\; \Big(\int\limits_X (|f(x)|^p \; d\mu(x)\Big)^{\frac{p}{r}} \cdot \Big(\int\limits_X 1 \; d\mu(x)\Big)^{\frac{r-p}{r}} \ ,$$

also

$$\|f\|_p \le \|f\|_r \cdot \mu(X)^{\frac{r-p}{r \cdot p}} < +\infty \ .$$

Damit ist $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. ■

Die Aussage von Satz 9.45 gilt im allgemeinen nicht, wenn $\mu(X) = +\infty$. Sei zum Beispiel $X = [1, \infty)$ und μ das Lebesgue-Maß. Die Funktion f, definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$, liegt in $L^2([1,\infty))$ aber nicht in $L^1([1,\infty))$.

Abschließend betrachten wir Maßräume, auf denen zusätzlich eine Metrik gegeben ist und geben ein Kriterium dafür an, dass die stetigen Funktionen dicht in den L^p-Funktionen liegen.

Satz 9.46. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, d eine Metrik auf X und $\mathcal{B}(X)$ die σ-Algebra der Borel-Mengen von (X, d). Es gelte*

1. *$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$ und*
2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $A \in \mathcal{A}$ existiert eine abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset A$ so dass $\mu(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Dann gilt

$$cl\Big(C(X) \cap L^p(X, \mathcal{A}, \mu)\Big) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \ ,$$

d.h. die stetigen L^p-Funktionen liegen dicht im Raum der L^p-Funktionen.

Für das Lebesgue-Maß sind die Voraussetzungen von Satz 9.46 erfüllt und wir erhalten

Folgerung 12: *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-meßbare Menge. Dann gilt*

$$cl\Big(C(A) \cap L^p(A, \mathcal{L}(A), \lambda_n)\Big) \;=\; L^p(A, \mathcal{L}(A), \lambda_n),$$

d.h. die stetigen, Lebesgueschen L^p-Funktionen liegen dicht in der Menge aller Lebesgueschen L^p-Funktionen.

Beweis von Satz 9.46: Wir betrachten die folgende Menge einfacher Funktionen

$$\mathcal{F} := \{\chi_A \mid A \subset X \text{ meßbar und } \mu(A) < \infty\} \ .$$

Mit Hilfe von Satz 9.16 (jede nichtnegative, $\mathcal{A}$-meßbare Funktion lässt sich durch eine monotone Folge einfacher Funktionen approximieren) zeigt man, dass die lineare Hülle von $\mathcal{F}$

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) := \Big\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{A_i} \mid \chi_{A_i} \in \mathcal{F} \, , \, \lambda_i \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \ (\mathbb{C}) \Big\}$$

dicht im Raum der L^p-Funktionen $L^p(X,\mathcal{A},\mu)$ liegt (dies sind analoge Argumente wie z.B. beim Beweis des Satzes von Fubini). D.h. es gilt

$$L^p = cl\big(\mathrm{Lin}(\mathcal{F})\big) \ .$$

Wir zeigen nun, dass man jede charakteristische Funktion $\chi_A \in \mathcal{F}$ beliebig dicht durch eine stetige L^p-Funktion approximieren kann. Sei dazu $A \subset X$ eine $\mathcal{A}$-meßbare Menge von endlichem Maß $\mu(A) < +\infty$. Wir fixieren ein $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren abgeschlossene Mengen $F_1 \subset A$ mit $\mu(A \setminus F_1) < \varepsilon$ und $F_2 \subset X \setminus A$ mit $\mu((X \setminus A) \setminus F_2) < \varepsilon$. Offensichtlich ist $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Der Ausdehnungssatz von Titze aus der Topologie besagt: Ist (X,d) ein metrischer Raum und seien $F_1, F_2 \subset X$ zwei disjunkte abgeschlossene Mengen. Dann existiert eine stetige Funktion $\varphi : X \to [0,1]$ so dass $\varphi|_{F_1} \equiv 1$ und $\varphi|_{F_2} \equiv 0$. Für eine solche Funktion φ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\chi_A - \varphi\|_p^p &= \int\limits_X |\chi_A - \varphi|^p d\mu \\
&= \int\limits_{A\setminus F_1} |\chi_A - \varphi|^p d\mu + \int\limits_{F_1} |\chi_A - \varphi|^p d\mu + \int\limits_{(X\setminus A)\setminus F_2} |\chi_A - \varphi|^p d\mu + \int\limits_{F_2} |\chi_A - \varphi|^p d\mu \\
&\leq \int\limits_{A\setminus F_1} 1 \cdot d\mu \ + \ 0 \ + \int\limits_{(X\setminus A)\setminus F_2} 1 \cdot d\mu \ + \ 0 \\
&= \mu(A \setminus F_1) \ + \ \mu((X \setminus A) \setminus F_2) < 2\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Somit ist $\chi_A - \varphi \in L^p$. Da $\chi_A \in L^p$, folgt $\varphi \in L^p \cap C(X)$. Wir haben damit bewiesen, dass

$$\mathcal{F} \subset cl\big(L^p \cap C(X)\big) \qquad\qquad (*) \ .$$

Wir bilden in (*) die lineare Hülle beider Räume und benutzen, dass $L^p \cap C(X)$ ein Vektorraum ist. Die Bildung der linearen Hülle ist eine monotone Operation, deshalb ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Lin}(\mathcal{F}) &\subset \mathrm{Lin}\, cl\big(L^p \cap C(X))\big) \\
&\subset cl\big(\mathrm{Lin}(L^p \cap C(X))\big) \\
&= cl\big(L^p \cap C(X)\big) \ ,
\end{aligned}$$

Somit ist

$$L^p = cl\big(\mathrm{Lin}(\mathcal{F})\big) \subset cl\big(L^p \cap C(X)\big) \subset L^p \ ,$$

also

$$L^p = cl\big(L^p \cap C(X)\big) \ .$$

$\blacksquare$

9.8 Wiederholungsfragen zur Prüfungsvorbereitung

Die folgenden Fragen fassen den in Kapitel 11 behandelten Stoff zusammen. Sie sollen die Vorbereitung auf die Analysisprüfung erleichtern. Bei der Beantwortung der Fragen sollten Sie folgendes beachten: Zu getroffenen Aussagen sollten Sie Beweise bzw. kurze Beweisideen kennen, mathematische Begriffe sollten Sie an Beispielen bzw. Gegenbeispielen erläutern können. Außerdem sollten Sie den Vorlesungsstoff auf die Lösung von Aufgaben anwenden können (wie in der Übung behandelt bzw. in den wöchentlichen Hausaufgaben gestellt wurden).

1. Definieren Sie die Begriffe Ring, Algebra und σ-Algebra über einer nichtleeren Menge X. Wie hängen diese Begriffe zusammen? Nennen Sie Beispiele.

2. Definieren Sie die σ-Algebra der Borelmengen eines metrischen Raumes. Wie kann man diese σ-Algebra erzeugen? Nennen Sie Eigenschaften der σ-Algebra der Borelmengen.

3. Definieren Sie die Begriffe Inhalt, σ-Inhalt und Maß. Welche Eigenschaften haben diese Mengenfunktionen? Nennen Sie Beispiele.

4. Erläutern Sie die Konstruktion von Maßräumen nach Caratheodory: Definieren Sie den Begriff des äußeren Maßes μ^*. Welche Eigenschaften hat das Mengensystem aller μ^*-meßbaren Mengen?

5. Erläutern Sie Möglichkeiten, äußere Maße zu konstruieren (aus einem Ring mit σ-Inhalt, metrische äußere Maße). Welche zusätzlichen Eigenschaften haben die äußeren Maße, die aus einem Ring mit σ-endlichem σ-Inhalt konstruiert werden? (Vervollständigung, Eindeutigkeit der Fortsetzung).

6. Definieren Sie das äußere Lebesgue-Maß, das Borel-Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$. Nennen Sie Beispiele für Lebesgue-meßbare bzw. nicht Lebesgue-meßbare Mengen. Nennen Sie Kriterien für die Lebesgue-Meßbarkeit einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

7. Definieren Sie den Begriff der meßbaren Abbildung zwischen meßbaren Räumen. Wann heißt eine numerische Funktion meßbar? Nennen Sie Kriterien für die Meßbarkeit einer numerischen Funktion. Welche Eigenschaften meßbarer Funktionen kennen Sie?

8. Wann heißt eine numerische Funktion Borel- bzw. Lebesgue-meßbar? Wie verhält sich die Klasse der stetigen Funktionen zur Klasse der Lebesgue-meßbaren Funktionen (Satz von Lusin, Satz von Frechet)?

9. Erläutern Sie die Integraldefinition für numerische Funktionen auf einem Maßraum. Nennen Sie die wichtigsten Eigenschaften des Integrals.

10. Welche Konvergenzsätze kennen Sie für das Integral von Funktionenfolgen auf einem Maßraum?

11. Welche Beziehung besteht zwischen dem Riemann-Integral und dem Lebesgue-Integral?

12. Wie bildet man das Produkt zweier σ-endlicher Maßräume? Welche Eigenschaften hat das Produktmaß?

13. Wie integriert man über Produkträumen bzw. Vervollständigungen von Produkträumen (Fubini)? Erläutern Sie Anwendungen des Satzes von Fubini für die Berechnung von Lebesgue-Integralen im $\mathbb{R}^n$ und die Berechnung des Lebesgue-Maßes einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

14. Formulieren Sie die Transformationsformel für Lebesgue-Integrale im $\mathbb{R}^n$. Erläutern Sie die Beweisidee. Nennen Sie typische Anwendungen.

15. Definieren Sie den Raum der L^p-Funktionen eines Maßraumes, $1 \leq p < \infty$. Nennen Sie die wichtigsten Eigenschaften der L^p-Räume (Banachraum, Dichtheit stetiger Funktionen, Verhalten bei verschiedenem p).

9.9 Weitere Literatur zur Vorlesung

Die folgenden Bücher sind für das Selbststudium für den Einführungskurs zur Maß- und Integrationstheorie geeignet. Besonders zu empfehlen ist das Buch von J. Elstrodt, das viele interessante Anwendungen und weiterführende Kommentare enthält und die auch historische Entwicklung der Maß- und Integrationstheorie sehr aufschlußreich erläutert.

- J. Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie, Springer 1998
- H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie, de Gruyter 1990
- E. Behrends: Maß- und Integrationstheorie, Springer 1987
- P. Günther: Grundkurs Analysis III, Kap. 10, Teubner Verlag Leipzig 1974
- Th. Bröcker: Analysis II, Kap. 3+4, Wissenschaftsverlag Mannheim 1992
- Halmos: Measure theory, Springer 1976
- Hewitt/Stromberg: Real and abstract analysis, Springer 1965

9.10 Anhang: Das Banach-Tarski-Paradox (Ausarbeitung von T. Neukirchner)

Nicht-meßbare Mengen verdeutlichen auf eindrucksvolle Weise, dass es keinen additiven - geschweige denn σ-additiven Volumenbegriff auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ des $\mathbb{R}^3$ geben kann, der zusätzlich invariant unter der Gruppe E^3 der Euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^3$ ist:

Theorem[Banach-Tarski (1924)] *Es sei $p \geq 3$ und $A, B \subset \mathbb{R}^p$ seien beschränkte Mengen mit nicht-leerem Inneren. Dann gibt es Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ und Bewegungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E^p$ mit*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \varphi_i(A_i)$$

Setzt man z.B. $A = \overline{B_o^3} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \|x - o\| \leq 1\right\}$ und $B = \overline{B_{o_1}^3} \sqcup \overline{B_{o_2}^3}$ (o_1, o_2 so gewählt, dass die Vereinigung disjunkt ist), so besagt der obige Satz, dass die Einheitskugel des $\mathbb{R}^3$ durch Zerlegen in endlich viele Teile und Euklidische Bewegungen verdoppelt werden kann. Für diese Version des auch als "Banach-Tarski-Paradox" bekannten Satzes zitieren wir im Folgenden einen Beweis aus [Deu93].

Bemerkung: Einen analogen Satz kann es im $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ nicht geben, da für diese Dimensionen das *Inhaltsproblem* lösbar ist (siehe [Els99, S.4]).

Definition Sei $\mathcal{S} \subset E^p$ eine Untergruppe der Gruppe der Euklidischen Bewegungen des $\mathbb{R}^p$. $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ heißen $\mathcal{S}$-zerlegungsgleich, falls es Mengen $A_1, \ldots, A_n \subset A$ und Bewegungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{S}$ gibt mit

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \varphi_i(A_i)$$

Offensichtlich ist $\mathcal{S}$-Zerlegungsgleichheit eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ und wir notieren $A \sim_{\mathcal{S}} B$.

Zur Vorbereitung einige kleine Lemmata:

Lemma 9.10.1. *Sei $S^1 \subset \mathbb{C}$ die Einheitskreislinie. Dann gilt: $S^1 \sim_{SO(2)} S^1 \setminus \{1\}$.*

Beweis: Die Idee des Beweises ist für das Folgende sehr instruktiv. Sie besteht darin, einen Halbgruppen-Homomorphismus $\Psi : \mathbb{N}_0 \to SO(2)$ zu betrachten[4], so dass die induzierte Wirkung auf S^1 *frei* ist[5]. Ein beliebiger Orbit $\Psi(\mathbb{N}_0)x \subset S^1$ steht also in Bijektion zu $\mathbb{N}_0$ und er ist invariant unter $\Psi(\mathbb{N}_0) \subset SO(2)$. Damit gilt dann:

$$\begin{aligned} &S^1 = O \sqcup K \quad \text{ mit } O = \Psi(\mathbb{N}_0)(1), \quad K = S^1 \setminus O \\ &S^1 \setminus \{1\} = \Psi(1)(O) \sqcup K \end{aligned}$$

Es bleibt also die Abbildung Ψ zu erraten: $\Psi(m) = e^{im}$ (wirkt durch Multiplikation in $\mathbb{C}$ als Element in $SO(2)$) leistet das gewünschte, denn $(e^{im} = 1,\ m \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow m = 0$. ■

[4] d.h. $\Psi(m + n) = \Psi(m) \cdot \Psi(n)$

[5] d.h. $\Psi(m)x = x$ für ein $x \in S^1$ impliziert $m = 0$

Sei nun $B^2 = \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $\overline{B^2}$ ihr Abschluss. Dann beweisst man analog zum obigen Lemma, indem man die Wirkung Ψ kanonisch auf $\overline{B^2} \setminus \{0\}$ fortsetzt:

Lemma 9.10.2. $\overline{B^2} \sim_{SO(2)} \overline{B^2} \setminus (0,1]$.

Das Zentrum des Kreises bedarf einer gesonderten Behandlung, da $\Psi(\mathbb{N}_0)0 = 0$:

Lemma 9.10.3. $\overline{B^2} \sim_{E^2} \overline{B^2} \setminus \{0\}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\overline{B^2} \setminus \{0\} = \left(\overline{B^2} \setminus [0,1]\right) \sqcup (0,1] \sim_{E^2} \left(\overline{B^2} \setminus [0,1]\right) \sqcup [0,1) = \\ = B^2 \sqcup \left(S^1 \setminus \{1\}\right) \overset{Lemma\ 9.10.1}{\sim} B^2 \sqcup S^1 = \overline{B^2}\end{aligned}$$

■

Lemma 9.10.4. *Sei $D \subset S^1$ abzählbar. Dann gilt immernoch: $S^1 \sim_{SO(2)} S^1 \setminus D$.*

Beweis: Die Beweisidee ist dieselbe wie in Lemma 9.10.1. Allerdings muss Ψ nun so gewählt werden, dass $\Psi(m)(D) \cap D \neq \emptyset$ schon $m = 0$ impliziert (Vgl. Fussnote 2). Sei dazu

$$\Phi = \{\varphi \in [0, 2\pi) \mid \exists p \in D,\ \exists n \in \mathbb{N},\ e^{in\varphi} \cdot p \in D\}$$

Da Φ abzählbar ist, existiert ein $\alpha \in [0, 2\pi) \setminus \Phi$. Wir setzten nun $\Psi(m) = e^{im\alpha}$. Damit gilt $\Psi(m)(D) \cap D = \emptyset$, $(m \neq 0)$ und $\Psi(m)(D) \cap \Psi(n)(D) = \emptyset$ $(m \neq n)$. Dies liefert folgende Zerlegungen:

$$\begin{aligned}&S^1 = O \sqcup K \quad \text{mit } O = \Psi(\mathbb{N}_0)(D), \quad K = S^1 \setminus O \\ &S^1 \setminus D = \Psi(1)(O) \sqcup K\end{aligned}$$

■

Nun gehen wir zum $\mathbb{R}^3$ über. Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Einheitssphäre.

Lemma 9.10.5. *Sei $D \subset S^2$ abzählbar. Dann gilt $S^2 \sim_{SO(3)} S^2 \setminus D$.*

Beweis: Da D abzählbar ist, gibt es eine Gerade durch 0, die kein Element aus D enthält. Diese Verwenden wir als Drehachse und übertragen den Beweis von Lemma 9.10.4 wortwörtlich. ■

Abschließend das Lemma, das eigentlich gebraucht wird:

Lemma 9.10.6. *Sei D eine abzählbare Menge von Durchmessern in $\overline{B^3}$, d.h. $d \in D$ ist von der Form $d = [-1, 1] \cdot v$, $v \in S^2$. Dann gilt: $\overline{B^3} \sim_{E^3} \overline{B^3} \setminus D$.*

Beweis: Der Schluss von Lemma 9.10.1 auf Lemma 9.10.2 überträgt sich auf die vorliegende Situation: Eine Wirkung auf S^2 induziert kanonisch eine Wirkung auf $\overline{B^3} \setminus \{0\}$. Damit erhält man aus Lemma 9.10.5: $\overline{B^3} \setminus D \sim_{SO(3)} \overline{B^3} \setminus \{0\}$. Nun wenden wir Lemma 9.10.3 auf $\overline{B^2} \subset \overline{B^3}$ an. ■

Nun zum angekündigten Beweis der "Kugelverdopplung". Seien d_f, d_h zwei Durchmesser in $\overline{B^3}$ mit $\measuredangle(d_f, d_h) = \pi/4$ und sei:

- $F = \{id, f\}$ die von der Drehung f mit Drehwinkel π und Drehachse d_f erzeugte Gruppe.

- $H = \{id, h, h^{-1}\}$ die von der Drehung h mit Drehwinkel $2/3\pi$ und Drehachse d_h erzeugte Gruppe.

Lemma 9.10.7.

(i) $G := \langle F, H \rangle = F * H \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$.

(ii) Es existiert eine disjunkte Zerlegung $G = X \sqcup Y \sqcup Z$ *mit*

$$fX = Y \sqcup Z, \quad hX = Y, \quad h^{-1}X = Z \qquad (*)$$

Beweis:
Zu(i): Sei $g(\epsilon) = h^\epsilon f$ ($\epsilon = \pm 1$). Dann lässt sich jedes $g \in G$ schreiben als ein Wort von der Gestalt $g = a\, g_{\epsilon_1} g_{\epsilon_2} \dots g_{\epsilon_k}$, wobei $a \in \{id, f\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\epsilon_i = \pm 1$ ($1 \leq i \leq k$). Zu zeigen ist, dass diese Darstellung von g eindeutig ist:

1) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle k-Tupel $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{\pm 1\}^k$ gilt:

$$g(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) := g_{\epsilon_1} g_{\epsilon_2} \dots g_{\epsilon_k} \notin \{id, f\}$$

Dazu wählen wir eine Basis $\{e_1, e_2, e_3\}$ in $\mathbb{R}^3$, so dass $d_f \in \mathbb{R}e_3$ und $d_h \in \mathbb{R}(e_3 - e_2)$. In einer solchen Basis gilt:

$$Mat(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Mat(h^\epsilon) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} & \frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} \\ \frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} & -1/4 & -3/4 \\ \frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \frac{\epsilon}{2}\sqrt{3/2} \qquad (\#)$$

2) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle k-Tupel $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in \{\pm 1\}^k$ existieren $n_i := n_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$, $i = 1, 2, 3$ mit:

$$n_1 \in 6\mathbb{Z}, \quad n_2 + n_3 \in 4\mathbb{Z} \quad n_2, n_3 \in \mathbb{Z}, \qquad \text{(2a)}$$

so dass

$$Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_k)\big)_{1,i=1,2,3} = \left(\frac{1 + n_1}{2^k}, \ \frac{n_2}{2^k}\sqrt{3/2}, \ \frac{n_3}{2^k}\sqrt{3/2} \right) \qquad \text{(2b)}$$

Insbesondere folgt aus 2) sofort 1) und damit (i), da z.B. $Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_k)\big)_{1,1} \neq \pm 1$.

Wir beweisen 2) mittels vollständiger Induktion über k:

- Für $k = 1$ ersieht man aus (#) sofort: $n_1(\epsilon_1) = 0$, $n_2(\epsilon_1) = -\epsilon_1$, $n_3(\epsilon_1) = \epsilon_1$. Offensichtlich erfüllen die $n_i(\epsilon_1)$ die Eigenschaft $(2a)$.

- Sei nun $k \geq 1$ und $Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_k)\big)_{1,i=1,2,3} = \left(\frac{1+n_1}{2^k}, \ \frac{n_2}{2^k}\sqrt{3/2}, \ \frac{n_3}{2^k}\sqrt{3/2} \right)$, wobei die n_i die Eigenschaften $(2a)$ erfüllen sollen[6]. Durch Multiplikation von rechts mit $g(\epsilon_{k+1})$

[6] Die Parameter ϵ_i seien an dieser Stelle zu Gunsten der Übersichtlichkeit unterdrückt.

erhält man:

$$
\begin{aligned}
Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,1} &= \frac{1}{2^{k+1}}\big(\underbrace{1 + n_1 + \frac{3}{2}\epsilon_{k+1}(n_2+n_3)}_{=n_1(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})}\big) \\
Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,2} &= \frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{3/2}\,\big(\underbrace{-\epsilon_{k+1}(1+n_1) - \frac{1}{2}\,n_2 + \frac{3}{2}\,n_3}_{=n_2(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})}\big) \\
Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,3} &= \frac{1}{2^{k+1}}\sqrt{3/2}\,\big(\underbrace{\epsilon_{k+1}(1+n_1) - \frac{3}{2}\,n_2 + \frac{1}{2}\,n_3}_{=n_3(\epsilon_1,\dots,\epsilon_{k+1})}\big)
\end{aligned}
$$

Damit ist zum einen $Mat\big(g(\epsilon_1 \dots \epsilon_{k+1})\big)_{1,i=1,2,3}$ von der Gestalt (2b) und die Eigenschaft (2a) für die $n_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k+1})$ lassen sich nun leicht aus denen für $n_i = n_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$ herleiten.

Zu(ii): Wir definieren die Zerlegung von G rekursiv über die nach (i) eindeutig bestimmte Wortlänge $\#(g)$ eines Elementes $g \in G$ bzgl. der Buchstaben f, h, h^{-1}:

- $id \in X$, $(\#(id) = 0)$.
- Sei für $g \in G$ mit $\#(g) \leq n$ bereits definiert, in welcher der Mengen X, Y, Z es enthalten ist. Betrachte nun $a\,g$, $a \in \{f, h, h^{-1}\}$. Entweder ist $\#(a\,g) \leq n$ oder $\#(a\,g) = n+1$. Nur für letzteren Fall muss definiert werden in welcher Menge $a\,g$ liegt:

	$g \in X$	$g \in Y$	$g \in Z$
$a = f$	Y	X	X
$a = h$	Y	Z	X
$a = h^{-1}$	Z	X	Y

Der Rest des Beweises ist nachrechnen. ∎

In Lemma 9.10.1 haben wir die Eigenschaft $\mathbb{N}_0 \setminus \big(1 + \mathbb{N}_0\big) = \{0\}$ durch eine *freie Wirkung* erfolgreich auf S^1 übertragen. Genauso wollen wir jetzt die Eigenschaft $(*)$ auf $\overline{B^3}$ übertragen.

Lemma 9.10.8. *Bezeichne d_g den die Drehachse von $g \in G$ repräsentierenden Durchmesser, sowie $D = \bigcup_{g \in G} d_g \subset \overline{B^3}$. Dann gilt*

(i) $G(D) = D$.

(ii) Die Wirkung von G auf $\overline{B^3} \setminus D$ ist frei.

Beweis: (i) Sei $d_k \subset D$ und $g, k \in G$. Dann gilt $gkg^{-1}\big(g(d_k)\big) = gk(d_k) = g(d_k)$. Mit anderen Worten $g(d_k) = d_{gkg^{-1}} \subset D$.
(ii) Die Wirkung ist wohldefiniert, da nach (i) $G\big(\overline{B^3} \setminus D\big) \subset \overline{B^3} \setminus D$. Sie ist frei, denn aus $g(x) = x$, $x \in \overline{B^3}$ folgt sofort $x \in d_g \subset D$. ∎

Man zerlegt nun $\overline{B^3} \setminus D$ in die Orbits bzgl. der G-Wirkung. In jedem Orbit wähle man einen Repräsentanten (Auswahlaxiom !) und bezeichne die Menge aller Repräsentanten mit R. Sei nun $A = X(R)$, $B = Y(R)$ und $C = Z(R)$. Dann gilt:

$$\overline{B^3} \setminus D = G(R) = A \sqcup B \sqcup C \quad \textit{und} \quad f(A) = B \sqcup C,\ h(A) = B,\ h^{-1}(A) = C$$

Das heisst

$$\boxed{A = fh(A) \sqcup fh^{-1}(A), \quad B = hf(B) \sqcup hfh(B), \quad C = h^{-1}f(C) \sqcup h^{-1}fh^{-1}(C)}$$

Damit lässt sich zunächst $\overline{B^3} \setminus D \sim_{SO(3)} \big(\overline{B^3} \setminus D) \sqcup (\overline{B^3} \setminus D)$ zeigen. Mit Lemma 9.10.6 folgt nun das Banach-Tarski-Paradox.

Literatur

[Deu93] W.A. Deuber: *Paradoxe Zerlegungen Euklidischer Räume*,
Elemente der Mathematik 48 (1993), 61-75.

[Els99] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer, 1999.