Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 2

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15

Abgabe am 3.11.2014

Aufgabe 4

$f : X \to Y$ und $h : Y \to Z$ seien zwei Abbildungen und $h \circ f : X \to Z$ ihre Verknüpfung. Zeigen Sie:

a) Sind f und h injektiv, so ist $h \circ f$ injektiv.

b) Sind f und h surjektiv, so ist $h \circ f$ surjektiv.

c) Ist $h \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

d) Ist $h \circ f$ surjektiv, so ist h surjektiv.

e) Geben Sie ein Beispiel für Abbildungen f und h an, so dass $h \circ f$ bijektiv ist, aber weder h injektiv, noch f surjektiv sind.

6 P

Aufgabe 5

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $A_1, A_2 \subset X$ und $B_1, B_2 \subset Y$.

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

   a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

   b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

   c) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   d) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

2. Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass in *b)* *nicht* immer Gleichheit gilt.

3. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle Teilmengen $A_1, A_2 \subset X$ gilt.

8 P

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die folgenden Formeln für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$.

6 P

Insgesamt: **20 P**