Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 5

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15

Abgabe am 24.11.2014

Aufgabe 13

Beweisen Sie, dass in jedem offenen Intervall $(x, y) \subset \mathbb{R}$ eine **irrationale** Zahl liegt.

Tipp: Wir wissen aus der Vorlesung, dass es eine **rationale** Zahl q gibt mit $q \in (x, y)$. Sei nun a eine beliebige positive irrationale Zahl. Nach dem Archimedischen Axiom der reellen Zahlen existiert eine natürliche Zahl n, so dass $\frac{1}{n} < \frac{y-q}{a}$. Konstruieren Sie aus diesen Daten eine irrationale Zahl, die im Intervall (x, y) liegt.
Sie dürfen aber auch einen anderen Beweis angeben.

2 P

Aufgabe 14

a) Wir betrachten zwei abzählbare Mengen A und B. Entscheiden Sie, ob das Produkt $A \times B$, die Vereinigung $A \cup B$ und der Durchschnitt $A \cap B$ höchstens abzählbar, abzählbar oder überabzählbar sind (mit Beweis).

b) Wir betrachten das offene Intervall $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Mengen $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$ gleichmächtig sind.

6 + 3 P

Aufgabe 15

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$,

b) $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq \sqrt[n]{|x-y|}$,

c) $\frac{x-1}{n} \geq \sqrt[n]{x} - 1$.

3+3+3 P

Insgesamt: **20 P**