



Übungsblatt 6

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15

Abgabe am 01.12.2014

Aufgabe 16

a) Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der algebraischen Form $a + ib$ dar:

$$\frac{2+i}{1-3i}, \quad (1+\sqrt{3}i)^6, \quad \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^4.$$

b) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen die trigonometrische Darstellung:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1-i}{1+i}, \quad (-4+3i)^3.$$

3+3 P

Aufgabe 17

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition des Betrages, dass für zwei komplexe Zahlen z und w das folgende *Parallelogramm-Gesetz* gilt:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Was bedeutet diese Formel geometrisch?

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

- i) $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}$,
- ii) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z-i| < 2\}$,
- iii) $M_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\}$.

2+6 P

Aufgabe 18

Wir betrachten die obere Halbebene \mathbb{H}^+ und die Einheitskreisscheibe \mathbb{D} in \mathbb{C} :

$$\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\},$$

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F: \mathbb{H}^+ \longrightarrow \mathbb{D} \\ z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$$

bijektiv ist.

b) Geben Sie die Umkehrabbildung $F^{-1}: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{H}^+$ von F an.

c) Bestimmen Sie das Bild der folgenden Teilmengen von \mathbb{H}^+ unter F :

$$\ell := \{iy \in \mathbb{C} \mid y \in \mathbb{R}^+\} \quad \text{und} \quad k := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Skizzieren Sie $\ell, k \subset \mathbb{H}^+$ und die Bilder $F(\ell), F(k) \subset \mathbb{D}$.

9 P

Insgesamt: **23 P**