



# Übungsblatt 7

## Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15  
Abgabe am 08.12.2014

*Hinweis:* Bitte benutzen Sie zum Lösen der folgenden Aufgaben nur Dinge, die aus der Lehrveranstaltung *Analysis I* (Vorlesung, Übung, Aufgaben, ...) bekannt sind !!

### Aufgabe 19

Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen reeller Zahlen  $(a_n), (b_n), \dots, (f_n)$  konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit Beweis !):

a)  $a_n := \frac{n^4 + 3n^2 + 3n + 1}{5n^4 + 2}$ .

b)  $b_n := \frac{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}}{1 + 2\sqrt{n}}$ .

c)  $c_n := \sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2n}$ .

d)  $d_n := (-1)^n \sqrt[n]{n} + \frac{n^3}{4^n}$ .

e)  $e_n := \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3}$ .

f)  $f_n := \sqrt[n]{n!}$ .

1+1+1+1+2+2 = 8 P

### Aufgabe 20

Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen komplexer Zahlen  $(z_n), (w_n), \dots, (p_n)$  konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit Beweis !):

a)  $z_n := \frac{n}{n^2 + 1} + i \sqrt[n]{2}$ .

b)  $w_n := \frac{1}{n} (\cos(n \cdot 45^\circ) + i \sin(n \cdot 45^\circ))$ .

c)  $u_n := n (\cos(\frac{1}{n} \cdot 45^\circ) + i \sin(\frac{1}{n} \cdot 45^\circ))$ .

d)  $v_n := \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ .

e)  $p_n := \frac{z^n}{n!}$ , wobei  $z \in \mathbb{C}$ .

1+1+1+1+3 = 7 P

### Aufgabe 21

a) Seien  $x_1$  und  $c$  positive reelle Zahlen und  $(x_n)$  die folgende rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{c}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge  $(x_n)$  gegen  $\sqrt{c}$  konvergiert.

*Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass die Folge  $(x_n)_{n=2}^\infty$  von unten beschränkt und monoton fallend ist und benutzen Sie den Satz von Bolzano/Weierstrass.

b)  $e$  bezeichne die Euler-Zahl. Zeigen Sie:

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+2} \right)^n = e$ .

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e}$ .

4+4 = 8 P

Insgesamt: 23 P