Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 9

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15

Abgabe am 05.01.2015

Aufgabe 25

Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender komplexer Potenzreihen:

a) $P_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$

b) $P_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot (z+2)^n.$

c) $P_3(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (z-z_0)^{n^2}.$

6 P

Aufgabe 26 (Die Binomialreihe)

Für eine reelle Zahl a betrachten wir die *Binomialreihe*

$$B_a(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n \;=\; 1+az+\frac{a(a-1)}{2!}z^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3+\dots\;, \qquad \text{wobei } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt $B_m(z) = (z+1)^m$.

b) Ist $a \notin \mathbb{N}$, so ist der Konvergenzradius von $B_a(z)$ gleich 1.

c*) $B_a(z) \cdot B_b(z) = B_{a+b}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Zum Beweis benötigen Sie die folgende Formel, die Sie (als Bestandteil dieser Aufgabe) durch vollständige Induktion über n beweisen können:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

2+2+4* P

Aufgabe 27

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die jeweils die folgende Gleichung lösen:

a) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) = 2.$

b) $2^{(3^x)} = 3^{(4^x)}.$

c) $2^x + 3^{x+3} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$

6 P

—- bitte wenden —-

Weihnachtsaufgabe*

1. Ferdi bekommt auch dieses Weihnachten wieder sehr viele Geschenke, nämlich abzählbar unendlich viele. Die Pakete, die alle würfelförmig sind, stellt Ferdi mit dem Größten, das einen Meter hoch ist, beginnend nach Größe geordnet in einer Reihe unter dem Tannenbaum auf. Er stellt dabei fest, dass die Pakete jeweils ein Drittel so breit sind wie das vorherige. Wie weit müssen die Äste des Tannenbaums mindestens ragen, wenn alle Pakete unterm Baum Platz finden? Beim Auspacken stellt Ferdi fest, dass er beim nachfolgenden Paket immer nur jeweils die Hälfte der Zeit braucht. Wie lange hat Ferdi für das erste Paket gebraucht, wenn er, gierig wie er ist, schon nach 2 Minuten alles ausgepackt hat?

   4* P

2. Heini bekommt zu Weihnachten von seinem Patenonkel, der unter Heinis Streichen viel leiden musste, einen Würfel von einem Kubikmeter Größe geschenkt. Heini braucht zum Auspacken eine Minute, und im Allgemeinen hängt die Zeit, die Heini zum Auspacken braucht, proportional von der Oberfläche des Päckchens ab. Als er das Paket geöffnet hat, ist in dem Karton wieder ein eingepackter Würfel und $\frac{7}{8}\,\mathrm{m}^3$ Luft. Und so geht es weiter. Nach dem n-ten Auspacken findet Heini wieder ein würfelförmiges Päckchen und $\frac{3n^2+3n+1}{n^3\cdot(n+1)^3}\,\mathrm{m}^3$ gähnende Leere. Heini versucht, die leeren Kartons aufeinander zu stapeln. Gelingt ihm das? Zudem machen die Eltern sich Sorgen, ob Heini denn rechtzeitig zum Abendspaziergang zum Onkel mit dem Auspacken fertig sein wird. Packt Heini noch an Neujahr aus? Und warum ist Heini nachher so enttäuscht, dass er nicht mehr mit zum Onkel will?

   Hinweis: Beweise und verwende $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\cdot(k-1)} = 1 - \frac{1}{n}$.

   6* P

Insgesamt: **16 + 4* + 10* P**

Hinweis: *Die *-Aufgaben sind freiwillig und richten sich vor allem an diejenigen Studenten, die noch Punkte zur Prüfungszulassung benötigen. Die Punkte für diese Aufgaben werden zusätzlich gezählt.*

Das Team der Analysis I-Vorlesung wünscht Ihnen

Frohe Weihnachten
und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr !!!