



Übungsblatt 10

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15
Abgabe am 12.01.2015

Aufgabe 28

- a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Wurzelfunktion $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ auf \mathbb{R}^+ stetig ist. Geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta > 0$ an, so dass gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } |x - x_0| < \delta \implies |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon.$$

(Tipp: Benutzen Sie die Abschätzung aus Aufgabe 15 b))

- b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := z^2$ auf \mathbb{C} stetig ist. Geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein $\delta > 0$ an, so dass gilt:

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < \delta \implies |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

(Tipp: Benutzen Sie $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$ und die Dreiecks-Ungleichung $|z + z_0| = |(z - z_0) + 2z_0| \leq |z - z_0| + 2|z_0|$.)

6 P

Aufgabe 29

Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung:

- a) Die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto a^z$

ist auf \mathbb{C} stetig.

- b) Die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ zur Basis a ist auf \mathbb{R} stetig.
c) Die Logarithmusfunktion $\log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ zur Basis $a \neq 1$ ist auf \mathbb{R}^+ stetig.
d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig.

8 P

Aufgabe 30

Für zwei Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ sei das Minimum $\min(f, g) : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\min(f, g)(z) := \min(f(z), g(z)) \quad \forall z \in D.$$

Zeigen Sie,

- a) $\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$.
b) Sind f und g auf D stetig, so ist auch $\min(f, g)$ auf D stetig.

4 P

Insgesamt: 18 P