



Übungsblatt 11

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15

Abgabe am 19.01.2015

Aufgabe 31

Es seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ zwei Funktionen. Zeigen Sie:

- Sind f und g gleichmäßig stetig, so ist $f + g$ gleichmäßig stetig.
- Sind f und g lipschitzstetig, so ist $f + g$ lipschitzstetig.

6 P

Aufgabe 32

1. Untersuchen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung, ob die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right) \cdot \frac{1}{x-1}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$.

2. Wir betrachten die komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) := \frac{e^z - 1}{z}$.

Zeigen Sie: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$.

Tipp: Betrachten Sie die Reihe

$$\frac{e^z - 1}{z} - 1 = \frac{e^z - 1 - z}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{3 \cdot \dots \cdot n} = \frac{z}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3 \cdot \dots \cdot (k+2)}$$

Zeigen Sie die Abschätzung

$$\left| \frac{z^k}{3 \cdot \dots \cdot (k+2)} \right| \leq \left(\frac{|z|}{3} \right)^k \leq \left(\frac{1}{2} \right)^k \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq \frac{3}{2}$$

und wenden Sie das Majorantenkriterium für Reihen sowie den Grenzwert der geometrischen Reihe an.

4+3 P

Aufgabe 33

a) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{x^2 - 4x + 3} & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } x \neq 3 \\ A & \text{falls } x = 1 \\ B & \text{falls } x = 3 \end{cases}$$

Können A und B so gewählt werden, dass h auf \mathbb{R} stetig ist?

b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, in welchen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig ist und geben Sie den Typ der Unstetigkeitsstellen von f an.

6 P

Insgesamt: 19 P