Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 13

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15

Abgabe am 02.02.2015

Aufgabe 37

a) Zeigen Sie die folgenden Gleichungen für die Umkehrfunktionen von sinh und tanh:

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad && \forall\, x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) && \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < 1. \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen arsinh, $\operatorname{arcosh}_{|(1,+\infty)}$, artanh und arcoth differenzierbar sind und bestimmen Sie ihre Ableitungen.

2+4 P

Aufgabe 38

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar, 2-mal differenzierbar, 2-mal stetig differenzierbar ist.

b) Sei $\alpha > 1$ eine fixierte reelle Zahl und $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit

$$|f(x)| \leq |x|^\alpha \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist und dass $f'(0) = 0$ gilt.

6 P

Aufgabe 39 Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) Seien $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Dann ist $f \cdot g$ ebenfalls n-mal differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \quad \forall\, x \in I.$$

b) Seien $f_1, \ldots, f_m : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen ohne Nullstellen. Dann gilt:

$$\frac{(f_1 \cdot \ldots \cdot f_m)'}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_m} = \frac{f_1'}{f_1} + \ldots + \frac{f_m'}{f_m}.$$

6 P

Insgesamt: **18 P**