



Übungsblatt 14

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2014/15

ohne Abgabe (Woche vom 2.2.-6.2.2015)

Aufgabe 40

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion, $P_0 = (x_0, f(x_0))$ und $Tan(f, P_0)$ die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt P_0 . Zeigen Sie:

1. Wenn $f = \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dann schneidet die Tangente $Tan(f, P_0)$ die x -Achse immer im Punkt $(x_0 - 1, 0)$.
2. Wenn $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(x) = \frac{1}{x}$, dann hat das von der Tangente $Tan(f, P_0)$ und den Koordinatenachsen gebildete Dreieck immer den Flächeninhalt 2.

4 P

Aufgabe 41

- a) Es seien M und α zwei reelle Zahlen mit $M > 0$ und $\alpha > 1$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in (a, b).$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

- b) Sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$0 \leq h'(x) \leq h(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: Besitzt h eine Nullstelle, so gilt $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(Tipp: Betrachten Sie auch die Funktion $g(x) := e^{-x}h(x)$.)

4+4 P

Aufgabe 42

Wieviele reelle Lösungen haben die Gleichungen

- a) $x(x - \sin x) = \cos x$.
- b) $2^x = 1 + x^2$.

6 P

Aufgabe 43

Bestimmen Sie die Grenzwerte

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arctan(x))^{\frac{1}{x}}$.
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x$.
- c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}$.

6 P

Insgesamt: 24 P