Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 4

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

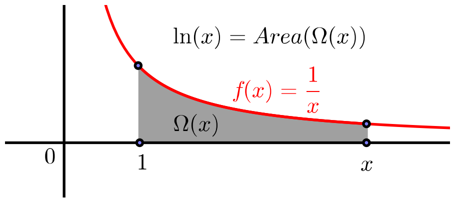
Sommersemester 2015

Abgabe am 11.05.2015

Aufgabe 10

In Kapitel 4 der Vorlesung haben wir die Logarithmus-Funktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definiert und daraus ihre Eigenschaften abgeleitet. In dieser Aufgabe soll ein alternativer Weg für die Definition des Logarithmus beschritten werden. Wir definieren die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch das Riemann-Integral:

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.$$



Zeigen Sie für diese Definition:

a) $\ln$ ist streng monoton wachsend und konkav.

b) $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$.

c) $\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$.

d) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist bijektiv.

e) Die Umkehrfunktion von $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

10 P

Aufgabe 11

Zeigen Sie für die Gamma-Funktion:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

4 P

Aufgabe 12

a) Untersuchen Sie die Existenz der folgenden uneigentlichen Riemann-Integrale:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx \qquad \text{und} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

für $\alpha \in (0, \infty)$.

b) Untersuchen Sie die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \cdot \ln(n)^\beta} \qquad \text{für } \beta \in (0, \infty).$$

6 P

Insgesamt: **20 P**