Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 5

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2015

Abgabe am 18.05.2015

Aufgabe 13 *Invarianz von Tangenten, Schnittwinkeln und Längen von Kurven bei Umparametrisierung*

Seien J und I Intervalle. Eine Funktion $\tau : J \to I$ heißt *Parametertransformation*, wenn sie bijektiv und stetig differenzierbar ist und $\tau'(s) \neq 0$ für alle $s \in J$ gilt.
Ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve und $\tau : J \to I$ eine Parametertransformation, dann nennt man die Kurve $\delta := \gamma \circ \tau : J \to \mathbb{R}^n$ *Umparametrisierung von* γ. Die Spuren von γ und δ stimmen dann überein.
Zeigen Sie:

a) Für die Tangenten gilt: $Tan_{\tau(s)}\gamma = Tan_s\delta$.

b) Sei $\gamma_1 : I \to \mathbb{R}^n$ eine weitere stetig differenzierbare Kurve, die die Kurve γ im Punkt p schneidet, d.h. es gelte $p = \gamma(t_0) = \gamma_1(t_0)$ für einen eindeutig bestimmten Parameter $t_0 \in I$. Sei $\delta_1 := \gamma_1 \circ \tau$ die Umparametrisierung von γ_1. Dann gilt für die Schnittwinkel von γ und γ_1 in p:

$$\measuredangle_p(\gamma, \gamma_1) = \measuredangle_p(\delta, \delta_1).$$

c) Für die Längen gilt: $L(\gamma) = L(\delta)$.

6 P

Aufgabe 14

Der Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(0, 1)$ werde wie ein Rad auf der x-Achse nach rechts gerollt, bis derjenige Punkt P auf dem Kreisrand, der am Anfang auf der x-Achse lag, dies wieder tut.

a) Skizzieren Sie die Situation.

b) Geben Sie eine Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ an, welche die Bahn beschreibt, die der Punkt P bei der Rollbewegung durchläuft (Mit Herleitung der Formel !).
Diese Kurve heißt *Zykloide.*

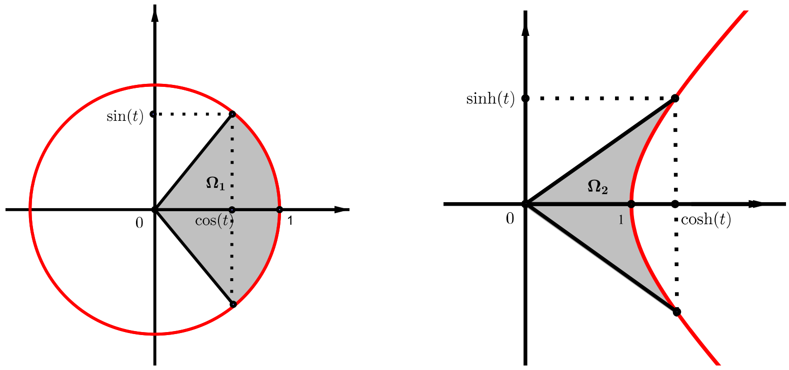
c) Berechnen Sie die Länge von γ.

6 P

— bitte wenden —

Aufgabe 15

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Gebiete Ω_1 und Ω_2 in den folgenden Zeichnungen (Ω_1 Kreissegment, Ω_2 Hyperbelsegment):



b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das folgende Gebiet:

$$\Omega := \{\, (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \;|\; 0 \le \varphi \le 2\pi,\, 0 \le r \le 1 + \cos\varphi \,\}.$$

- Skizzieren Sie Ω.
  (Der Rand von Ω wird *Kardioide* oder *Herzkurve* genannt.)
- Berechnen Sie den Flächeninhalt von Ω.

8 P

Insgesamt: **20 P**