Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 6

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2015

Abgabe am 27.05.2015 (Mittwoch)

Aufgabe 16

Sei $X = C^0([a,b],\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen, die vom abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ abbilden.

a) Begründen Sie, dass

$$d_\infty(f,g) := \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [a,b]\} \qquad \text{für } f,g \in C^0([a,b],\mathbb{R}),$$

korrekt definiert ist (d.h. dass das Maximum existiert) und zeigen Sie, dass d_∞ eine Abstandsfunktion auf $C^0([a,b],\mathbb{R})$ ist.

b) Begründen Sie, dass

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \qquad \text{für } f,g \in C^0([a,b],\mathbb{R}),$$

korrekt definiert ist (d.h. dass das Riemann-Integral existiert) und beweisen Sie, dass d_1 eine Abstandsfunktion auf $C^0([a,b],\mathbb{R})$ ist.

6 P

Aufgabe 17

Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Wir definieren zwei neue Abbildungen d^* und $\hat{d}$ auf $X \times X$ durch

$$\begin{aligned} d^*(x,y) &:= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \\ \widehat{d}(x,y) &:= \min\{1, d(x,y)\}, \qquad x,y \in X. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass (X,d^*) und $(X,\widehat{d})$ metrische Räume sind.
Tipp: Zeigen Sie für den Beweis der Dreiecksungleichung für d^* zuerst, dass $\frac{u}{1+u} \leq \frac{v}{1+v}$ für alle reellen Zahlen u,v mit $u,v \geq 0$ und $u \leq v$.

b) Sei $X = \mathbb{C}$ und d die Standard-Metrik auf $\mathbb{C}$. Wie sehen die ε-Kugeln in $(\mathbb{C},d^*)$ und $(\mathbb{C},\widehat{d})$ in diesem Fall aus?

8 P

— bitte wenden —

Aufgabe 18

Für einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und eine reelle Zahl $p \geq 1$ definieren wir

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ für alle $p \geq 1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist (*die p-Norm*). Für $p = 2$ ist dies die aus der Vorlesung *Lineare Algebra I* bekannte Euklidische Norm.

a) Sei $p > 1$ und q die reelle Zahl mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie unter Benutzung der Ungleichung

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}^+,$$

dass die *Hölder-Ungleichung*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

gilt.
Tipp: Setze $a = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}$ und $b = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$.

b) Zeigen Sie unter Benutzung der Hölder-Ungleichung, dass die *Minkowski-Ungleichung*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

gilt.
Tipp: Benutze: $|x_k + y_k|^p = |x_k + y_k| \cdot |x_k + y_k|^{p-1} \leq |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + |y_k||x_k + y_k|^{p-1}$.

c) Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass $\|\cdot\|_p$ für alle $p \geq 1$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

9 P

Insgesamt: **23 P**