Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 7

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2015

Abgabe am 01.06.2015

Aufgabe 19

Wir betrachten den Vektorraum der stetigen Funktionen $C^0([a,b],\mathbb{R})$ mit der Abstandsfunktion d_1 aus Aufgabe 16:

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx \qquad \forall\, f,g \in C^0([a,b],\mathbb{R}).$$

Sei $c := \frac{a+b}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls $[a,b]$ und (f_n) die Folge der Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in [a, c - \frac{1}{n}], \\ nx + 1 - nc & \text{falls } x \in [c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}], \\ 2 & \text{falls } x \in [c + \frac{1}{n}, b]. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen f_n stetig sind.

b) Zeigen Sie (durch Berechnung von $d_1(f_n, f_m)$), dass die Folge (f_n) eine Cauchy-Folge im metrischen Raum $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ ist.

c) Zeigen Sie, dass (f_n) im metrischen Raum $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ *nicht* konvergiert.

Der metrische Raum $(C^0([a,b],\mathbb{R}), d_1)$ ist also *nicht* vollständig.

Tipp zu c): Nehmen Sie an, dass eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert, mit $f_n \to f$ bzgl d_1. Schlußfolgern Sie daraus mit Hilfe von Integraleigenschaften, dass $f|_{[a,c)} = 0$ und $f|_{(c,b]} = 2$. Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von f.

1+3+3 P

Aufgabe 20

1. Zeigen Sie für die offenen Mengen eines metrischen Raumes (X,d):

   a) Ist $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ eine Familie beliebig vieler offener Mengen, so ist $\bigcup_{i\in\Lambda} U_i$ ebenfalls offen.

   b) Sind $U_1, \ldots, U_n$ offen, so ist $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ ebenfalls offen.
   Gilt dies auch für den Durchschnitt beliebig vieler offener Mengen? (Begründen Sie Ihre Antwort).

2. Zeigen Sie für das Innere und den Abschluß zweier Mengen $A, B \subset X$:

   a) $A \subset B \implies Int(A) \subset Int(B)$ und $cl(A) \subset cl(B)$.

   b) $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$. Gilt das auch für die Vereinigung? (Begründung).

   c) $cl(A) \cup cl(B) = cl(A \cup B)$. Gilt das auch für den Durchschnitt? (Begründung).

4+5 P

— bitte wenden —

Aufgabe 21

a) Sei (X, d) das kartesische Produkt der metrischen Räume $(X_1, d_1), \dots, (X_k, d_k)$. Zeigen Sie: Sind $A_j \subset X_j$ jeweils kompakte Mengen in (X_j, d_j), $j = 1, \dots, k$, so ist die Produktmenge $A := A_1 \times \ldots \times A_k \subset X$ im metrischen Raum (X, d) ebenfalls kompakt.

b) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ zusammenhängend und $B \subset X$ eine Teilmenge mit

$$A \subset B \subset cl(A).$$

Zeigen Sie, dass B zusammenhängend ist.

6 P

Insgesamt: **22 P**