Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 8

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2015

Abgabe am 08.06.2015

Aufgabe (ohne Abgabe) In Kapitel 7 der Vorlesung haben wir einige Sätze angegeben, deren Beweise analog wie die Beweise für die entsprechenden Sätze aus Kapitel 4 geführt werden. Wiederholen Sie beim Nacharbeiten der Vorlesung die entsprechenden Beweise aus Kapitel 4 und schreiben Sie diese für den Fall metrischer Räume auf (Sätze 7.2, 7.3, 7.15, 7.16, 7.19, 7.22).

Aufgabe 22

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie die *Viereckungleichung*

$$|d(p,q) - d(x,y)| \leq d(p,x) + d(q,y) \qquad \forall\, p,q,x,y \in X$$

und schlußfolgern Sie daraus, dass die Abstandsfunktion $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ist. (Dabei ist $X \times X$ mit der Produktmetrik versehen).

b) Wir versehen den Vektorraum der reellen $n \times n$-Matrizen $M(n, \mathbb{R})$ mit der Euklidischen Norm:

$$\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} M_{ij}^2} \qquad \text{für } M = (M_{ij}) \in M(n, \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $\det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die jeder Matrix ihre Determinante zuordnet, stetig ist.
Gilt dies auch, wenn man $M(n, \mathbb{R})$ mit einer anderen Norm versieht? (Begründung).

6 P

Aufgabe 23

Wir betrachten die Euklidischen Vektorräume $\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^l$ und bezeichnen die Euklidischen Normen darauf jeweils mit $\|\cdot\|$. Sei $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^m$. Für eine lineare Abbildung $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ definieren wir die *Operatornorm*

$$\|A\| := \max\{\, \|Ax\| \mid \|x\| = 1\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\|A\|$ ist korrekt definiert (d.h. das Maximum existiert).

b) $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$.

c) Der normierte Vektorraum $(L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$ ist vollständig.

d) Für alle linearen Abbildungen $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ und $B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ gilt:
  (i) $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^k$.
  (ii) $\|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$.

e) Jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ ist lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten $\|A\|$.

10 P

Aufgabe 24

a) Zeigen Sie, dass jede Isometrie zwischen metrischen Räumen ein Homöomorphismus ist.

b) Sei $D_r^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| < r\}$ die offene 3-dimensionale Kugel vom Radius r um den Nullpunkt im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$, versehen mit der Euklidischen Metrik.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi : D_r^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$\psi(x) := \frac{x}{r - \|x\|} \qquad \forall\, x \in D_r^3,$$

ein Hömöomorphimus ist. Ist ψ auch eine Isometrie?
Was bedeutet ψ geometrisch?

6 P

Insgesamt: **22 P**