Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 10

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2015

Abgabe am 22.06.2015

Aufgabe 28

Sei $f : U := (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \frac{1}{xy}$ und $p = (p_1, p_2) \in U$ ein beliebiger Punkt.

a) Berechnen Sie die Tangentialebene $\mathrm{Tan}_P F$ an die Fläche

$$F := \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\} \subset \mathbb{R}^3$$

im Punkt $P := (p, f(p))$.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Tangentialebene $\mathrm{Tan}_P F$ mit den drei Koordinatenachsen sowie das Produkt der Abstände dieser drei Punkte zum Nullpunkt.

c) Sei $M_{1/3} := \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = \frac{1}{3}\} \subset \mathbb{R}^2$ die Niveaumenge von f zum Niveau $\frac{1}{3}$. Bestimmen Sie für $p = (1, 3)$ den Gradienten $\mathrm{grad} f(1, 3)$ und die Tangente an $M_{1/3}$ im Punkt $(1, 3)$.

6 P

Aufgabe 29

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Beweisen Sie:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existieren in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (auch in $(0, 0)$).

b) $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 2|y|$ und $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq 2|x|$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig.

d) f ist in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar.

e) $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existieren, sind aber nicht gleich. Ist das ein Widerspruch zum Lemma von Schwarz?

8 P

Aufgabe 30

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y, z) := \left(\frac{xy}{z}, x\sqrt{y} + \sqrt{z}\right).$$

b) Bestimmen Sie die Einträge der Hesse-Matrix der Funktion $g : \{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x, y, z) := e^{x + y^z} + \ln \frac{x + z}{x + y} + \arctan \frac{1}{y}.$$

6 P

Insgesamt: **20 P**