Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 12

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2015

Abgabe am 06.07.2015

Aufgabe 34

a) Wir beschreiben die Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch *Zylinderkoordinaten*, d.h. wir betrachten $f:\ U := (0,\infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow V := \mathbb{R}^3 \setminus ([0,\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R})$ mit

$$f(r,\varphi,z) := (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z).$$

Zeigen Sie, dass $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

b) Wir beschreiben die Punkte des $\mathbb{R}^3$ durch *Kugelkoordinaten*, d.h. wir betrachten $\phi:\ U' := (0,\infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (0, 2\pi) \longrightarrow V = \mathbb{R}^3 \setminus ([0,\infty) \times \{0\} \times \mathbb{R})$ mit

$$\phi(r,u,v) := (r\cos(u)\cos(v), r\cos(u)\sin(v), r\sin(u)).$$

Zeigen Sie, dass $\phi : U' \to V$ ein Diffeomorphismus ist.

Hinweis: Die Bijektivität von f und ϕ können Sie ohne Beweis voraussetzen, das hatten wir in der Vorlesung geometrisch begründet. (Vollziehen Sie diese Begründung beim Nacharbeiten der Vorlesung für sich selbst nochmal nach).

4 P

Aufgabe 35

Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\phi(x,y) := (2e^x - x^2, x+y).$$

a) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist.
Tipp: Überlegen Sie sich zuerst mit Hilfe von Methoden der Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen, dass $\phi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi_1(x) = 2e^x - x^2$ eine bijektive Funktion ist.

b) Zeigen Sie, dass ϕ ein Diffeomorphismus ist.

c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung ϕ^{-1} im Punkt $(2,0)$.

6 P

Aufgabe 36

Wir betrachten die Gleichung

$$f(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0. \qquad (*)$$

Der Punkt $(0,e,2)$ liegt offensichtlich in der Lösungsmenge dieser Gleichung.

a) Zeigen Sie, dass man die Gleichung $(*)$ in einer Umgebung von $(0,e,2)$ nach der z-Variablen auflösen kann.

b) Sei $z = z(x,y)$ eine solche Auflösung. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}(0,e)$ und $\frac{\partial z}{\partial y}(0,e)$.

6 P

Insgesamt: **16 P**