Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 307

Übungsblatt 13

Vorlesung Analysis 2 (Lehramtsstudiengänge)

Sommersemester 2015

Keine Abgabe (Besprechung in den Übungen)

Aufgabe 37

a) Zeigen Sie, dass die Sphäre $S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^3 = 1\}$ eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie für einen beliebigen Punkt $p \in S^2$ den Tangentialraum T_pS^2, die Tangentialebene Tan_pS^2 und die Normale Nor_pS^2.

b) Sei $\psi : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ eine positive stetig differenzierbare Funktion. Wir betrachten den Graphen von ψ als Funktion in der zx-Ebene über der z-Achse und rotieren ihn um die z-Achse. Die dabei entstehende Fläche F_ψ im $\mathbb{R}^3$ heißt von ψ erzeugte Rotationsfläche. Dann gilt

$$F_\psi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = \psi(z)^2,\ z \in (a,b)\}.$$

Zeigen Sie, dass F_ψ eine reguläre Fläche ist und bestimmen Sie den Tangentialraum T_pF_ψ im Punkt $p = (\psi(z), 0, z) \in F_\psi$.

Aufgabe 38

a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-meßbar. Zeigen Sie, dass auch das Innere $Int(A)$, der Abschluß $cl(A)$ und der Rand ∂A Jordan-meßbar sind und dass gilt

$$vol(A) = vol(Int(A)) = vol(cl(A)), \qquad vol(\partial A) = 0.$$

b) Seien A und B Jordan-meßbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dass auch die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ Jordan–meßbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind.

Tipp: Benutzen Sie das Kriterium aus Satz 9.2 der Vorlesung.

Aufgabe 39

Sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ eine kompakte Teilmenge und $f : K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph von f, d.h. die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \mid x \in K\} \subset \mathbb{R}^n,$$

eine Jordansche Nullmenge ist.