Professor Dr. Dirk Becherer SS 2013

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Do. 4.7. zu Beginn der Vorlesung

Serie 10 (Version vom 2. Juli 2013)

1) Für $i = 1, 2$ seien X^i Itô-Prozesse

$$X_t^i = \int_0^t a_s^i ds + \int_0^t b_s^i dW_s\,, \quad t \geq 0,$$

mit a, b previsibel und $\int_0^t |a_s^i| ds < \infty$, $\int_0^t |b_s^i|^2 ds < \infty$ für alle t.

Beweisen Sie, dass X^1 und X^2 genau dann ununterscheidbar sind, falls $dP \times dt$-fast überall gilt $a^1 = a^2$ und $b^1 = b^2$.

2) Wir betrachten das Vasicek Model

i) Zeigen Sie: Zero-Coupon Bond Preise haben die Form

$$B_{t,T} = \exp(A(T-t)r_t + B(T-t))$$

für geeignete Funktionen $A, B : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie A, B.

ii) Bestimmen Sie den Preis $\pi_o = E^*[C/B_T]$ einer (europäischen) Call-Option mit Auszahlung $C = (B_{T_1,T_2} - K)^+$ zur Fälligkeit T_1 auf einen Zero Coupon Bond, der in $T_2 > T_1$ fällig wird.

3) Sei die Volatilitätsstruktur der Zero Coupon Bond Dynamik (unter EMM Q^*)

$$\frac{dB_{t,T}}{B_{t,T}} = r_t dt + \sigma_{t,T} dW_t^*$$

gegeben durch $\sigma_{t,T} := -\sigma(T-t)$ für ein $\sigma > 0$.

i) Bestimmen Sie die Koeffizienten α, v der SDE

$$df_{t,T} = \alpha_{t,T} dt + v_{t,T} dW_t^*$$

für die HJM-Forward Rates. Finden Sie $f_{t,T}$ als Funktion von t, T, σ und W^* sowie der initialen Forward Kurve $f_{0,T}$.

ii) Bestimmen Sie hieraus die Short Rate r_t und ihre Dynamik dr_t (unter Q^*).

iii) Berechnen Sie $\int_0^t r_u du$ und $\int_0^t \sigma_{u,T}^2 dW_u^*$ und damit schließlich eine explizite Darstellung der Zero Coupon Bond Preise $B_{t,T}$, welche insbesondere zeigt, dass diese (unter Q^*) lognormal verteilt sind.

4) Wir betrachten eine arbitragefreie Preisentwicklung zweier Wertpapiere S^1 und S^2, welche gegeben ist durch

$$\begin{aligned} dS^1 &= S^1(\sigma_1 dW^1 + \sigma_2 dW^2), \qquad S_0^1 = 1 \\ dS^2 &= S^2(\sigma_3 dW^1 + \sigma_4 dW^2), \qquad S_0^2 = 1 \end{aligned}$$

mit $\sigma_i \in \mathbb{R}\,(i = 1, \ldots, 4)$ und unabhängigen Brownschen Bewegungen W^1 und W^2. Der Zinssatz r der risikolosen Anlage sei zur Einfachheit Null.

Eine europäische 'Austausch'-Option gibt dem Käufer das Recht, zur Fälligkeit T eine Anzahl von k^2 Einheiten der Aktie S^2 gegen k^1 Einheiten der Aktie S^1 zu tauschen. Bei Cash-Settlement ist die Auszahlung der Option demnach

$$H = (k^1 S_T^1 - k^2 S_T^2)^+.$$

Berechnen Sie mit Hilfe eines Numerairewechsel-Argumentes den arbitragefreien Preisprozess dieser Option.