Professor Dr. Dirk Becherer SS 2013

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Mi. 10.7. 12st Sekretariat Stochastik
(Die Aufgaben dieser Serie geben Zusatzpunkte)

Serie 11 (Version vom 5. Juli 2013)

Wir sagen im Folgenden, dass Annahme (N-EMM) gilt, falls es einen Numeraire Asset $N > 0$ und ein diesbezügliches EMM $Q^N \sim P$ gibt, derart dass alle diskontierten ZCB Preise $B_{\cdot,T}/N$ Martingale unter Q^N sind.

1) Seien $B_{t,T} > 0$ positive ZCB Preise.

   i) Seien $\Delta_i = \Delta > 0$, $T_0 > 0$, $T_i := T_{i-1} + \Delta_i$ für $i = 1, 2, \ldots$ und $2 \leq m \in \mathbb{N}$ und $\bar{\Delta} = m\Delta$. Wir definieren (simple) Forward Market Rates L bzw. $\bar{L}$ für 1- sowie m-Perioden via

$$(1 + \Delta_i L_t^i) \ := \ \frac{B_{t,T_{i-1}}}{B_{t,T_i}}, \quad t \leq T_{i-1}, \tag{1}$$

$$((1 + \bar{\Delta} \bar{L}_t^k) \ := \ \frac{B_{t,T_{(k-1)m}}}{B_{t,T_{km}}}, \quad t \leq T_{(k-1)m}. \tag{2}$$

   Beweisen Sie

$$(1 + \bar{\Delta} L_t^k) = \prod_{i=(k-1)m+1}^{km} (1 + \Delta L_t^i), \quad t \leq T_{(k-1)m} .$$

   [Bemerkung: eine solche Identität wird für reale Libor Forward Rates jedoch *nicht* beobachtet, was zur Entwicklung sogenannter "multi-curve Libor models" geführt hat. Grund: Interbank offered Rates sind nicht frei von Risiko betreffend eines Zahlungsausfalles oder einer Verschlechterung der Kreditwürdigkeit der Banken; unabängig von der Frage, ob sie "ehrlich" quotiert werden.]

   ii) Eine *Floating Rate Note* (FRN) hat folgenden Zahlungsstrom: Gegeben $t < T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ und $\Delta_i := T_i - T_{i-1}$ zahlt die FRN in T_i, $i = 1, \ldots, n$, die Koupons $c_i := \Delta_i L_{T_{i-1}}^i$ sowie zudem in T_n das Notional 1 an den Halter.
   Beweisen Sie, dass unter Annahme (N-EMM) die FRN zu jeder Zeit $t \leq T_0$ den konstanten Wert 1 hat. Stellen Sie dazu zuerst den Zahlungsstrom mittels ZCBs dar und berechnen Sie die bedingte Erwartung der geeignet mit N diskontierten zukünftigen Zahlungen unter Q^N.
   Überlegen Sie sich zudem eine einfache dynamische Replikationsstrategie für den Cashlow der FRN, welche zu jedem Zeitpunkt nur in maximal einen ZCB investiert.

2) Mit einem *Swap* tauscht man variable Zinszahlungen gegen fixe Zinszahlungen: Für $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$, $K > 0$, $\Delta_i = T_i - T_{i-1}$ und Einheitsnotional 1, muss der Halter eines Payer Interest Rate Swaps fixe Zinsen $\Delta_i K$ zu Zeiten $T_1, \ldots, T_n$ zahlen, und bekommt jeweils variable Zinsen $\Delta_i L_{T_{i-1},T_i}$ in T_i, $i = 1, \ldots, n$. Dabei bezeichnet L_{T_{i-1},T_i} die in T_{i-1} festgelegte (Libor, Euribor) Market Rate für die Periode $[T_{i-1}, T_i]$, siehe (1).

   Wir nehmen einen ZCB Markt mit Preisprozessen $B_{t,T} > 0$ an.

   i) Bestimmen Sie den Wert eines solchen Payer Interest Rate Swaps zur Zeit $t \leq T_0$.

   ii) Die *fair swap rate* s_t in $t \in [0, T_0]$ ist definiert dasjenige K, für das der Wert des Swaps zur Zeit t gleich Null ist. Das heisst, der Swap-Kontrakt kann in t mit $K = s_t$ eingegangen werden, ohne dass die Payer bzw Receiver Seite hierfür Geld zahlt oder bekommt. Bestimmen Sie s_t und zeigen Sie, dass $s_t > 0$ gilt falls $T \mapsto B_{t,T}$ monoton fallend ist.

3) Im Rahmen von Aufgabe 2 gelte zudem die Annahme (N-EMM). Konstruieren Sie ein (handelbares) Numeraire $N^s > 0$ und konstruieren ein diesbezügliches Martingalmaß $Q^{N^s} \sim Q^*$ auf $\mathcal{F}_{T_l}$, so dass die Swap Rate $(s_t)_{t \leq T_0}$ ein Q^{N^s}-Martingal ist.

   [Bemerkung: In einem Model wo s_t unter einem geeigneten Q^{Ns} lognormalverteilt ist, können also Call/Put Optionen auf zukünftige Swap Raten mit Hilfe der Black-Formel explizit bewertet werden. Dies ist eine Grundlage für das Swap Market Model, in welchem Optionen auf verschiedene Swap Raten konsistent mit der Black-Formel bewertet werden können.]

4) Wir haben das "Libor" Markt Model konstruiert, ohne dabei die Existenz eines kontinuierlich verzinsten lokal risikolosen Savings Accounts $B_\cdot = \exp(\int_0^\cdot r_t dt)$ bzw. eine Short Rate r_t anzunehmen. In der Tat ist im Rahmen des entwickelten Modelles natürlicher, den zur Folge $T_0 < T_1 < \ldots$ gehörenden diskreten Savings Account zu betrachten. Sei $\hat{B}$ der Wertprozess der (s.f.) Strategie, welche in $t = 0$ mit einem Euro startet und das Vermögen zu jeder Zeit t jeweils gänzlich in den ZCB der nächsten Fälligkeit T_i investiert. ($i = \min\{k : t < T_k\}$).

   Bestimmen Sie unter dem zum Numeraire $\hat{B}$ gehörenden Martingalamaß $Q^{\hat{B}}$ die Dynamik der Forward Market Rates dL_t^k, d.h. schreiben Sie die dL_t^k als Itô-Prozess und berechnen Sie die SDE-Koeffizienten bzgl. der treibenden $Q^{\hat{B}}$-Brownschen Bewegung (in welchem einfachen Bezug steht diese zu den Brownschen Bewegungen bzgl. der Forward Measures Q^{T^i}?) und den Driftkoeffizienten.

5) Auf der Webseite zur Vorlesung finden Sie einen Link, unter welchem Sie sich die historische gemeinsame Entwicklung der (US) Zinsstrukturkurve und des Aktienindizies ansehen können. Schreiben Sie einen kurzen Essay (max. eine Seite), in dem Sie Ihre Beobachtungen beschreiben. Kommentieren Sie insbesondere, ob und falls ja inwiefern Sie eine Abhängigkeit zwischen den beiden Entwicklungen beobachten.