Übungen zur Vorlesung
Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis zum 25.4., zu Beginn der Vorlesung

Serie 1

1) Sei X ein stetiger reellwertiger Pfad mit stetiger quadratischer Variation $\langle X \rangle$ entlang einer festen, aufsteigenden (sich verfeinernden) Folge (π_n) von Zerlegungen. Zeigen Sie, dass für $f \in C^1(\mathbb{R})$ und für $\alpha \in [0,1]$ das α-*Integral*

$$\alpha\text{-}\int_0^t f(X_s)dX_s := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \pi_n, t_i \le t} f\left(X_{t_i} + \alpha(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\right)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

existiert, und dass gilt

$$\alpha\text{-}\int_0^t f(X_s)dX_s = \int_0^t f(X_s)dX_s + \alpha \int_0^t f'(X_s)d\langle X \rangle_s.$$

Für welchen Wert von α entspricht das α-Integral dem Itô-Integral?

2) Sei $(W_t)_{0\le t\le 1}$ ein typischer Pfad einer Brownsche Bewegung und $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Zerlegungen von $[0,1]$ mit $|\pi_n| \to 0$.

Berechnen Sie zur Illustrierung der Aufgabe 1 direkt (d.h. ohne Anwendung der Itô-Formel) für jedes $t \in [0,1]$ und $\alpha \in [0,1]$ das α-Integral

$$\alpha\text{-}\int_0^t W_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in \pi_n, t_i \le t} \left(W_{t_i} + \alpha(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})\right)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \qquad P\text{-f.s..}$$

3) Seien M und A stetig mit stetiger quadratischer Variation $\langle M \rangle$ bzw. $\langle A \rangle$. Dabei gelte $\langle A \rangle = 0$.

Zeigen Sie, dass die quadratische Variation des Produktes MA eine Darstellung der Form

$$\langle MA \rangle_t = \int_0^t B_s d\langle M \rangle_s\,, \quad t \ge 0\,,$$

hat, und bestimmen Sie den stetigen Integranden B für diese Darstellung.

4) Seien a, σ, x_0 Parameter in $\mathbb{R}$.

i) Sei $t \to W_t \ , t \geq 0$, ein 'typischer' Pfad der Brownschen Bewegung, also eine stetige Funktion mit $W_0 = 0$ und quadratischer Variation $\langle W \rangle_t = t \ , t \geq 0$.

Finden Sie ein $X = (X_t)_{t \geq 0}$, welches die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$dX_t = -aX_t \, dt + \sigma \, dW_t, \qquad t \geq 0,$$

mit Anfangsbedingung $X_0 = x_0$ löst.

(Hinweis. Leiten Sie zunächst eine SDE $dY_t = \ldots$ für $Y_t = e^{at} X_t$ her.)

ii) Sei nun $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$, und bezeichne $X = (X_t)_{t \geq 0}$ den stochastischen Prozess, der f.s. (bei pfadweiser Betrachtung) die obige SDE löst.

Zeigen Sie, dass X_t normalverteilt ist und berechnen Sie $E[X_t]$ und $\text{Var}[X_t]$.