Professor Dr. Dirk Becherer SS 2013

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis zum 3.5. zu Beginn der Vorlesung,

<u>Serie 2</u> (Version vom 25. April 2013)

1) Wir betrachten eine geometrische Brownsche Bewegung

$$X_t = x_0 \exp(\sigma W_t + \alpha t), \qquad t \geq 0$$

mit Start in $x_0 > 0$, wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine (Standard) Brownsche Bewegung bezeichnet.

i) Berechnen Sie sämtliche Momente $E[X_t^p]$ $(t \geq 0,\ p \in \mathbb{R})$.

ii) Berechnen Sie $\langle X \rangle$.

iii) Gegeben $p \neq 0$ - für welche Parameterwerte σ, α ist (X_t^p) ein Martingal?

2) i) Sei X eine $N(m, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ für ein $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$. Finden Sie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \approx P$, so dass $X \sim N(0, \sigma^2)$ unter Q.
Hinweis: Definieren Sie Q via Dichte $\frac{dQ}{dP} = g(X)$ für eine geeignete Funktion g.

ii) Seien nun $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(m, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Bestimmen Sie $Q \approx P$, so dass $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. $N(0, \sigma^2)$-verteilt unter Q.

iii) Sei

$$S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Konstruieren Sie ein $Q \approx P$, so dass $(S_k)_{0\leq k\leq n}$ ein Q-Martingal bzgl. der Filtration $\mathcal{F}_k := \sigma(X_1, \ldots, X_k)$, $k = 0, \ldots, n$, ist.

3) Wir betrachten den stochastische Prozess X, welcher die Aufgabe 4 b) auf Serie 1 löst, wobei wir etwas allgemeiner annehmen, dass der Startwert X_0 eine $\mathcal{N}(m_0, \sigma_0)$-normalverteilte Zufallsvariable mit Parametern $m_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma_0 \geq 0$ ist, welche unabhängig von W ist.

  i) Zeigen Sie, dass allgemein für eine deterministische stetige Funktion $h(t)$ das Itô-Integral $Y_t := \int_0^t h(u) dW_u$, $t \geq 0$, ein Gaußprozess ist. Folgern Sie, dass X ein Gaußprozess ist.

  ii) Berechnen Sie die Kovarianzfunktion $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ von X.

  iii) Für welche Kombinationen der Parameter $m_0 \in \mathbb{R}, \sigma_0 \geq 0$ und $a > 0$ und $\sigma \geq 0$ für die Startverteilung bzw. die stochastischen Differentialgleichung ist die Lösung X (stark) stationär?

4) Seien a,b in $C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ mit $a(0) = 1$ und $a(t) > 0$, $t \geq 0$. Sei W ein typischer Pfad einer Brownschen Bewegung.

  i) Zeigen Sie: Der Prozess $X_t := a(t)\left(x_0 + \int_0^t b(u) dW_u\right)$, $t \geq 0$, ist eine Lösung der stochastischen Differentialgleichung (SDE)

$$dX_t = \frac{a'(t)}{a(t)} X_t \, dt + a(t)b(t) \, dW_t \quad \text{mit } X_0 = x_0.$$

  ii) Benutzen Sie dies, um eine explizite Lösung für die SDE

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dW_t$$

  mit Startwert $X_0 = 0$ auf dem Zeitintervall $t \in [0, 1)$ zu konstruieren, welche als Itô-Integral geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass X stetig nach $t = 1$ fortgesetzt werden kann - nämlich wie ?

  iii) Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit Brownscher Bewegung ist die derart (pfadweise) gegebene Lösung ein zentrierter Gaußprozess. Berechnen Sie seine Kovarianzfunktion $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$.