

Übungen zur Vorlesung Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe diesmal Di 14.5. um 11 zu Beginn der VL!
(Alternativ vorher per Email an frentrup@...)

Serie 3 (Version vom 7. Mai 2013)

- 1) Sei X eine \mathbb{R}^n -wertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit einer Unter- σ -Algebra $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Es gelte

$$E[\exp(i\lambda X) | \mathcal{F}_t] = E[\exp(i\lambda X)] \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Beweisen Sie, dass X unabhängig von \mathcal{F}_t ist.

- 2) Wir betrachten das Bachelier-Modell mit Zinssatz $r = 0$, (diskontiertem) Assetkurs $X_t = X_0 + mt + \sigma W_t$ ($t \geq 0$) mit $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$ und Filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t) = \sigma(W_s : s \leq t)$.

- i) Berechnen Sie möglichst explizit für das in T fällige pfadabhängige Derivat mit Auszahlung $H := \int_0^T X_u^2 du$ den Wertprozess

$$V_t := E^*[H | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T.$$

- ii) Beweisen Sie, dass es einen Integranden θ der Form $\theta_u = g(u, X_u)$ für eine zu bestimmende Funktion g gibt, so dass gilt

$$H = E^*[H | \mathcal{F}_t] + \int_t^T g(u, X_u) dX_u, \quad 0 \leq t \leq T.$$

- 3) Im Bachelier-Modell $dX_t = \sigma dW_t + mdt$ ($t \in [0, T]$) für den Kursverlauf einer Aktie betrachten wir eine Call Option mit Auszahlung $H(\omega) = (X_T(\omega) - K)^+$. Sowohl der Kursverlauf als auch die Auszahlung seien bereits in diskontierten Einheiten gegeben.

Bestimmen Sie explizit den arbitragefreien Preisprozess sowie die dynamische Absicherungsstrategie (Hedgingstrategie) für die Call-Option mittels der Verteilungsfunktion Φ und Dichte φ der Standardnormalverteilung.

- 4) i) Seien $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine explizite Lösung der Form $X_t = F(t, W_t)$ welche die SDE $dX_t = (mX_t + n)dW_t$ mit Startwert $X_0 = x_0$ löst.
- ii) Seien $\lambda \geq 0$, $s_0 > 0$, $r(t) \in C^0([0, \infty), \mathbb{R})$ und $\sigma > 0$. Konstruieren Sie explizit einen Prozess S_t , der in $S_0 = s_0$ startet und die SDE

$$dS_t = r_t S_t dt + \left(\lambda S_t + (1 - \lambda) S_0 \exp\left(\int_0^t r_u du\right) \right) \sigma dW_t, \quad t \geq 0,$$

löst. (Konstruieren Sie zunächst $X_t := S_t \exp(-\int_0^t r_u du)$.)