

Übungen zur Vorlesung Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Do. 16.5. zu Beginn der Vorlesung

Serie 4 (Version vom 21. Mai 2013)

- 1) Beweisen Sie den folgenden in der Vorlesung nicht ausgeführten Beweisschritt:

Für die in der Vorlesung konstruierte Lösung $F(t, x)$ des PDE-Randwertproblems für das Black-Scholes Modell (ohne Zinsen, d.h. $r = 0$) mit Aktienpreis $dX_t = X_t \sigma dW_t^*$ unter äquivalentem Martingalmaß P^* gilt, dass $F(t, X_t)$ ein P^* -Martingal ist; insbesondere gilt

$$F(t, X_t) = E_t^*[f(X_T)] := E_t^*[f(X_T) | \mathcal{F}_t]$$

für jede fast überall stetige Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ polynomialen Wachstums ($|f(x)| \leq c(1 + |x|)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $c < \infty$).

- 2) Berechnen Sie im Black-Scholes Modell mit Anlagenpreisen $dS_t = S_t(mdt + \sigma dW_t)$ und $dB_t = rB_t dt$ bei konstanter risikoloser Zinsrate r den arbitragefreien Preis des Derivates mit der Auszahlung $H := 1_{\{S_T \leq K\}}$ ($K > 0$) nach der Laufzeit T und bestimmen Sie die zugehörige Absicherungsstrategie (Hedgingstrategie).

- 3) (Zusatzaufgabe)

Zeigen Sie, dass im Black-Scholes Modell (wie in 2)) der Black-Scholes Preis $F(t, X_t) = \Pi(x, T-t, \sigma, r, K) = e^{-r(T-t)} E^*[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t]$ für eine Call-Option $H = (S_T - K)^+$ durch die Black-Scholes Formel gegeben ist:

$$\Pi(x, T-t, \sigma, r, K) = \Pi(x, T-t, \sigma, r, K) = x\Phi(d_+(x, T-t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x, T-t)).$$

Hierbei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, $r \in \mathbb{R}$ die risikolose Zinsrate, $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie und $\tau = T - t$ die Zeit bis zur Fälligkeit. Die Funktionen d_+ und d_- sind gegeben durch

$$d_{\pm}(x, \tau) = \frac{\log \frac{x}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Berechnen und skizzieren (oder plotten) Sie zudem die Sensitivitäten (“Greeks”) als Funktion von x : “Delta” $:= \Delta := \frac{\partial}{\partial x} \Pi$, “Gamma” $:= \Gamma := \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Pi$, “Theta” $:= \Theta := \frac{\partial}{\partial t} \Pi$ sowie “Vega” $:= \nu := \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi$.

4) (Zusatzaufgabe)

Für einen gegebenen am Markt quotierten Preis $\pi = \pi_t(C^{call})$ einer Call-Option und bei gegebenen Werten für $S_t, T - t, r, K$ ist die *implizite Volatilität* $\sigma^{im} = \sigma^{im}(\pi, x, T - t, r, K)$ der Option (bzgl. des Black Scholes Modelles) definiert als Lösung von

$$\Pi(S_t, T - t, \sigma^{im}, r, K) = \pi,$$

wobei

$$\Pi(x, T - t, \sigma, r, K) = x\Phi(d_+(x, T - t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x, T - t))$$

die Preisformel für den Call-Optionspreis im Black-Scholes Modell bezeichnet. Man kann zeigen (vgl. vorige Vorlesung), dass $\sigma^{im}(\pi)$ eindeutig für

$$\pi \in ((x - Ke^{-r(T-t)})^+, x)$$

definiert ist und sich durch das Newton-Verfahren effizient numerisch berechnen läßt (mit quadratischer Konvergenz) wenn man als Startwert der Newton-Iterationen den Wert $\sigma_0 = \sqrt{2 \left| \frac{\log \frac{x}{K} + r(T-t)}{T-t} \right|}$ wählt (wo "Vega" maximal wird).

- i) Skizzieren Sie die implizite Volatilität $\sigma^{im}(K) = \sigma^{im}(\pi(K), x, T - t, r, K)$ als Funktion von $K \in (0, \infty)$, bei fixierten sonstigen Parametern, wenn $\pi(K) = \pi(C^{Call}(K))$ die Preise der Call-Optionen mit Strike K im Black-Scholes Model sind; Rechtfertigen Sie Ihre Skizze (oder implementieren Sie das Newton Verfahren und plotten Sie die Funktion $K \mapsto \sigma^{im}(K)$ für z.B. $\sigma = 0.3, T - t = 1, r = 0$).
- ii) Skizzieren Sie die implizite Volatilität $\sigma^{im}(K) = \sigma^{im}(\pi(K), x, T - t, r, K)$ als Funktion von $K \in (0, \infty)$, bei fixierten sonstigen Parametern, falls $\pi(K) = \pi(C^{Call}(K))$ die Preise der Call-Optionen mit Strike K im Bachelier Model sind (vgl. vorige Serie). Rechtfertigen Sie wie zuvor Ihre Antwort.
- iii) Recherchieren Sie durch Quellenstudium (z.B. wikipedia.org oder im Buch von J.Hull) oder durch eigene Berechnungen impliziter Volatilitäten für aktuelle liquide (Mid-)Preise von Call-Optionen gleicher Fälligkeit für eine Auswahl verschiedene Stikes K um "Spot" x herum (z.B. von <http://finance.yahoo.com/q/op?s=BAC+Options> für $T = 23.$ Mai), wie in der Realität die Abhängigkeit der impliziten Volatilität vom Strike aussehen kann.