Professor Dr. Dirk Becherer SS 2013

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Do. 23.5. zu Beginn der Vorlesung

Serie 5 (Version vom 22. Mai 2013)

1) Wir betrachten zwei Europäische Call Optionen C_i $(i = 1, 2)$ auf den gleichen zugrunde liegenden Asset mit verschiedenen Fälligkeiten $T_1 < T_2$. Nehmen Sie an, dass die Ausübungskurse K_i jeweils mit den aktuellen Forward Preisen F_i des Assets für die entsprechenden Fälligkeit übereinstimmen und die Optionen aktuell (zur Zeit $t < T_1$) den gleichen Preis haben. Was können Sie dann über die Beziehung der jeweiligen impliziten Volatilitäten σ_i^{im} $(i = 1, 2)$ sagen?

2) Gegeben seien $r = 0$ (bzw. diskontierte Preise), $\sigma > 0$, $t = 0$ und $\tau = T - t = T > 0$ (Zeit bis zur Fälligkeit) sowie $X_0 > 0$ als aktueller Preis der Aktie. Wir wollen in dieser Aufgabe das Black Scholes Model $dX_t = X_t \sigma dW_t^*$ sowie das Bachelier Model[1] $dX_t = X_0 \sigma dW_t^*$ vergleichen.

   i) Definieren Sie analog zur implizite Volatilität σ_{BS}^{im} für das Black-Scholes Model diejenige σ_B^{im} für das Bachelier Model. (Vgl. Serie 4 A4, Serie 3 A3)

   ii) Zeigen Sie, dass für At-the-Money Call Optionen mit Ausübungskurs (Strike) $K = X_0$ die implizite Bachelier Volatilität $\sigma_B^{im}(\pi)$ eines Optionspreises $\pi > 0$ in geschlossener Form als Funktion von π angegeben werden kann.

   iii) Für festes $\pi \in (0, X_0)$ als Preis einer At-the-Money Call Option seien $\sigma_{BS}^{im}(\pi)$ und $\sigma_B^{im}(\pi)$ die jeweiligen impliziten Volatilitäten. Beweisen Sie

$$0 \leq \sigma_{BS}^{im} - \sigma_B^{im} \leq \frac{T}{12} (\sigma_{BS}^{im})^3 .$$

   iv) Seien nun π_{BS} und π_B die Preise einer At-the-Money Call Option mit Strike $K = X_0$ in dem jeweiligen Model. Zeigen Sie, dass

$$0 \leq \pi_B - \pi_{BS} \leq const(X_0)(\sigma\sqrt{T})^3 = \mathcal{O}((\sigma\sqrt{T})^3)$$

   gilt und bestimmen Sie die Konstante.

[1] Achtung: Wir benutzen für das Bachelier Model in dieser Aufgabe eine andere Parametrisierung als in der Vorlesung, welche für den Vergleich mit dem Black Scholes Model adäquater ist: Dem Sigma der Vorlesung entspricht hier $X_0\sigma$.

3) Die Kursentwicklung einer Aktie $(A_t)_{t\geq 0}$ mit kontinuierlicher Dividendenausschüttung sei gegeben durch

$$A_t = A_t(\sigma dW_t + (m-\delta)dt), \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit $m, \sigma, \delta \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0$ und $\delta \geq 0$. Dabei sei die Dividendenausschüttung $(D_t)_{t\geq 0}$, gegeben durch $dD_t = \delta A_t dt$. Die Zinsrate sei $r = 0$.

Dann liefert eine selbstfinanzierende Strategie mit $(\vartheta_s)_{s\leq T}$ Aktien den Wertprozess

$$V_t = V_0 + \int_0^t \vartheta_s dG_s, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

wobei $G_t = A_t + D_t$ ist.

i) Leiten Sie das Analogon zur Black-Scholes-Differentialgleichung in diesem Modell her, die eine Funktion $F(t,a)$ erfüllen muss, damit $F(t, A_t)$ den arbitragefreien Preis eines Derivates mit Auszahlung $f(A_T)$ in T beschreibt (für f polynomialen Wachstums). Konstruieren Sie für diese PDE eine Lösung F aus der Lösung $G(t,x)$ für die Black-Scholes-Differentialgleichung (ohne Zinsen und Dividenden) mit geeigneter Randbedingung $g(x)$.

ii) Bestimmen Sie das Maß $P^* \sim P$, unter welchem der Prozess G zu einem Martingal wird.

iii) Zeigen Sie: Unter dem Martingalmaß P^* ist der Preisprozess (A_t) kein Martingal, dafür aber die Prozesse $S_t := A_t e^{\delta t}$ und $F(t, A_t)$ $(0 \leq t \leq T)$.
Weiter ist A_T is lognormalverteilt unter P^*.[2]

4) [3] Das Ziel dieser Aufgabe ist es, im Black-Scholes Modell mit den Anlagenpreisen

$$dS_t = S_t(mdt + \sigma dW_t) \quad \text{und} \quad dB_t = rB_t dt$$

bei konstanter risikoloser Zinsrate r den arbitragefreien Preis einer sogenannten *A*uswahl-Option zu berechnen. Ein Auswahl-Option gibt dem Käufer das Recht, in einem vorher festgelegten Zeitpunkt $T_0 \in (0,T)$ zwischen einer Call- und einer Put-Option mit Ausübungspreis K und Laufzeit T zu wählen. Dabei nehmen wir an, dass sich der Käufer für diejenige Option entscheidet, die im Zeitpunkt T_0 den höheren Preis hat.

Zeigen Sie: Der Preis $\pi(H^{\text{Wahl}})$ (zur Zeit 0) einer Auswahl-Option ist gegeben als Summe geeigneter Call und Put Preise

$$\pi(H^{\text{Wahl}}) = \pi(H_T^{\text{Call}}) + \pi(H_{T_0}^{\text{Put}}),$$

wobei H_T^{Call} eine Call-Option auf (S_t) mit Ausübungspreis K und Laufzeit T und $H_{T_0}^{\text{Put}}$ eine Put-Option auf (S_t) mit Ausübungspreis $Ke^{-r(T-T_0)}$ und Laufzeit T_0 sind.

[2] Preise von Call o. Put Optionen können also mit der Black Scholes Formel berechnet werden.
[3] Zusatzaufgabe