Übungen zur Vorlesung
Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Do. 30.5. zu Beginn der Vorlesung

Serie 6 (Version vom 23. Mai 2013)

1) Im Black-Scholes-Modell mit

$$dS_t = S_t(mdt + \sigma dW_t) \quad \text{und} \quad dB_t = rB_t dt$$

sei $H_t = F(t, S_t)$ $(t \in [0,T])$ der Preisprozess einer Option $H = F(T, S_T)$ für eine Funktion $F \in C([0,T]\times\mathbb{R}^+)\cap C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$. Wir betrachten ein Portfolio, das aus $\vartheta_t = -F_x(t, S_t)$ Anteilen der Aktie und einer Option $\phi_t \equiv 1$ besteht. Diese Strategie ist i.A. nicht selbstfinanzierend (warum?). Für einen gegebenen Anfangswert V_0 des Portfolios (etwa $V_0 = \vartheta_0 S_0 + \phi_0 H_0$), kann man diese Strategie aber durch Savings-Accout-Anteile η gerade so ergänzen, dass sie selbstfinanzierend wird.

Zeigen Sie:

i) Der Wertprozess $V_t = \vartheta_t S_t + \phi_t H_t + \eta_t B_t,\ t \in [0,T]$, ist "lokal risikofrei", insoweit als ein adaptierter und (f.s.) stetiger Prozess $(\beta_t)_{0\le t\le T}$ existiert, so dass $dV_t = \beta_t dt$ gilt. Finden Sie β.

ii) Um Arbitrage zu vermeiden, sollte $dV_t = rV_t dt$ gelten.

iii) Der Wertprozess V genügt voriger Gleichung, falls F eine Lösung der Black-Scholes-Differentialgleichung ist. Geben Sie η konkret an mittels der Funktion F und Ihrer Ableitungen.

2) Im "Displaced-Diffusion Model" von Mark Rubinstein entwickelt sich der diskontierte Preisprozess X der Aktie mit $X_0 \in \mathbb{R}_+$ unter dem äquivalenten Martingalmaß P^* gemäß $dX_t = (X_t + a)\lambda\sigma\, dW_t^*$ mit $a := \frac{1-\lambda}{\lambda}X_0$ für $\lambda > 0$.

i) Finden Sie explizite Formeln für den arbitragefreien Preisprozess $F(t, X_t) = E_t^*[H]$ sowie die Hedgingstrategie (ϑ_t) einer Call Option $H := (X_T - K)^+$.

ii) (Zusatzaufgabe) Implementieren[1] Sie die Preisformel und berechnen Sie für gegebene Parameter (z.B. $\sigma = 0.3$, $T - t = 1$, $X_0 = 100$) die Preise $\pi(K)$ der Call Optionen für mehrere Strikes $K > -a$ in einem Intervall um X_0. Um die Abhängigkeit von λ zu untersuchen, plotten Sie den Graphen $K \mapsto \sigma^{im}(\pi(K))$ der impliziten (Black-Scholes) Volatilitäten dieser Preise für verschiedene Werte von λ (kleiner, größer und gleich Eins).

[1] in Matlab oder Scilab, Octave können Sie z.B. die Funktion "erf" nutzen, um die N(0,1)-CDF zu berechnen; alternativ konsultieren Sie *Numerical Recipes* für Approximationen.Zu σ^{im} vgl. vorige Serien.

3) Sei W eine Brownsche Bewegung. Für $h \in C^1([0,T])$ haben wir das Itô-Integral $I_t(h) := \int_0^t h(u)dW_u$ pfadweise erklärt und gezeigt, dass $(I_t(h))_{t\in[0,T]}$ ein zentrierter Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $\mathrm{Cov}[I_t(h), I_s(h)] = \int_0^{s\wedge t} |h(u)|^2 du$ ist. Wir wollen diese Aussagen auf $h \in L^2([0,T], dt)$ verallgemeinern.

i) Beweisen Sie, dass $C^1([0,T])$ dicht im Hilbertraum $L^2([0,T], dt)$ liegt.

ii) Zeigen Sie für $h \in C^1([0,T])$, dass gilt

$$E[I_t(h)^2] = \int_0^t |h(u)|^2 du\,.$$

iii) Beweisen Sie damit, dass die Abbildung

$$I_t : C^1([0,T]) \subset L^2([0,T], dt) \to L^2(\Omega, P)$$

mit $h \mapsto I_t(h)$ sich in eindeutiger Weise stetig auf $L^2([0,T], dt)$ fortsetzen lät, so dass vorige Gleichung für $h \in L^2([0,T], dt)$ gilt und uns eine Isometrie (welche?) liefert, wobei wir mit $I_t(h)$ auch die Fortsetzung bezeichnen. Wir können so $\int_0^t h(u)du := I_t(h)$ definieren für $h \in L^2([0,T], dt)$.

iv) Folgern Sie für $h \in L^2([0,T], dt)$, dass der Prozess $(I_t(h))_{t\in[0,T]}$ ein zentrierter Gaußprozess mit der obigen Kovarianzfunktion ist.

4) Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtrierung. Ein adaptierter rechtsstetiger Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit $X_0 \in \mathcal{L}^1$ heisst *lokales Martingal*, wenn es eine wachsende "lokalisierende" Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $\tau_n \to \infty$ P-f.s. gilt und der gestoppte Prozess $(X_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ ein Martingal bez. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein lokales Martingal. Zeigen Sie:

i) Ist (X_t) stetig, so ist auch die Folge $\sigma_n := \inf\big(t \geq 0; \big|; |X_t| > n\big)$, $n \in \mathbb{N}$, eine lokalisierende Folge für (X_t), wie auch jede andere wachsende Folge von Stoppzeiten $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\rho_n \leq \sigma_n$. und $\rho_n \to \infty$ P-f.s. Man kann also o.B.d.A. $(X_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ und τ_n als beschränkt voraussetzen für alle $n \in \mathbb{N}$.

ii) Ist $X_t \geq 0$ für alle $t \geq 0$, so ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Supermartingal.