

## Übungen zur Vorlesung Stochastische Finanzmathematik II

Abgabe bis Do. 5.6. zu Beginn der Vorlesung (bzw. Übung)

**Serie 7** (Version vom 29. Mai 2013)

- 1) Seien  $M, N \in \mathcal{M}^2$ . Zeigen Sie: Für alle Stoppzeiten  $\tau$  und alle  $t \geq 0$  gilt

$$\langle M, N^\tau \rangle_t = \langle M, N \rangle_{\tau \wedge t} \quad P\text{-f.s.},$$

wobei  $N^\tau$  das gestoppte Martingal  $(N_{\tau \wedge t})_{t \geq 0}$  ist. Insbesondere gilt  $\langle N^\tau \rangle = \langle N \rangle^\tau$ .

- 2) Berechnen Sie für eine Brownsche Bewegung  $W$  jeweils möglichst explizit die Varianz von

$$\int_0^t |W_s|^p dW_s \quad \text{und} \quad \int_0^t (W_s + s)^2 dW_s \quad (t, p > 0).$$

Dabei können  $p$ -te Momente der Normalverteilung mittels der Gammafunktion  $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ ,  $t > -1$ , angegeben werden.

- 3) Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

Ein Prozess  $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  heisst *progressiv messbar*, falls für jedes  $t \geq 0$  die Einschränkung  $X|_{\Omega \times [0, t]}$  von  $X$  auf  $\Omega \times [0, t]$   $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0, t])$ -messbar ist.

Zeigen Sie

- i) Ist  $X$  progressiv messbar und  $\tau$  eine Stoppzeit, so ist der gestoppte Prozess  $X^\tau := (X_{\tau \wedge t})_{t \geq 0}$  wieder progressiv messbar.
- ii) Jeder previsible Prozess  $X$  is progressiv messbar.

- 4) Seien  $B^1$  und  $B^2$  zwei Brownsche Bewegungen auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  mit  $\langle B^1, B^2 \rangle_t = \int_0^t \rho_s ds$  für einen previsible Prozess  $\rho$  mit Werten in  $[-1, 1]$ . Man sagt dann, dass  $B^1$  und  $B^2$  zwei korrelierte Brownsche Bewegungen mit Korrelationsprozess  $\rho$  sind.

Zeigen Sie: Ist  $\rho$  deterministisch und gilt  $\int_0^T \frac{1}{1-\rho_s^2} ds < \infty$ , dann sind durch

$$dW_t^1 = dB_t^1 \quad \text{und} \quad dW_t^2 = \sqrt{\frac{1}{1-\rho_t^2}} (dB_t^2 - \rho_t dB_t^1)$$

zwei unabhängige Brownsche Bewegungen  $W^1$  und  $W^2$  gegeben.

Sind umgekehrt zwei unabhängige Brownsche Bewegungen  $W^1, W^2$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  gegeben, dann definieren

$$dB_t^1 = dW_t^1 \quad \text{und} \quad dB_t^2 = \rho_t dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho_t^2} dW_t^2$$

zwei korrelierte Brownsche Bewegungen mit Korrelationsprozess  $\rho$ .