Zeitstetige Markov-Prozesse: Einführung und Beispiele

Simone Wielart

08.12.10

Inhalt

Inhalt

Inhalt

Definition

Sei I eine abzählbare Menge. $Q := (q_{ij})_{i,j \in I}$ heißt Q-Matrix, wenn für alle $i \in I$

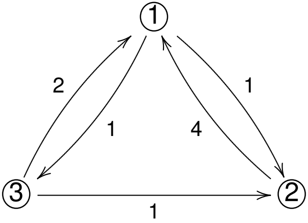
i) $0 \leq -q_{ii} < \infty$

ii) $q_{ij} \geq 0$ *für* $i \neq j, j \in I$

iii) $\sum_{j \in I} q_{ij} = 0.$

Beispiele

Die Markov-Kette



hat die Q-Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zusammenhang zwischen Q-Matrix und stochastischer Matrix

Satz

Sei Q eine Matrix auf einer endlichen Menge I. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) *Q ist eine Q-Matrix*

ii) *$P(t) = \exp(t \cdot Q)$ ist für alle $t \geq 0$ eine stochastische Matrix.*

Bedeutung für zeitstetige Markov-Ketten folgt

Definition

Sei I eine abzählbare Menge. Eine Familie von ZV'en $X_t : \Omega \to I$, $t \in [0, \infty)$, heißt zeitstetiger stochastischer Prozess mit Werten in I. Schreibweise: $(X_t)_{t \geq 0}$

Bemerkung

Betrachten rechtsstetige Prozesse, d.h.

$$\forall \omega \in \Omega, t \geq 0 \exists \varepsilon > 0 : X_s(\omega) = X_t(\omega)$$

für $t \leq s \leq t + \varepsilon$

Definition

- *Sprungzeit:* J_n, $n \in \mathbb{N}_0$, *mit* $J_0 = 0$ *und*

$$J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n : X_t \neq X_{J_n}\} \quad \forall n \geq 1,$$

  wobei wir $\inf \emptyset := \infty$ *setzen. Wenn* $J_{n+1} = \infty$ *für ein* $n \in I$ *gilt, so setzen wir* $X_\infty := X_{J_n}$.
- *Sprungkette:* $(Y_n)_{n \geq 0}$ *mit* $Y_n = X_{J_n}$
- *Verweildauer:* S_n, $n \in \mathbb{N}$, *mit*

$$S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{wenn } J_{n-1} < \infty \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

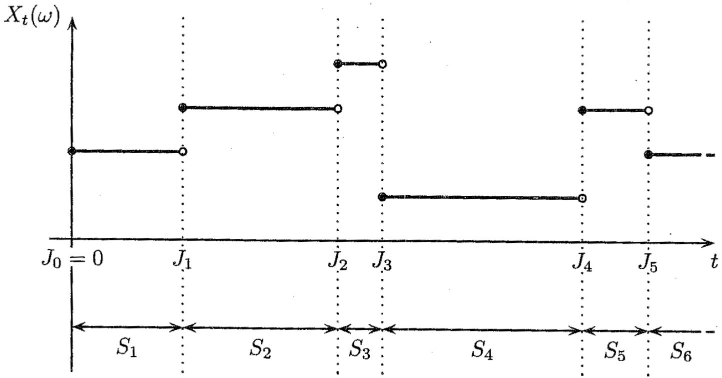


Abbildung: Beispielprozess aus Norris, S.68

Definition

Ein rechtsstetiger Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ *mit Werten in* $\mathbb{N}_0$ *heißt Poisson-Prozess der Intensität* λ, $0 < \lambda < \infty$, *wenn*

i) $S_n \overset{iid}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$,

ii) *die Sprungkette* $(Y_n)_{n\geq 0}$ *ist gegeben durch*

$$Y_n := X_{J_n} = n.$$

Das zugehörige Diagramm ist

$$\textcircled{0} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{1} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{2} \xrightarrow{\lambda} \textcircled{3} \cdots\cdots ,$$

die *Q*-Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ & -\lambda & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \end{pmatrix}.$$

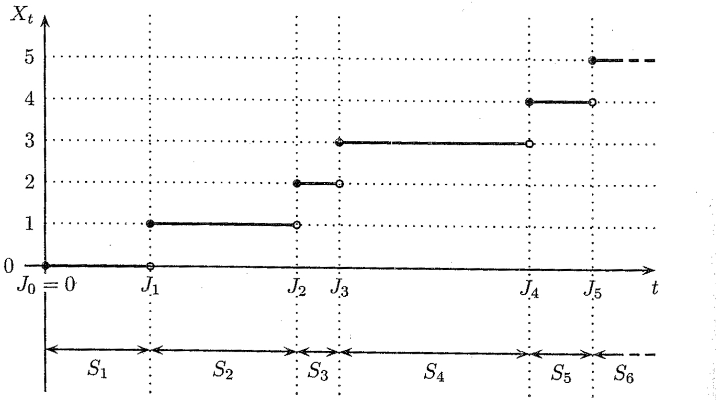


Abbildung: Poisson-Prozess aus Norris, S.74

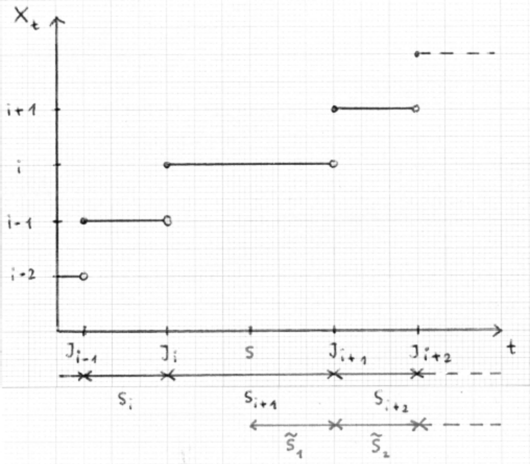
Markov-Eigenschaft

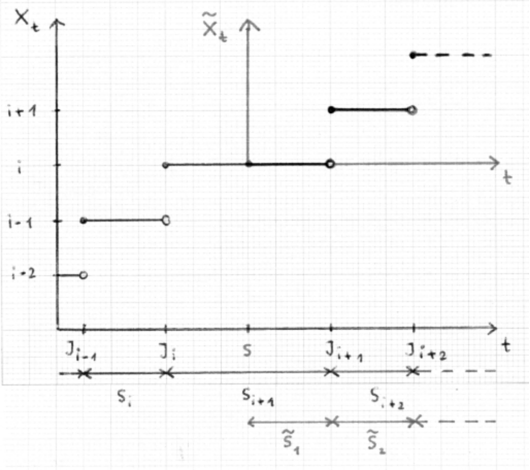
Satz

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess der Intensität λ. Für jedes $s \geq 0$ ist dann $(X_{s+t} - X_s)_{t\geq 0}$ ein Poisson-Prozess der Intensität λ und unabhängig von $(X_r)_{r\leq s}$.

Beweis.

s. Tafel $\square$


X_t
$i+1$
i
$i-1$
$i-2$
J_{i-1}
J_i
s
J_{i+1}
J_{i+2}
t
S_i
S_{i+1}
S_{i+2}
$\tilde{S}_1$
$\tilde{S}_2$


X_t
$\tilde{X}_t$
$i+1$
i
$i-1$
$i-2$
t
J_{i-1}
J_i
S
J_{i+1}
J_{i+2}
t
S_i
S_{i+1}
S_{i+2}
$\tilde{S}_1$
$\tilde{S}_2$

Beispiele

Beschreibung von zufälligen, in der Zeit gleichmäßig verteilten Ereignissen, wie

- *Schadensfälle einer Versicherungsgesellschaft*
- *Zerfall von Atomen*
- *ankommende Gespräche bei einer Telefonzentrale*
- *Eintreffen neuer Kunden an der Supermarktkasse*

Definition

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ *ein* $\mathbb{R}$*-wertiger Prozess.*

- $X_t - X_s$ *heißt Inkrement über dem Intervall* $(s, t]$
- *stationäre Inkremente: Verteilung von* $X_{s+t} - X_s$ *hängt nur von* $t \geq 0$ *ab*
- *Inkremente unabhängig: Inkremente über jeder endlichen Menge disjunkter Intervalle sind unabhängig*

Satz

Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein wachsender, rechtsstetiger Poisson-Prozess der Intensität λ mit Werten in $\mathbb{N}_0$ der in 0 startet, $0 < \lambda < \infty$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) *(Sprungzeiten-/Verweildauerdefinition)*
b) *(Infinitesimaldefinition) $(X_t)_{t\geq 0}$ hat unabhängige Inkremente und für kleine $h \geq 0$ gilt*

$$\mathbb{P}[X_{t+h} - X_t = 0] = 1 - \lambda \cdot h + o(h),$$
$$\mathbb{P}[X_{t+h} - X_t = 1] = \lambda \cdot h + o(h).$$

c) *(Definition mit Hilfe von Übergangswahrscheinlichkeiten) $(X_t)_{t\geq 0}$ hat stationäre und unabhängige Inkremente und $X_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda \cdot t)$ für alle $t \geq 0$.*

Algorithmus zur Bestimmung von Sprungzeiten bis zum Zeitpunkt T

1. $t = 0$, $n = 0$,
2. Generiere Zufallszahl U,
3. Setze $t = t - \frac{1}{\lambda} \log(U)$, stoppe, falls $t > T$,
4. $n = n + 1$, $J_n = t$,
5. Wieder zu 2.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!