

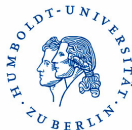
Stochastik–Praktikum

Varianzreduktions Methoden bei Monte Carlo

Dirk Becherer

Humboldt-Universität zu Berlin

WS 2011/12



Übersicht

- 1 Konfidenzintervalle bei Monte Carlo
- 2 Antithetic Variates
- 3 Control Variates
- 4 Importance Sampling

Übersicht

- 1 Konfidenzintervalle bei Monte Carlo
- 2 Antithetic Variates
- 3 Control Variates
- 4 Importance Sampling

Genauigkeit von Monte Carlo Schätzern

- Ziel: Approximative Bestimmung von Erwartungswert $E[X]$ für integrierbare Zufallsvariable $X = h(Y)$ durch Monte Carlo Simulation, basierend auf i.i.d. Stichprobe $X_i = h(Y_i)$, $i = 1, \dots, n$ vom Umfang n .
- **Gewöhnlicher Monte Carlo Schätzer** für $E[X]$:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(Y_i)$$

- Wissen $\bar{X}_n \rightarrow E[X]$ f.s. für $n \rightarrow \infty$ (Starkes GdgZ)
- Wie gut ist die **zufällige** Approximation \bar{X}_n ?

Konfidenzintervalle

- Realisierte Fehler $E[X] - \bar{X}_n(\omega)$ ist unbekannt, wenn man M.C. benötigt.
- Ein $(1 - \alpha)$ - **Konfidenzintervall** ist ein Bereich $[a, b]$ als Funktion der Stichprobe $X_{1:n} := (X_1, \dots, X_m)$, welcher (vor Realisierung!) den unbekanntem Parameter $m_X := E[X]$ mit vorgegebener Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ umfasst:

$$P[a(X_{1:n}) \leq m_X \leq b(X_{1:n})] \geq 1 - \alpha$$

- Anwendungsbezogene Wahl des **Niveaus**, z.B. $1 - \alpha = 95\%$, 99% oder $99,99\%$ für akzeptierte Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 5\%$, 1% bzw. 0.01% .
- Bestimmung von (approximativen) Konfidenzintervallen ?

Konfidenzintervalle via ZGWS

- Zentraler Grenzwertsatz : $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist approximativ $\mathcal{N}(m_X, \sigma_X^2/n)$ -verteilt.
- \rightsquigarrow Grenzen des (kleinsten approx.) Konfidenzintervalles $[a, b]$ aus Quantilen $N(x)$ der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Normalverteilung:

$$a(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n - N\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

$$b(X_1, \dots, X_n) = \bar{X}_n + N\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{s_n}{\sqrt{n}}$$

- Dabei wird die i.a. unbekannte Varianz σ_X^2 erwartungstreu geschätzt durch $s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. (Matlab: std)
- **Konfidenzintervalllänge** skaliert mit $s_n/\sqrt{n} \approx \sigma_N/\sqrt{n}$
- Quantil Bsp: $N(1 - \alpha/2) = N(0.975) \approx 1.96$ für $\alpha = 5\%$

Übersicht

- 1 Konfidenzintervalle bei Monte Carlo
- 2 Antithetic Variates**
- 3 Control Variates
- 4 Importance Sampling

Antithetic Variates

Idee: Erzeuge i.i.d. Folge von Paaren von Zufallsvariablen

$$(X_i, \tilde{X}_i) = (h(Y_i), h(\tilde{Y}_i)), \quad i = 1, 2, \dots$$

so dass

- die antithetische Variablen \tilde{Y}_i bzw. \tilde{X}_i sich einfach (deterministisch) aus Y_i bzw. X_i erzeugen lassen,
- die **Paare** $(X_i, \tilde{X}_i) = (h(Y_i), h(\tilde{Y}_i))$ **i.i.d.** sind,
- X_i und \tilde{X}_i (bzw. Y_i und \tilde{Y}_i) diegleiche Verteilung haben, aber i.a. **nicht** unabhängig sind.
- Dann hat $X_i^{\text{av}} := \frac{1}{2}(X_i + \tilde{X}_i)$ den gleichen Erwartungswert:
 $E[X^{\text{av}}] = E[X] = E[h(Y)]$
- Der **Antithetische Monte Carlo** Schätzer dafür ist

$$\bar{X}_n^{\text{av}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{\text{av}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(h(Y_i) + h(\tilde{Y}_i))$$

Varianzreduktion durch Antithetic Variates

Beispiele: $\tilde{Y}_i := 1 - Y_i$ für $Y_i \sim U[0, 1]$ iid,
oder $\tilde{Y}_i := -Y_i$ für $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ iid.

Vorteile

- Die Paare zu erzeugen erfordert kaum extra Aufwand
- **Varianzreduktion** falls $\text{Var}(X^{\text{av}}) = \text{Var}((h(Y) + h(\tilde{Y}))/2)$ kleiner als $\text{Var}(X) = \text{Var}(h(Y))$ ist

$$\begin{aligned}\text{Var}(X^{\text{av}}) &= \frac{1}{2} \left(\text{Var}(h(Y)) + \text{Cov}(h(Y), h(\tilde{Y})) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\text{Var}(X) + \text{Cov}(X, \tilde{X}) \right)\end{aligned}$$

Varianzreduktion

Beispiele: $\tilde{Y}_i := 1 - Y_i$ für $Y_i \sim U[0, 1]$ iid,
oder $\tilde{Y}_i := -Y_i$ für $Y_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ iid.

Satz

Ist h monoton (wachsend oder fallend) und $\tilde{Y} = g(Y)$ für g fallend, dann $\text{Cov}(h(Y), h(\tilde{Y})) \leq 0$ und $\text{Var}(X^{\text{av}}) \leq \frac{1}{2} \text{Var}(X)$

Beweis:

$$2\text{Cov}(h(Y), -h(g(Y))) = \\ E[(h(Y_1) - h(Y_2))(-h(g(Y_1)) + h(g(Y_2)))] \geq 0$$

Beispiel für MC Antithetische Variablen

Beispiel: MC Simulation zur (testweisen) Berechnung von $E[X]$ für $X = \exp(Z)$ mit $Y = Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
Hier bereits bekannt $E[X] = \exp(1/2)$

Vergleich der Approximationsgüte vom einfachen MC Schätzer \bar{X}_n basierend auf X_1, \dots, X_n vs. antithetischen MC Schätzer \bar{X}_n basierend auf $X_1^{\text{av}}, \dots, X_n^{\text{av}}$ durch

- Längenverhältnis der 95%-Konfidenzintervalle
- also gleich Verhältnis der Standardabweichungen s_n

Matlab: Antithetic Variates Example

Variance reduction experiment with Antithetic Variates
 for $E[\exp(Z)]$ for Z standardnormal
 True expectation known =1.64872

PlainMC	:	log10(n)	MCmean	MCKI	KIwidth	
		2	1.181	[0.924, 1.438]	0.514	
		3	1.647	[1.512, 1.782]	0.271	
		4	1.661	[1.619, 1.704]	0.086	
		5	1.648	[1.635, 1.662]	0.026	
Antithetic	:	log10(n)	MCmean	MCKI	KIwidth	WidthRatioAntiVsPlain
		2	1.484	[1.330, 1.638]	0.308	5.995e-01
		3	1.647	[1.574, 1.721]	0.147	5.442e-01
		4	1.667	[1.642, 1.691]	0.049	5.707e-01
		5	1.650	[1.642, 1.657]	0.015	5.640e-01

Multivariater antithetische Variablen

Multivariater Fall : Sei $X = h(Y) = h(Y^1, \dots, Y^d)$.

Beispiele antithetischer Variablen:

- Für $Y = (Y^1, \dots, Y^d)$ mit $Y^i \sim U[0, 1]$ iid. ist antithetische Variable $\tilde{Y} = (1 - Y^1, \dots, 1 - Y^d)$
- Für $Y = (Y^1, \dots, Y^d)$ mit $Y^i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ iid. ist antithetische Variable $\tilde{Y} = -Y = (-Y^1, \dots, -Y^d)$

Analog zum univariaten Fall zeigt auch hier der antithetische MC Schätzer \bar{X}_n^{av} basierend auf Simulationen von

$$X^{\text{av}} = \frac{1}{2}(h(Y) + h(\tilde{Y}))$$

reduzierte Varianz im Vergleich zu \bar{X}_n , falls h monoton in allen Argumenten ist

Übersicht

- 1 Konfidenzintervalle bei Monte Carlo
- 2 Antithetic Variates
- 3 Control Variates**
- 4 Importance Sampling

Control Variates

Idee: Eine ähnliche Zufallsvariable X^{cv} , die **Kontrollvariable**, deren Erwartungswert man schon kennt, benutzen, und nur den Erwartungswert der Differenz $X - X^{cv}$ durch MC Simulation berechnen

⇒ Varianzreduktion falls $X - X^{cv}$ 'kleiner' als X ist.

Vereinfachter Fall (ohne Regressionsparameter b):

$$X' := X - (X^{cv} - E[X^{cv}]) \quad (1)$$

$$E[X'] = E[X] = E[X - X^{cv}] + E[X^{cv}] \quad (2)$$

$$\text{Var}[X'] = \text{Var}[X - X^{cv}] \quad (3)$$

Monte Carlo Schätzer für X' bzw. $X - X^{cv}$ liefert den CV-MC Schätzer für X

Control Variates

Allgemeiner nutzt man zusätzlich Regression mit $b \in \mathbb{R}$

$$X'_b := X - b(X^{\text{cv}} - E[X^{\text{cv}}])$$

$$E[X'_b] = E[X] = E[X - bX^{\text{cv}}] + bE[X^{\text{cv}}]$$

Die Wahl $b^* = \text{Cov}(X, X^{\text{cv}}) / \text{Var}(X^{\text{cv}})$ minimiert $\text{Var}(X_b)$

$$\text{Var}(X'_{b^*}) = \text{Var}(X) - (\text{Cov}(X, X^{\text{cv}}))^2 / \text{Var}(X^{\text{cv}}) \leq \text{Var}(X)$$

Varianzreduktion umso größer, je stärker X^{cv} korreliert zu X ist.

Ergebnis ist invariant unter affinen Transformationen

$X_2^{\text{cv}} = A + BX_1^{\text{cv}}$ ($B \neq 0$) der Kontrollvariablen.

Regressionsparameter Schätzen

Da in der Regel ist $b^* = Cov(X, X^{cv}) / Var(X^{cv})$ nicht bekannt, wird b^* als die Steigung der Least-Squares Regressionsgraden aus den Simulationswerten von X und X^{cv} geschätzt.

(Matlab: polyfit)

Beispiele versch. Control Variates

Ziel: Berechnung von $E[X]$ für

$$X = \exp\left(\frac{1}{2}(Z + \sqrt{Z^2 + 0.1})\right)$$

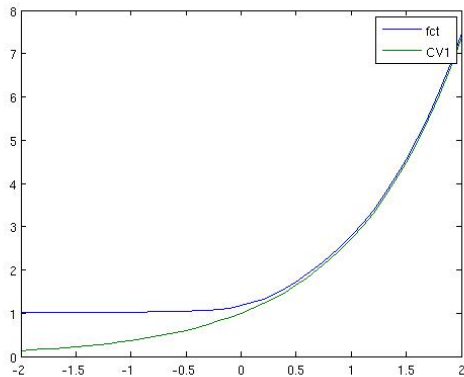
für $Z \mathcal{N}(0, 1)$ -normalverteilt.

Verschieden mögliche Kontrollvariablen

- $X_1^{\text{cv}} = \exp(Z)$
- $X_2^{\text{cv}} = 5 * X_1^{\text{cv}} + 2 = 5 * \exp(Z) + 2$
- $X_3^{\text{cv}} = 1 + \max(0, \exp(Z) - 1) = 1 + (\exp(Z) - 1)^+$

Erwartungswerte analytisch berechenbar (aus Laplace Transformierter bzw. aus 'Black-Scholes-Formel' für Call-Preise).

Beispiel Control Variates



Matlab: Beispiel Control Variates 1 u 2

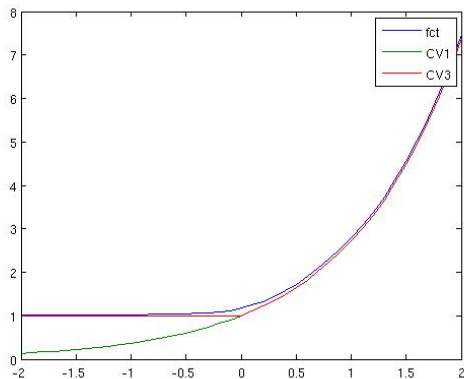
Control Variate 1: $\log_{10}(n)$	MCmean	MCKI	KIwidth	WidthRatioCvVsPlain
2	1.994	[1.930, 2.057]	0.1269	7.181e-02
3	1.963	[1.947, 1.978]	0.0311	1.029e-01
4	1.955	[1.951, 1.960]	0.0093	1.136e-01
5	1.956	[1.955, 1.958]	0.0029	1.152e-01

Press key

Check: Identical results for affine transform control variate $CV2=5*CV1-2$:

Control Variate 2: $\log_{10}(n)$	MCmean	MCKI	KIwidth	WidthRatioCvVsPlain
2	1.994	[1.930, 2.057]	0.1269	7.181e-02
3	1.963	[1.947, 1.978]	0.0311	1.029e-01
4	1.955	[1.951, 1.960]	0.0093	1.136e-01
5	1.956	[1.955, 1.958]	0.0029	1.152e-01

Beispiel: weitere Control Variate



Übersicht

- 1 Konfidenzintervalle bei Monte Carlo
- 2 Antithetic Variates
- 3 Control Variates
- 4 Importance Sampling**

Importance Sampling

nächstes Mal...

Literatur

- Sheldon Ross, Simulation, Academic Press, 2006
- Paul Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, 2004