Übungsblatt 2

Differentialgeometrie 1
HU Berlin, Wintersemester 2015/16 (Belgun)

22.10.2015

1. (a) Seien M, N, P C^∞ Mannigfaltigkeiten und $f : M \to N$, $g : N \to P$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen Sie:
   i. Sind f und g Immersionen, bzw. Submersionen, dann ist $g \circ f$ eine Immersion, bzw. Submersion.
   ii. Ist $g \circ f$ ein lokaler Diffeomorphismus, dann ist g eine Submersion und f eine Immersion.

   (b) Sei P eine Untermannigfaltigkeit in N und N eine Untermannigfaltigkeit in M. Zeigen Sie, P ist eine Untermannigfaltigkeit in M.

   (c) Seien $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ die Einheitssphäre und $\mathbb{CP}^n$ der komplexe projektive Raum. Sei $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ die Einschränkung der kanonischen Projektion von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0$ auf $\mathbb{CP}^n$. Zeigen Sie, π ist eine Submersion und $\pi^{-1}(L)$ ist diffeomorph zum Einheitskreis S^1, für $L \in \mathbb{CP}^n$.

2. Sei $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ und sei T^n die Faktorgruppe $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, oder, äquivalenter Weise, der Quotientenraum $\mathbb{R}^n/\sim$, wobei $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}^n$. T^n heißt der n-dimensionale Torus. Sei $\pi : \mathbb{R}^n \to T^n$ die natürliche Projektion.

   (a) Zeigen Sie, T^n, mit der Quotiententopologie, ist ein kompakter Hausdorff-Raum.

   (b) Konstruieren Sie einen C^∞ Atlas auf T^n, so dass π ein lokaler Diffeomorphismus ist.

   (c) Zeigen Sie, T^n ist diffeomorph zum n-fachen Produkt von Kreisen $S^1 \times ... \times S^1$.

   (d) Zeigen Sie, die Menge

   $$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

   ist eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$, die diffeomorph zu T^2 ist.

Abgabe am 30.10.2015 vor der Vorlesung.