Einführung in die Approximationstheorie
Prof. Schröder

Sommersemester 2012

Vorlesungsmitschriften[1] Paul Boeck

Zuletzt geändert am 22. August 2012

Fehler bitte an

boeck@math.hu-berlin.de

Inhaltsverzeichnis

[1] Diese Mitschriften sind nicht von Prof. Schröder korrigiert und als *work in progress* zu verstehen

1. Approximation in linearem Räumen

Es sei $(R, |\cdot|)$ ein linearer, normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit der Metrik $\delta(f,g) := |f-g|$ für $f, g \in R$. Ferner, sei $U \subset R$ ein Unterraum.

Definition 1.1
Es sei $g_0 \in U$ mit $|f - g_0| = \inf_{g \in U} |f-g| =: \delta(f,U)$. Dann heißt g_0 ein Proximum *zu f.*

Proximum in endlich dimensionalen Unterräumen

Satz 1.2
Es sei $n := \dim U < \infty$. Dann existiert zu jedem $f \in R$ ein Proximum in U.

Beweis: Es sei $T := \{g \in U \mid |g| \leq 2|f|\} \subset U$. Dann ist wegen $0 \in T$

$$\delta(f,T) \leq |f - 0| = |f|$$

Für $g \in U \setminus T$ ist $|g| > 2|f|$ und deshalb gilt

$$|f-g| \geq |g| - |f| > |f| \geq \delta(f,T) \implies \delta(f,U) = \delta(f,T)$$

T ist beschränkt und abgeschlossen. Als Teilmenge eines endlich dim. Raumes ist T damit kompakt. Da $g \mapsto |f-g|$ stetig ist, existiert ein $g_0 \in T$ mit $|f-g_0| = \delta(f,T) = \delta(f,U)$. Also ist g_0 ein Proximum. □

Eine Anwendung ist die Bestimmung von Normen in endlich dimensionalen Räumen.

Satz 1.3
Es sei $n := \dim U < \infty$ und $h_1, \dots, h_n$ eine Basis zu U. Ferner, $U_k := \operatorname{span}\{h_1, \dots, h_n\} \setminus \{h_k\}$. Für $g := \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu h_\nu$ und $1 \leq k \leq n$ gilt dann

$$|\alpha_\nu| \leq \frac{|g|}{\delta(h_k, U_k)} \tag{*}$$

Ferner gilt für die Norm $|g|_* := \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k|$, dass $|g| \leq \gamma |g|_*$ und $|g|_* \leq \gamma_* |g|$ mit $\gamma = \sum_{\nu=1}^n |h_\nu|$ und $\gamma_* = \max_{1\leq k \leq n}\left(\frac{1}{\delta(h_k,U_k)}\right)$.

Beweis: Für $\alpha_k \neq 0$ ist

$$|g| = |\alpha_k h_k + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^n \alpha_\nu h_\nu| = |\alpha_k||h_k - q_k| \quad \text{mit} \quad q_k := -\sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^n \frac{\alpha_\nu}{\alpha_k} h_\nu \in U_k$$

gilt $|g| \geq |\alpha_k|\delta(h_k, U_k)$. Nach Satz 1.2 existiert ein Proximum $q_k \in U_k$ zu h_k. Wegen $q_k \neq h_k$ ist $\delta(h_k, U_k) = |h_k - q_k| > 0$ woraus (*) folgt. Ferner ist

$$|g| \leq \sum_{\nu=1} n|\alpha_\nu||h_\nu| \leq |g|_* \underbrace{\sum_{\nu=1}^n |h_\nu|}_{\gamma} \quad \text{sowie} \quad |g|_* = \max_{1\leq k\leq n} |\alpha_k| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \frac{|g|}{\delta(h_k, U_k)}$$

□

Hinreichendes Kriterium für ein Proximum über maximale Funktionale

Es sei R^* der zu R *duale Raum*, d.h.

$$R^* := \{\varphi : R \to \mathbb{K} \mid \varphi \text{ stetig und linear}\}$$

mit der Norm $|\varphi| := \sup\limits_{\substack{f \in R \\ |f|=1}} |\varphi(f)|$. Ferner sei

$$U^\perp := \{\varphi \in R^* \mid \forall g \in U : \varphi(g) = 0\}$$

das *orthogonale Komplement* von U.

Satz 1.4
Für alle $\varphi \in U^\perp$ und $f \in R$ gilt

$$|\varphi(f)| \leq |\varphi|\delta(f, U)$$

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Dann ex. $g \in U$ mit $|f - g| \leq \delta(f, U) + \varepsilon$. Wegen $\varphi(g) = 0$ ist damit

$$|\varphi(f)| = |\varphi(f - g)| \leq |\varphi||f - g| \leq |\varphi|\delta(f, U) + \varepsilon$$

Da ε beliebig gewählt wurde, folgt die Behauptung. □

Definition 1.5
$\varphi_0 \in U^\perp$ *heißt* maximales lineares Funktional *zu* (f, U)*, falls* $|\varphi_0| \leq 1$ *und* $|\varphi_0(f)| = \delta(f, U)$*.*

Satz 1.6
Es sei $g_0 \in U$, $\varphi_0 \in U^\perp$ mit $|\varphi_0| \leq 1$ und $|\varphi_0(f)| = |f - g_0|$. Dann ist φ_0 ein max. lin. Funktional zu (f, U) und g_0 ein Proximum zu f.

Beweis: Aus Satz 1.4 folgt $|f - g_0| = |\varphi_0(f)| \leq |\varphi_0|\delta(f, U) \leq \delta(f, U)$. Da $|f - g_0| \geq \delta(f, U)$ ist φ_0 ein max. lin. Funktional. Außerdem ist $|f - g_0| = \delta(f, U)$, also ist g_0 ein Proximum zu f. □

Satz 1.7
Zu jedem (f, U) mit $f \in R$ und $U \subset R$ existiert ein maximales lineares Funktional $\varphi_0 \in U^\perp \subset R^*$.

Beweis: Für $\delta(f, U) = 0$ ist $0 \in R^*$ maximal. Es sei $\delta(f, U) > 0$. Ferner, sei V die lineare Hülle von $\{f\} \cup U$, d.h.

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, h_i \in U \cup \{f\}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Dann ex. zu jedem $h \in V$ ein eindeutiges $\alpha(h) \in \mathbb{K}$ und ein $g \in U$ mit $h = \alpha(h)f + g$ (wobei α eindeutig ist, denn wenn $\alpha f + g = \alpha^* f + g^*$, dann $(\alpha - \alpha^*)f = g^* - g \implies f \in U \implies \delta(f, U) = 0$ ↯). Es sei $\hat{\varphi}(h) = \alpha(h)\delta(f, U)$, dann ist $\hat{\varphi}(f) = \delta(f, U)$ und $\hat{\varphi}(h) = 0$ für alle $h \in U$. Zudem ist für $\alpha \neq 0$

$$|\hat{\varphi}(h)| = |\alpha|\delta(f, U) \leq |\alpha||f - \underbrace{(-\alpha^{-1})}_{\in U} g| = |\alpha f + g| = |h|$$

also $|\hat{\varphi}| \leq 1$. Nach dem

Satz (Fortsetzungssatz von Hahn-Banach)
X norm. Raum, $U \subset X$ Unterraum. Dann

$$\forall u' \in U^* : \exists x' \in X^* : x'\Big|_U = u' \quad |x'| = |u'|$$

existiert ein $\varphi_0 \in R^*$ mit $|\varphi_0| = |\hat{\varphi}| \leq 1$ und $\varphi_0(h) = \hat{\varphi}(h)$ für alle $h \in V$. Also gilt insbesondere $\varphi_0 \in h^\top$ und $\varphi_0(f) = \delta(f, U)$. Damit ist φ_0 ein max. lineares Funktional. □

Definition (Reflexivität)
*Sei X ein normierter Vektorraum. Die Abbildung $i_X : X \to X^{**} := (X^*)^*$ (*Bidualraum*) mit*

$$(i_X(x))(x') := x'(x) \quad \textit{für} \quad x \in X \quad \textit{und} \quad x' \in X^*$$

ist eine lineare Isometrie *(d.h. $|i_X(x)| = |x|$) und wird* kanonische Abbildung *genannt. Diese ist injektiv aber i.A. nicht surjektiv.*

X heißt reflexiv, *falls i_X surjektiv ist. (Insbesondere ist X dann ein Banachraum). Da i_X eine bijektive Isometrie ist, gilt $X \cong X^{**}$, d.h. jedes $x'' \in X^{**}$ kann mit genau einem $x \in X$ identifiziert werden.*

Lemma 1.8
Es sei R reflexiv und U abgeschlossen. Dann ist $U = U^{\perp\perp} := (U^\perp)^\perp$.

Beweis: Es sei $h \in U$ und $\varphi \in U^\perp$. Dann ist $(i_R(h))(\varphi) = \varphi(h) = 0$. Daher ist $i_R(h) \in U^{\perp\perp}$, also $h \in U^{\perp\perp}$.

Es sei $h \in U^{\perp\perp}$. Dann ex. nach Satz 1.7 ein max. lineares Funktional, $\varphi_0 \in U^\perp$ mit $\delta(h, U) = |\varphi_0(h)| = |(i_R(h))(\varphi_0)| = |\varphi_0(h)| = 0$. Aus der Abgeschlossenheit von U folgt dann $h \in U$. □

Satz 1.9
Es sei R reflexiv und U abgeschlossen. Dann existiert zu jedem $f \in R$ ein Proximum.

Beweis: Für $\delta(f, U) = 0$ folgt $f \in U$ aus der Abgeschlossenheit von U. Sei also $\delta(f, U) > 0$. Nach Satz 1.7 ex. max. lineare Funktionale $\varphi_0 \in U^\perp$ zu (f, U) sowie $h_0 \in V_f^\perp$ mit $V_f := \{\psi \in U^\perp \mid \psi(f) = 0\}$ zu (φ_0, V_f). Es ist $\delta(\varphi_0, V_f) = 1$ und $0 \in V_f$ ist ein Proximum zu φ_0 (Übungsaufgabe). Damit ist

$$|\varphi_0(h_0)| = \delta(\varphi_0, V_f) = 1 \quad \text{also} \quad 1 \geq |h_0| = \sup_{\substack{\varphi \in R^* \\ |\varphi|=1}} |\varphi(h_0)| \geq 1 \implies |h_0| = 1$$

Da $f \in V_f^\perp$, ist $g_0 = f - \frac{\operatorname{sign}\varphi_0(h_0)}{\operatorname{sign}\varphi_0(f)} \cdot \delta(f, U) h_0 \in V_g^\perp \implies \operatorname{sign}\varphi_0(f)\varphi_0(g_0) = 0$. Für $\varphi \in U^\perp$ und $\psi = \varphi - \operatorname{sign}(\varphi_0(f)) \cdot \frac{\varphi(f)}{f(f,U)} \varphi_0$. Dann ist

$$\psi(f) = \varphi(f) - \operatorname{sign}(\varphi_0(f)) \frac{\varphi(f)}{\delta(f, U)} \varphi_0(f) = 0 \implies \psi \in V_f$$

Also $\varphi(g_0) = \psi(g_0) + \operatorname{sign}(\varphi_0(f)) \cdot \frac{\varphi(f)}{\delta(f,U)} \cdot \varphi_0(g_0) = 0$ und damit $g_0 \in U^{\perp\perp} = U$ nach Lemma 1.8. Wegen $|f - g_0| = |\delta(f, U) h_0| = \delta(f, U)$ folgt, dass g_0 ein Proximum zu f ist. □

Eindeutigkeit des Proximums, Stetigkeit

Beispiel (für nicht eindeutige Proxima) $R = \mathbb{R}^2$, $|\xi_1, \xi_2| = |\xi_1| + |\xi_2|$, $U := \{(\xi, \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$. $f = (1, -1)$, $|f - (\xi, \xi)| = |1 - \xi| + |-1 - \xi| \geq 2$. $|f - (\xi, \xi)| = 2$ falls $|\xi| \leq 1 \implies \delta(f, U) = 2$.

Satz 1.10
Die Menge $M(f, U)$ der Proxima von $f \in R$ in U ist konvex.

Beweis: $M(f, U) = U \cap \{h \in R \mid |f - h| \leq \delta(f, U)\}$. □

Definition 1.11
R heißt strikt konvex, *falls* $|\frac{1}{2}(h_1 + h_2)| < 1$ *für alle* $h_1, h_2 \in R$ *mit* $h_1 \neq h_2$, $|h_1| = |h_2| = 1$.

Satz 1.12
Ist R strikt konvex, dann existiert zu jeden $f \in R$ höchstens ein Proximum in U.

Beweis: Annahme: Es existieren Proxima $g_1, g_2 \in U$ zu f mit $g_1 \neq g_2$. Da die Menge d. Proxima konvex ist, gilt $|f - (\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}g_2)| = \delta(f, U) =: \delta$. Damit ist $|\frac{1}{2\delta}(f - g_1) + \frac{1}{2\delta}(f - g_2)| = 1$, also $\lightning$ zur Konvexität. □

Definition 1.13
R heißt uniform konvex, *falls* $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta(\varepsilon) > 0 : \forall h_1, h_2 \in R$ *mit* $|h_1| = |h_2| = 1$ *gilt, dass*

$$|h_1 - h_2| > \varepsilon \implies |\frac{1}{2}(h_1 + h_2)| \leq 1 - \eta(\varepsilon)$$

$$\text{oder} \quad |\frac{1}{2}(h_1 + h_2)| > 1 - \eta(\varepsilon) \implies |h_1 - h_2| \leq \varepsilon$$

Beispiel Jeder Hilbertraum ist uniform konvex (Übungsaufgabe).

Satz 1.14
Es sei R ein uniform konvexer Banachraum sowie $U \subset R$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann existiert zu jedem $f \in R$ genau ein Proximum $g = P(f) \in U$. Die Abb. $P : R \to U$ ist stetig.

Lemma 1.15
Es sei R uniform konvex und $f \in R$, so dass für $\delta = \delta(f, U)$. Für alle $\varepsilon > 0$ ex. ein $\alpha(\varepsilon) > 0$, so dass für $g_1, g_2 \in U$ mit $|f - g_i| < \delta + \alpha(\varepsilon), i = 1, 2$ gilt $|g_1 - g_2| < \varepsilon(1 + \delta)$.

Beweis: (i) Für $\delta < \frac{\varepsilon}{4}$ und $\alpha(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{4}$.

$$|g_1 - g_2| \leq |f - g_1| + |f - g_2| \leq 2\delta + 2\alpha(\varepsilon) < \varepsilon \leq \varepsilon(1 + \delta)$$

(ii) Für $\delta \geq \frac{\varepsilon}{4}$ und $\alpha(\varepsilon) > 0$ sowie $g_1 \neq g_2$ (für $g_1 = g_2$ gilt offensichtlich die Behauptung). Außerdem sei o.B.d.A. $|f - g_1| \geq |f - g_2|$. Die Abbildung $\lambda \mapsto |f - (g_1 + \lambda(g_2 - g_1)|$ ist stetig in λ, liefert für $\lambda = 1$ den Wert $|f - g_2|$ und wächst über alle Grenzen für $\lambda \to \infty$.

Nach Zwischenwertsatz existiert ein $\lambda' \geq 1$, so dass für $g_3 := g_1 + \lambda'(g_2 - g_1) \in U$ gilt: $|f - g_3| = |f - g_1| =: \gamma$ mit $0 < \gamma \leq \delta + \alpha(\varepsilon) \leq \delta + 1$, sofern $\alpha \leq 1$. Es sei

$h_1 = \frac{1}{\gamma}(f - g_1), h_2 = \frac{1}{\gamma}(f - g_3)$. Wegen $\frac{1}{2}(g_1 + g_3) \in U$ ist $|f - \frac{1}{2}(g_1 + g_3)| \geq \delta$ und damit

$$|\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2)| = \tfrac{1}{\gamma}|f - \tfrac{1}{2}(g_1 + g_3)| \geq \tfrac{\delta}{\gamma} > \tfrac{\delta}{\delta + \alpha} \geq \frac{\frac{\varepsilon}{4}}{\frac{\varepsilon}{4} + \alpha} \geq 1 - \eta(\varepsilon)$$

sofern $\alpha(\varepsilon) \leq \frac{\frac{\varepsilon}{4}\eta(\varepsilon)}{1-\eta(\varepsilon)}$. Aus der uniformen Konvexität folgt

$$\begin{aligned} |h_1 - h_2| < \varepsilon \implies |g_2 - g_1| &= |\tfrac{1}{\lambda'}(g_3 - g_1) + g_1 - g_3| \\ &= \tfrac{1}{\lambda'}|g_3 - g_1| \leq |g_3 - g_1| \\ &= |f - \gamma h_1 - (f - \gamma h_2)| = \gamma |h_1 - h_2| < \gamma\varepsilon \\ &< \varepsilon(\delta + 1) \end{aligned}$$

Die Behauptung für $\alpha(\varepsilon) = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4}\frac{\eta(\varepsilon)}{1-\eta(\varepsilon)}\right\}$ □

Lemma 1.16
Es sei $f_0, f_1 \in R$ *und* $g_1, g_2 \in U$ *mit* $|f_i - g_i| = \delta(f_i, U), i = 1, 2$. *Dann gilt* $|f_0 - g_1| \leq \delta(f_0, U) + |f_0 - f_1|$.

Beweis: Es gilt $|f_1 - g_1| \leq |f_1 - g_0| \leq |f_0 - g_0| + |f_0 - f_1| = \delta(f_0, U) + |f_0 - f_1|$ sowie $|f_0 - g_1| \leq |f_1 - g_1| + |f_1 - f_0| \leq \delta(f_0, U) + 2(f_0 - f_1)$. □

Beweis: (zu Satz 1.14) Es sei $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset U$ eine Folge mit $|f - g_k| \to \delta$. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\alpha(\varepsilon) > 0$ gemäß Lemma 1.15. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k, l \geq N$ gilt

$$|f - g_l| < \delta + \alpha(\varepsilon) \quad \text{und} \quad |f - g_l| < \delta + \alpha(\varepsilon)$$

Aus Lemma 1.15 folgt dann $|g_k - g_l| < \varepsilon(1 + \delta)$. Also ist $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge. Da R ein Banachraum ist, existiert ein $g_0 \in R$ mit $\lim_{k\to\infty} g_k = g_0$ abgeschlossen ist, folgt $g_0 \in U$. Aus der Stetigkeit d. Norm folgt, $|f - g_0| = \lim_{k\to\infty} |f - g_k| = \delta$. Aus Satz 1.12 folgt die Eindeutigkeit.

Noch zu zeigen: Die Abb. P ist stetig. Es sei $\varepsilon > 0$ und $\alpha := \alpha(\frac{\varepsilon}{\delta_0+1}) > 0$ gemäß Lemma 1.15 mit $\delta_0 = \delta(f_0, U)$. Für $|f_0 - f_1| \leq \frac{1}{2}\alpha$ erhält man $|f_0 - g_0| = \delta_0 \leq \delta_0 + \alpha$ und $|f_0 - g_1| \leq \delta_0 + \alpha$ wegen Lemma 1.16. Damit folgt aus Lemma 1.15, dass $|g_0 - g_1| < \frac{\varepsilon}{1+\delta}(1 + \delta) = \varepsilon$ und damit die Stetigkeit P in f_0. □

Satz 1.17 (Stetigkeit von *P* ohne Konvexität)
Es sei $\dim U < \infty$ *und zu jedem* $f \in R$ *existiere genau ein Proximum* $P(f)$. *Dann ist* P *stetig.*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \forall f \in R : \exists \delta > 0 \forall f_0 \in R : |f - f_0| < \delta \implies P(f) - P(f_0)| < \varepsilon$$

Sei also $f_0 \in R$ mit $\delta_0 := \delta(f_0, U), g_0 := P(f_0)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $|f_0 - P(f)| \leq \delta_0 + 2|f - f_0|$ $(***)$ nach Lemma 1.16 sowie $|f_0| + \delta_0 + \varepsilon =: \rho$ sofern $|f - f_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $(**)$ da

$$|P(f)| - |f_0| \leq |f_0 - P(f)| \leq \delta_0 + 2|f - f_0|$$

Wegen $\dim U < \infty$ ist $T_\varepsilon := \{g \in U \mid |g| \leq \rho$ und $|g - g_0| \geq \varepsilon\}$ kompakt, da abgeschlossen und beschränkt. Außerdem ist $T_\varepsilon \neq \emptyset$ für $\dim U \geq 1$ (für $\dim U = 0$ ist P trivialerweise stetig.). Insbesondere existiert ein $g_1 \in T_\varepsilon$ mit $|f_0 - g_1| = \delta(f_0, T_\varepsilon)$. Aus $g_0 \notin T_\varepsilon$ folgt

$$|f_0 - g_1| \leq \delta_0 + \varepsilon \quad \text{zu zeigen!!!}$$

Daraus folgt $\delta(f_0, T_\varepsilon) - \delta_0 < \varepsilon$ $(*)$. Ferner ist $\delta(f_0, T_\varepsilon) > \delta_0$, da sonst $g_1 \neq g_0$ ein weiteres Proximum wäre, entgegen der Eindeutigkeit. Für $|f - f_0| < \frac{1}{2}(\delta(f, T_\varepsilon) - \delta_0)$ folgt aus $(*)$, dass $f - f_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Damit ist wegen $(**)$ $|P(f)| \leq \rho$ und wegen $(***)$

$$|f_0 - P(f)| < \delta_0 + 2\tfrac{1}{2}(\delta(f_0, T_\varepsilon) - \delta_0) = \delta(f_0, T_\varepsilon)$$

Schließlich ist $P(f) \notin T_\varepsilon$, also $|P(f) - g_0| < \varepsilon$. □

Approximiertheit

Satz 1.18
Es sei $|\cdot|$ abgeschlossen. Dann gilt

(i) $\delta(f, U) \geq 0$ *und* $\delta(f, U) = 0 \iff f \in U$.

(ii) $\delta(\alpha f, U) = |\alpha| \delta(f, U)$ *für alle* $f \in R$ *und* $\alpha \in \mathbb{K}$

(iii) $\delta(f_1 + f_2, U) \leq \delta(f_1, U) + \delta(f_2, U)$ *für alle* $f_1, f_2 \in R$

(iv) $\delta(f, U)$ *ist Norm im Faktorraum* $R/U := \{f + U \mid f \in R\}$, $f + U := \{f + g \mid g \in U\}$

(v) $|\delta(f_1, U) - \delta(f_2, U)| \leq |f_1 - f_2|$ *für* $f_1, f_2 \in R$

Beweis: Übungsaufgabe

Definition 1.19
Es sei $\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \ldots$ *mit*

(i) U_n *ist ein Unterraum von* R

(ii) $\dim U_n = n$

(iii) $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$

Ferner sei $\delta_n(f) := \delta(f, U_n)$. *Dann gilt*

$$|f| = \delta_0(f) \geq \delta_1(f) \geq \delta_2(f) \geq \ldots \geq \delta(f, U) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(f)$$

$f \in R$ *heißt* approximierbar, *falls* $\delta_n(f) \to 0$, *also* $\delta(f, U) = 0$ *ist.*

Alle Elemente aus R *sind genau dann approximierbar, wenn* $\overline{U} = R$, *d.h.* U *dicht in* R *ist.*

Eine Folge $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ *mit* $h_n \in U_n \setminus U_{n-1}$ *heißt* Basisfolge *und abgeschlossen in* R, *falls* $\overline{U} = R$ *gilt.*

Satz 1.20
Es gilt

(i) $\overline{U} = R$ *gilt genau dann, wenn* $U^\perp = \{0\}$

(ii) Eine Basisfolge $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist genau dann abgeschlossen, falls für ein $\varphi \in R^*$ mit $\varphi(h_n) = 0$ folgt, dass $\varphi = 0$ ist.

Beweis: Offenbar ist $\varphi(h_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn $\varphi \in U^{\perp}$. Dann damit folgt ii) aus i).

Zu i)

„$\Rightarrow$“ Es sei $\overline{U} = R$ und $\varphi \in U^{\perp}$. Dann folgt aus der Stetigkeit von φ, dass $\varphi(f) = 0$ für alle $f \in \overline{U}$ und damit $\varphi = 0$.

„$\Leftarrow$“ Angenommen, $\overline{U} \subsetneq R$. Dann existiert ein nicht approximierbares $f \in R$. Nach Satz 1.7 existiert ein maximales lineares Funktional $\varphi_0 \in U^{\perp}$ mit $|\varphi_0(f)|\delta(f, U) > 0$, also $\varphi_0 \neq 0$. □

Definition 1.21
Die Menge $F \subset R$ heißt gleichmäßig approximierbar, *wenn es eine Nullfolge $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \dots$ gibt, so dass $\delta_n(f) \leq \gamma_n$ für alle $f \in F$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Definition 1.22
$F \subset R$ heißt präkompakt, *falls jede Folge in F eine Teilfolge besitzt, die eine Cauchy-Folge ist.*

Lemma 1.23
$F \subset R$ ist genau dann präkompakt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ (Mittel-)Punkte $x_0, \dots, x_m \in R$ existieren, so dass $F \subset \bigcup_{i=1}^{m} K_\varepsilon(x_i)$ mit $K_\varepsilon(x) := \{y \in R \mid |y - x| < \varepsilon\}$

Beweis: Übungsaufgabe

Satz 1.24
Es sei $\overline{U} = R$ mit U wie in Definition 1.19. Dann ist F genau dann gleichmäßig approximierbar, falls F präkompakt.

Beweis: „$\Rightarrow$“ Es sei F gleichmäßig approximierbar und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein γ_0 und $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f| = \delta_0(f) \leq \gamma_0$ und $\delta_n(f) \leq \gamma_0 < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $f \in F$. Es sei $T := \{g \in U_n \mid |g| \leq 2\gamma_0\}$. Wie in Satz 1.2 existiert zu jedem $f \in F$ ein Proximum $g_f \in T$ mit $|f - g_f| < \frac{\varepsilon}{2}$. T ist kompakt, also existieren $x_0, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ mit $T \subseteq \bigcup_{\mu=1}^{m} K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_\mu)$. Für $f \in F$ ex. ein $i \in \{0, \dots, m\}$, so dass $g_f \in K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Offenbar ist $f \in K_\varepsilon(x_i)$. Also gilt $F \subseteq \bigcup_{i=0}^{m} K_\varepsilon(x_i)$.

„$\Leftarrow$“ Es sei umgekehrt F präkompakt. Da F beschränkt ist, ist

$$\gamma_n(F) := \sup_{f \in F} \delta_n(f) = \sup_{f \in F} \inf_{g \in U_n} |f - g| \leq \sup_{f \in F} |f| < \infty$$

Aus Definition 1.19 folgt $\gamma_0(F) \geq \gamma_1(F) \geq \cdots$. Aus der Präkompaktheit von F folgt, dass für $\varepsilon > 0$ Mittelpunkte $x_0, \dots, x_m \in R$ existieren mit $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} K_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Wegen $\overline{U} = R$ sind $x_0, \dots, x_m$ approximierbar, d.h. $\delta_n(x_i) \to 0$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Also existiert ein $n_i(\varepsilon)$, so dass $\delta_{n_i}(x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq n_i(\varepsilon)$. Es sei $n \geq \bar{n} := \max_{1 \leq i \leq m} n_i(\varepsilon)$ und $f \in F$ sowie $i \in \{0, \dots, m\}$ mit $|f - x_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist wegen Satz 1.18 (v)

$$\delta_n(f) \leq |\delta_n(f) - \delta_n(x_i)| + \delta_n(x_i) \leq |f - x_i| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

also $\delta_n(F) \leq \varepsilon$ und insbesondere $\gamma_n(F) \to 0$ für $n \to \infty$. □

Bemerkung 1.25 Die Folge der Schranken $\gamma_n(F)$ gibt ein Maß für die Approximierbarkeit von F an. Insbesondere gelten diese Schranken auch für $\hat{F} = \{f \in R \mid \delta_n(f) \leq \gamma_n(F), n \in \mathbb{N}\}$. Ist R ein Banachraum, so kann $\hat{F}$ von einem Element erzeugt werden, d.h. es existiert ein f^*, so dass $\hat{F} = \{f \in R \mid \delta_n(f) \leq \delta_n(\{f^*\}), n \in \mathbb{N}$. (Vgl. folgender Satz)

Satz 1.26
Es sei R ein Banachraum sowie $\overline{U} = R$ mit U wie in Definition 1.19. Dann ex. zu jeder monotonen Nullfolge $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \cdots$ ein f^* mit $\delta_n(f^*) = \gamma_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.27
Es sei $\{\gamma_n\}$ eine monotone Nullfolge. Dann existiert zu jedem $f \in R$ mit $\delta_n(f) \leq \gamma_n$ ein $f_n \in U_n$ mit $\delta_k(f + f_n) = \gamma_k$ für alle $0 \leq k < n$

Beweis: Induktion über n.

Für $n = 0$ ist die Aussage mit $f_n = 0$ erfüllt.

Es sei die Aussage für n bewiesen. Ferner sei $f \in R$ mit $\delta_{n+1}(f) \leq \gamma_{n+1} \leq \gamma_n$. Dann existiert nach Satz 1.2 ein Proximum $g_0 \in U_{n+1}$ zu f. Die Abbildung $\lambda \mapsto \delta_n(f - g_0 + \lambda h)$ für $h \in U_{n+1} \setminus U_n$ hat für $\lambda = 0$ den Wert

$$\delta_n(f - g_0) \leq |f - g_0| = \delta_{n+1}(f) \leq \gamma_n$$

Aus Satz 1.18 (ii,iii) folgt

$$\delta_n(f - g_0 + \lambda h) \geq |\lambda|\delta_n(h) - \delta_n(f - g_0)$$

Also wachsen die Funktionswerte gegen ∞ für $\lambda \to \infty$. Da δ_n stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\lambda' \geq 0$, so dass $\delta_n(\hat{f}) = \gamma_n$ mit $\hat{f} = f - g_0 + \lambda' h$. Nach Induktionsannahme existiert ein $f_n \in U_n$ mit $\delta_k(\hat{f} + f_n) = \gamma_k$ für $k < n$. Zudem ist $\delta_n(\hat{f} + f_n) = \delta_n(\hat{f}) = \gamma_n$, so dass zu f passend $f_{n+1} : -g_0 + \lambda' h + f_n \in U_{n+1}$ gewählt werden soll. □

Beweis: (Satz 1.26) Nach dem gerade gezeigten Lemma existiert ein $f_n \in U_n$ zu $f = 0$ mit $\delta_k(f_n) = \gamma_k$ für $k < n$ und 0 für $k \geq n$. Demnach ist $F := \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig approximierbar. Nach Satz 1.24 ist F präkompakt, d.h. es existiert eine Teilfolge $\{f_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$, die Cauchy-Folge ist. Da R vollständig ist, ex. ein Grenzwert $f^* \in R$ dieser Folge. Aus der Stetigkeit von δ_k folgt

$$\delta_k(f^*) = \lim_{i \to \infty} \delta_k(f_{n_i}) = \gamma_k$$

□

Bemerkung 1.28 Satz 1.26 zeigt, dass es für die Approximation in der Regel keine besonders günstige Folge von Unterräumen $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \cdots$ mit $\dim U_n = n$ und $\overline{U} = R$ gibt, da zu jeder (beliebig langsam) konvergierenden monotonen Nullfolge $\gamma_0 \geq \gamma_1 \geq \cdots$ stets ein f^* existiert mit $\delta_n(f^*) = \gamma_n$.

Approximation in Hilberträumen

Im Folgenden sei R ein Hilbertraum und $\{0\} \neq U \subseteq R$ sei abgeschlossen. Da R uniform konvex ist, existiert nach Satz 1.14 zu jedem $f \in R$ genau ein Proximum $P(f) \in U$. Zudem ist die Abbildung $P : f \mapsto P(f)$ stetig.

Satz 1.29

(i) $f - P(f) \in \{y \in R \mid \forall x \in U : (x, y) = 0\} = \tilde{U}$.

(ii) $f - g \in \tilde{U} \implies g = P(f)$

(iii) *P ist linear und es gilt* $|P| = \sup_{|f| \leq 1} |P(f)| = 1$.

(iv) $R = U \oplus \tilde{U}$

Beweis: Übungsaufgabe

Definition 1.30

P heißt orthogonale Projektion *und $f - P(f)$ heißt* Lot *von $f \in R$ auf U.*

Satz 1.31 (Darstellungssatz von Frechét-Riesz)

Zu jedem $h \in R^*$ existiert genau ein $f \in R$, so dass $h(x) = (f, x)$ für alle $x \in R$. Außerdem gilt $|f| = |h|$.

Beweis: Es sei $f \in R$ mit $h(x) = (f, x)$ für $x \in R$. Dann folgt aus der Cauchy-Schwarzen Ungleichung

$$|h| = \sup_{\substack{x \in R \\ |x|=1}} |h(x)| = \sup_{\substack{x \in R \\ |x|=1}} |(f, x)| \overset{\text{CS}}{\leq} \sup_{\substack{x \in R \\ |x|=1}} |f| \cdot |x| = |f|$$

$$|h| = \sup_{\substack{x \in R \\ |x|=1}} |h(x)| = \sup_{\substack{x \in R \\ |x|=1}} |(f, x)| \geq |(f, \tfrac{f}{|f|})| = |f| \quad \text{falls } f \neq 0$$

Also ist $|f| = |h|$. Insbesondere existiert höchstens ein $f \in R$ mit der gewünschten Eigenschaft.

Es sei $|h| = 1$. $U = \ker h$ ist ein abgeschlossener Unterraum. Ferner sei $f \in R$ mit $h(f) = 1$, dann ist $R = U \oplus \operatorname{span}\{f\}$. Nach Satz 1.29 iv) ist $R = U \oplus \tilde{U}$, also ist $\tilde{U} = \operatorname{span}\{f\}$. Es sei $x = u + \lambda f \in U \oplus \tilde{U}$, dann ist $h(x) = \lambda h(f) = \lambda$ sowie

$$(x, f) = (u + \lambda f, f) = \lambda |f|^2$$

□

Ferner ist

$$1 = |h| = \sup_{\substack{x \in R \\ |x|=1}} |h(x)| = \sup\{h(u + \lambda f) \mid u \in U, \lambda \in \mathbb{K}, |u|^2 + \lambda^2 |f|^2 = 1\}$$

$$= \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{K}, \lambda^2 |f|^2 = 1\} = \frac{1}{|f|}$$

$$\implies |f| = 1 \implies (x, f) = \lambda = h(x)$$

Bemerkung 1.32 Nach Satz 1.31 ist R isometrisch isomorph zu seinem Dualraum und kann demnach mit diesem normerhaltend identifiziert werden. Damit gilt insbesondere $\tilde{U} = U^\perp$. Für $y \in U^\perp$ schreibt man auch $y \perp U$.

Definition 1.33
Eine Basisfolge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt orthonormal*, wenn $|e_n| = 1$ und $e_n \perp U_{n-1}$ für $n = 1, \dots$ (in der Notation wie Definition 1.19).*

Satz 1.34
Es sei $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Basisfolge, dann gilt

(i) $(e_n, e_k) = \delta_{nk}$

(ii) $f_n = \sum_{\nu=1}^n (f, e_\nu) e_\nu$, *$f_n$ ist Proximum von f in U_n*

(iii) $|f|^2 = \delta_n^2(f) + \sum_{\nu=1}^n |(f, e_\nu)|^2$ (Parsevalsche Gleichung) *und es gilt die* Besselsche Ungleichung
$$|f|^2 \geq \sum_{\nu=1}^\infty |(f, e_\nu)|^2$$

(iv) *$\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann abgeschlossen (d.h. $\overline{U} = R$) falls die Parsevalsche Gleichung erfüllt ist*
$$|f|^2 = \sum_{\nu=1}^\infty |(f, e_\nu)|^2 \quad \text{für alle } f \in T \subseteq R,$$
wobei T dicht in R ist.

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung 1.35 Die Bedingung $\overline{U} = R$ ist unabhängig von der Wahl einer Basisfolge. Gilt also die Parsevalsche Gleichung für eine orthonormale Basisfolge, so folgt, dass jede Basisfolge abgeschlossen ist.

Generierung orthogonaler Basisfolgen über Gramsche Determinanten

Satz 1.36
Es sei $g_1, \dots, g_k \in R$. Dann heißt
$$G(g_1, \dots, g_k) = \begin{pmatrix} (g_1,g_1) & \cdots & (g_1,g_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_k,g_1) & \cdots & (g_k,g_k) \end{pmatrix} \quad \text{Gramsche Determinante.}$$

(i) $G(g_{p(1)}, \dots, g_{p(n)}) = G(g_1, \dots, g_k)$ *für jede Permutation p.*

(ii) $G(g_1, \dots, g_{k-1}, g_k + \lambda g_j) = G(g_1, \dots, g_k)$.

(iii) $G(\dots, \alpha g_j, \dots) = |\alpha|^2 G(g_1, \dots, g_k)$

(iv) $G(g_1, \dots, g_k) = |d|^2 G(g_1, \dots, g_{n-1})$ *für $d \in V^\perp$ mit $V = \mathrm{lin}(g_1, \dots, g_{k-1})$, $g_k = v + d$ und $v \in V$.*

(v) $G(g_1, \dots, g_k) \geq 0$, *Gleichheit gilt genau dann wenn $g_1, \dots, g_k$ linear abhängig.*

Beweis: Übungsaufgabe

Satz 1.37
Für die Basisfolge $h_1, h_2, \ldots$ gilt $\delta_n^2(f) = \dfrac{G(h_1, \ldots, h_n, f)}{G(h_1, \ldots, h_n)}$ für $f \in R$. Insbesondere ist die Basisfolge abgeschlossen, falls $\dfrac{G(h_1, \ldots, h_n, f)}{G(h_1, \ldots, h_n)} \to 0$ für alle $f \in T$ mit $T \subset R$ dicht.

Beweis: Wegen des letzten Satzes gilt $G(h_1, \ldots, h_n, f) = |d|^2 G(h_1, \ldots, h_n)$ mit $d \in U_n^\perp$, $f = v + d$ und $v \in U_n = \operatorname{lin}(h_1, \ldots, h_n)$. Nach Satz 1.29 und Bemerkung 1.32 ist v ein Proximum von f in U_n, also $\delta_n(f) = |f - v| = |d|$. Die zweite Behauptung folgt aus der Stetigkeit der Gramschen Determinante. □

Satz 1.38
Sei $h_1, \ldots, h_n$ eine Basisfolge sowie für $n \geq 2$

$$b_n := \begin{vmatrix} (h_1, h_1) & \ldots & (h_1, h_{n-1} & h_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (h_n, h_1) & \ldots & (h_n, h_{n-1}) & h_n \end{vmatrix} \quad \textit{als Entwicklung nach der letzten Spalte zu verstehen}$$

Dann ist $e_1, e_2, \ldots$ mit $e_1 = \frac{h_1}{|h_1|}$, $e_n = (\Delta_n \Delta_{n-1})^{-\frac{1}{2}} b_n$ und $\Delta_n := G(h_1, \ldots, h_n)$ für $n \geq 2$ eine orthonormale Basisfolge.

Beweis: Für $n \geq 2$ ist

$$(b_n, h_\nu) = \begin{vmatrix} (h_1, h_2) & \ldots & (h_1, h_{n-1}) & (h_1, h_\nu) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (h_n, h_1) & \ldots & (h_n, h_{n-1}) & (h_n, h_\nu) \end{vmatrix} = \begin{cases} G(h_1, \ldots, h_n) = \Delta_n & \text{für } \nu = n \\ 0 & \text{für } \nu < n \end{cases}$$

da für $\nu < n$ zwei gleiche Spalten auftreten. Damit ist $b_n \in U_n \cap U_{n-1}^\perp$. Ferner ist

$$|b_n|^2 = (b_n, b_n) = (b_n, \Delta_{n-1} h_n) = \Delta_{n-1}(b_n, h_n) = \Delta_{n-1}\Delta_n$$ □

2. Approximierbarkeit in speziellen Räumen

Es sei $\mathcal{C}[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig}\}$, ausgestattet mit der Norm $|f| := \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ ein Banachraum. Weiterhin sei

$$\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \mid f \text{ stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$$

ist normerhaltend isomorph zu $\tilde{\mathcal{C}}[0, 2\pi] := \{f \in \mathcal{C}[0, 2\pi] \mid f(0) = f(2\pi)\}$ und deshalb ebenfalls vollständig.

Satz 2.1
(i) Die Menge der Polynome bildet einen Unterraum von $\mathcal{C}[a, b]$ und ist bzgl. der Multiplikation und Translation abgeschlossen.

(ii) Das gleiche gilt für die Menge der trigonometrischen Polynome

$$t(x) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \cos(\nu x) + \beta_\nu \sin(\nu x)$$

bzgl. $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}$.

(iii) Jedes Polynom p liefert durch $p(\cos x)$ ein trigonometrisches Polynom.

Beweis: Übungsaufgabe

Satz 2.2

(i) Die Menge der Polynome ist dicht in $\mathcal{C}[a,b]$ enthalten.

(ii) Die Menge der trigonometrischen Polynome ist dicht in $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}$ enthalten.

Bemerkung 2.3 (i) Satz 2.2 heißt *Weierstraßscher Approximationssatz*

(ii) Nach Satz 2.2 ist jedes $f \in \mathcal{C}[a,b]$ (bzw. $f \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}$) durch (trigonometrische) Polynome approximierbar.

Lemma 2.4
Es existieren Polynome $q_1, q_2, \ldots$ mit $q(0) = 0$, die gleichmäßig gegen $x \mapsto \sqrt{x}$ über $[0,1]$ konvergieren.

Beweis: Es sei $q_1(x) := x$ sowie $q_{n+1}(x) := q_n(x) + \frac{1}{2}(x - q_n^2(x))$. Damit folgt induktiv: $x = q_1(x) \leq q_2(x) \leq \ldots \leq \sqrt{x}$, denn $q_1(x) \leq \sqrt{x}$ für $x \in [0,1]$ und

$$\begin{aligned} q_{n+1}(x) &= q_n(x) + \tfrac{1}{2}(x - q_n^2(x)) \\ &= \tfrac{1}{2}(q_n^2(x) - 2q_n(x) + 1) + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2}x \\ &= -\tfrac{1}{2}(q_n(x) - 1)^2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{1}x \\ &\overset{\text{IV}}{\leq} -\tfrac{1}{2}(\sqrt{x} - 1)^2 + \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2}x = \sqrt{x} \\ \text{Ferner ist} \quad q_{n+1}(x) &= q_n(x) + \tfrac{1}{2}\underbrace{(x - q_n^2(x))}_{\geq 0} \geq q_n(x) \\ \text{Aus} \quad \sqrt{x} - q_{n+1}(x) &= (\sqrt{x} - q_n(x))(1 - \tfrac{1}{2}(\sqrt{x} + q_n(x))) \\ &\leq (\sqrt{x} - q_n(x))(1 - q_n(x)) \\ &\leq (\sqrt{x} - q_n(x))(1 - x) \end{aligned}$$

folgt induktiv $\sqrt{x} - q_{n+1}(x) \leq (\sqrt{x} - x)1 - x)^n$. Für $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ mit $(1 - \varepsilon^2)^n < \varepsilon$ und $\varepsilon^2 \leq x \leq 1$ gilt

$$\sqrt{x} - q_{n+1}(x) \leq \underbrace{(\sqrt{x} - x)}_{\leq 1} \dot{(}1 - x)^n \leq (1 - \varepsilon^2)^n < \varepsilon \qquad (*)$$

Für $0 \leq x \leq \varepsilon^2$ folgt $(*)$ ebenfalls. □

Lemma 2.5
Es sei $C > 0$. Dann existieren Polynome $p_1, p_2, \dots$ mit $p_n(0) = 0$, die gleichmäßig gegen $x \mapsto |x|$ über $[-C, C]$ konvergieren.

Beweis: Es sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma 2.4 existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|q_n(x) - \sqrt{x}| < \frac{\varepsilon}{C}$ für alle $x \in [0,1]$. Es sei $p_n(x) := Cq_n((\frac{x}{c})^2)$. Dann gilt

$$|p_n(x) - |x|| = C\left|q_n((\tfrac{x}{c})^2) - \sqrt{(\tfrac{x}{c})^2}\right| < \varepsilon$$

□

Beweis: (von Satz 2.2) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (sonst wird Real- und Imaginärteil gesondert betrachtet). Es sei $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{C}[a,b]$ sei durch $f(x) = f(a)$ für $x < a$ sowie $f(x) = f(b)$ für $x > b$ stetig fortgesetzt. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$(*) \qquad |f(x) - f(x')| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - x'| < \delta$$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $[a,b] \subseteq [-n\delta, n\delta]$ sowie $h_\delta(x) := \max\{0, 1 - \frac{|x|}{\delta}\}$. Für $k\delta \le x \le (k+1)\delta$ und $k' \notin \{k, k+1\}$ sowie $k \in \{-n, \dots, n\}$ erhält man

$$\begin{aligned} h_\delta(x - k\delta) + h_\delta(x - (k+1)\delta) &= 1 \\ h_\delta(x - k'\delta) &= 0 \\ f(x) = \sum_{|s| \le n} h_\delta(x - s\delta) f(x) \quad &\text{für } |x| \le n\delta \end{aligned}$$

Dann ist wegen $|x - k\delta| \le \delta$ und $|x - (k+1)\delta| \le \delta$ sowie wegen $(*)$

$$\begin{aligned} \left|f(x) - \sum_{|s| \le n} f(s\delta) h_\delta(x - s\delta)\right| &= \left|\sum_{|s| \le n} (f(x) - f(s\delta)) h_\delta(x - s\delta)\right| \\ &= |f(x) - f(k\delta)||h_\delta(x - k\delta)| \\ &\qquad + |f(x) - f((k+1)\delta)|h_\delta(x - (k-1)\delta)| \\ &\le 2\varepsilon \end{aligned}$$

Es sei p_0 ein Polynom mit

$$|p_0(x) - h_\delta(x)| < \frac{\varepsilon}{(2n+1)|f|} \quad \text{für} \quad |x| \le C := 2n\delta$$

sowie $p_1(x) = \sum_{|s| \le n} f(s\delta) p_0(x - s\delta)$. Dann ist für $|x| \le C - n\delta = n\delta$

$$\begin{aligned} &|p_1(x) - \sum_{|s| \le n} f(s\delta) h_\delta(x - s\delta)| \\ &\left|\sum_{|s| \le n} f(s\delta)(p_0(x - s\delta) - h_\delta(x - s\delta))\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{(2n+1)|f|} \sum_{|s| \le n} |f(s\delta)| \le \varepsilon \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |f(x)-p_1(x)| &\leq \left|f(x) - \sum_{|s|\leq n} f(s\delta)h_\delta(x-s\delta)\right| + \left|p_1(x) - \sum_{|s|\leq n} f(s\delta)h_\delta(x-s\delta)\right| \\ &\leq 3\varepsilon \quad \text{für } x\in[a,b] \end{aligned}$$

Die Existenz von p_0 folgt unmittelbar aus der Darstellung $h_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}(|x-\delta| + |x+\delta| - 2|x|)$ sowie Lemma 2.5. □

Satz 2.6

(i) Die Abbildung $x \mapsto \cos x$ ist eine stetige (monoton fallende) Bijektion zwischen $[0,\pi]$ und $[-1,1]$.

(ii) Der Raum $\tilde{\mathcal{C}}^0_{2\pi} = \{f \in \tilde{\mathcal{C}} \mid f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$ heißt Unterraum der 2π-periodischen geraden Funktionen. Durch $\mathcal{C}[-1,1] \ni g \mapsto f \in \tilde{\mathcal{C}}^0_{2\pi}$ mit $f(x) = g(\cos x)$ wird eine Normisomorphie zwischen $\mathcal{C}[-1,1]$ und $\tilde{\mathcal{C}}^0_{2\pi}$ festlegt.

Beweis: Übungsaufgabe

Beweis: (Satz 2.2 (ii)) Es sei $\tilde{h}_\delta(x) = \max\{0, 1-\frac{|x|}{\delta}\}$ für $|x| \leq \pi$. Dann ist $\delta h_\delta \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}$. Wie im Beweis von Satz 2.2 (i) gibt es zu $f \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und $n \geq 2$ mit $n\delta = 2\pi$, so dass

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k\delta)\tilde{h}_\delta(x-k\delta)\right| < 2\varepsilon$$

Es sei t_0 ein trigonometrisches Polynom mit $|t_0 - \tilde{h}_\delta| < \frac{\varepsilon}{n|f|}$ sowie $t_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k\delta)$ to $(x-\delta k)$. Dann ist $|f - t_1| < 3\varepsilon$ wie im Beweis von Satz 2.2(i).

Für die Existenz von t_0 betrachte ein $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ mit $g(z) = \tilde{h}_\delta(\arccos z)$. Nach Satz 2.1(i) existiert ein Polynom p, so dass $|g-p| < \frac{\varepsilon}{n|f|}$ gilt. Es sei $t_0(x) := p(\cos x)$. Nach Satz 2.6 ist $t_0 \in \tilde{\mathcal{C}}^0_{2\pi}$, also auch $t_0 - \tilde{h}_\delta \in \tilde{\mathcal{C}}^0_{2\pi}$ sowie $|t_0 - \tilde{h}_\delta| = |g-p| < \frac{\varepsilon}{n|f|}$ wegen der Normisomorphie. □

Bemerkung 2.7 Aus dem Weierstraßschen Approximationssatz (Satz 2.2) folgt, dass $\mathcal{C}[a,b]$ und $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}$ separabel sind (d.h. es existiert eine abzählbare dichte Teilmenge).

Der Satz von Stone-Weierstraß

Definition

(M,τ) *heißt* topologischer Raum *mit* $\tau \subset \mathcal{P}(M)$, *falls*

(i) $\emptyset \in \tau$, $M \in \tau$

(ii) $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \tau \implies \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \tau$

(iii) I Indexmenge, $\mathcal{O}_i \in \tau$, $i \in I \implies \bigcup_I \mathcal{O}_i \in \tau$.

Eine Menge $\mathcal{O} \in \tau$ heißt offen, $M \setminus \mathcal{O}$ heißt abgeschlossen.

Es sei M ein kompakter topologischer Raum und $C(M) := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ mit $|f| := \max_{x \in M} |f(x)|$ ist ein Banachraum.

Mitels der durch $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ für $x \in M$ festgelegten Multiplikation ist $C(M)$ eine *Algebra* (ein Vektoraum mit bilinearen Verknüpfung $\cdot : C(M) \times C(M) \to C(M)$). Ferner sei U eine Unteralgebra zu $C(M)$ mit den Eigenschaften

(i) $\forall x \in M : \exists g \in U : g(x) \neq 0$

(ii) $\forall x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2 : \exists g \in U : g(x_1) \neq g(x_2)$

Bemerkung 2.8 Eigenschaft (i) ist z.B. erfüllt, wenn die konst. Funktionen enthalten sind. $U \subseteq C(M)$ mit der Eigenschaft (ii) heißt punktetrennend, M ist hierdurch separiert, d.h. Hausdorffraum.

Satz 2.9 (Satz von Stone-Weierstrass)
U ist dicht in $C(M)$.

Lemma 2.10
Die Eigenschaften i),ii) sind äquivalent zu

(iii) $\forall x \in M : \exists g \in U : g(x) = 1$

(iv) $\forall x_1, x_2 \in M$ *mit* $x_1 \neq x_2 : \exists g \in U : g(x_1) = 1$ *und* $g(x_2) = 0$.

Beweis: „$\Leftarrow$“ ist klar

„$\Rightarrow$“ Gemäß (i) ex. für $x \in M$ ein $\tilde{g} \in U$ mit $\tilde{g}(x) \neq 0$. Aus $g := \frac{1}{g(x)} \cdot \tilde{g}$ folgt (i).

Es sei $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$. Gemäß (i) ex. ein $g_1 \in U$ mit $g_1(x_1) \neq 0$.

1. Fall $g_1(x_1) \neq g_1(x_2)$. Setze $g := \frac{1}{(g_1(x_1)(g_1(x_1) - g_1(x_2))}(g_1^2 - g_1(x_2)g_1)$.

2. Fall $g_1(x_1) = g_1(x_2)$. Nach (ii) ex. ein $g_2 \in U$ mit $g_2(x_1) \neq g_2(x_2)$. Es sei $g_3 := g_1 + \lambda g_2 \in U$ mit $\lambda > 0$ klein, dass $g_3(x_1) \neq g_3(x_2)$ und $g_3(x)_1) \neq 0$. Setze nun $g := \frac{1}{g_3(x_1)(g_3(x_1) - g_3(x_2))} \cdot (g_3^2 - g_3(x_2) \cdot g_3)$. □

Lemma 2.11

(i) $\overline{U}$ *ist eine Algebra.*

(ii) Für $g, g_1, \ldots, g_k \in \overline{U}$ *seien die Funktionen*

$\operatorname{abs}(g) : x \mapsto |g(x)|$

$\max\{g_1, \ldots, g_k\} : x \mapsto \max\{g_1(x), \ldots, g_k(x)\}$

$\min\{g_1, \ldots, g_k\} : x \mapsto \min\{g_1(x), \ldots, g_k(x)\}$

definiert. Dann gilt $\operatorname{abs}(g), \max\{g_1, \ldots, g_k\}, \min\{g_1, \ldots, g_k\} \in \overline{U}$.

Beweis: (i) folgt aus der Stetigkeit der Multiplikation:

$$g_n = h_n \cdot f_n \quad \text{mit} \quad \lim h_n = h \in \overline{U} \quad \text{und} \quad \lim f_n = f \in \overline{U}$$
$$\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} (h_n f_n) = (\lim h_n) \cdot (\lim f_n) = h \cdot f \in \overline{U}$$

(ii) Nach Lemma 2.5 existieren Polynome p_n mit $p_n(0) = 0$, die gleichmäßig gegen $x \mapsto |x|$ über $[-C, C]$ mit $C > 0$ konvergieren. Wegen $p_n(0) = 0$ ist $p_n(\xi) = \alpha_1\xi + \cdots + \alpha_m\xi^m$. Also ist mit $g \in \overline{U}$ auch $p_n(g) = \alpha_1 g + \cdots + \alpha_m g^m \in \overline{U}$. Es sei $C \geq |g|$, dann gilt

$$\begin{aligned} |p_n(g) - \operatorname{abs}(g)| &= \max_{x \in M} |p_n(g(x)) - |g(x)|| \\ &\leq \max_{|\xi| \leq C} |p_n(\xi) - |\xi|| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \end{aligned}$$

und damit $\operatorname{abs}(g) \in \overline{U}$. Für $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ und $\min\{g_1, \ldots, g_n\}$ folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned} \max\{g_1, g_2\} &= \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2) + \tfrac{1}{2}\operatorname{abs}(g_1 + g_2) \\ \text{und} \quad \min\{g_1, g_2\} &= \tfrac{1}{2}(g_1 + g_2) - \tfrac{1}{2}\operatorname{abs}(g_1 + g_2) \end{aligned}$$

sowie Induktion über $k = 3, 4, \ldots$. □

Lemma 2.12
Es sei $f \in C(M)$ und $\varepsilon > 0$. Dann exisitiert zu jedem $x_0 \in M$ ein $h_0 \in \overline{U}$ mit $h_0(x_0) = f(x_0)$ und $h_0(x) < f(x) + \varepsilon$ für alle $x \in M$.

Beweis: Für $x_0 \neq y \in M$ existiert gemäß (iv) $g_0, g_1 \in U$ mit $g_0(x_0) = 1$, $g_0(y) = 0$ und $g_1(x_0), g_1(y) = 1$. Für $g := f(y)g_1 + f(x_0)g_0 \in U$ erhält man $g(y) = f(y)$. Für $y = x_0$ existiert gemäß (iii) ein $g_0 \in U$ mit $g_0(x_0) =$. Mit $g := f(x_0)g_0$ gilt $g(y) = f(y)$.

Da f und g stetig in y sind, existiert eine offene Umgebung $W(y)$ mit $g(x) < f(x) + \varepsilon$ für alle $x \in W(y)$. Da M kompakt ist, reichen sogar endlich viele Umgebungen $W(y_1), \ldots, W(y_k)$ aus, um M zu überdecken. Für die zugehörigen $g_j \in U$ gilt $g_j(x_0) = f(x_0)$ und $g_(x) < f(x) + \varepsilon$ für alle $x \in W(y_j)$ und damit für $h_0 := \min\{g_1, \ldots, g_k\}$. Nun ist $h_0(x_0) = f(x_0)$ und $h_0(x) < f(x) + \varepsilon$. Nach Lemma 2.11 ist $h_0 \in \overline{U}$. □

Beweis: (vom Satz von Stone) Es sei $f \in C(M)$ und $\varepsilon > 0$ sowie $h_0 \in \overline{U}$ gemäß Lemma 2.12 für $x_0 \in M$. Wegen d. Stetigkeit von f und h_0 in x_0 existieren offene Umgebungen $W(x_0)$ mit $h_0(x) > f(x) - \varepsilon$ für alle $x \in W(x_0)$. Demnach existieren für jedes $x_0 \in M$ derartige Umgebungen von denen endlich viele $W(x_1), \ldots, W(x_m)$ mit zugehören $h_1, \ldots, h_m$ ausreichen, um M zu überdecken. Es sei nun $h := \max\{h_1, \ldots, h_m\}$. Nach Lemma 2.11 ist $h \in \overline{U}$. Ferner ist für $x \in W(x_j)$:

$$h(x) = \max\{h_1(x), \ldots, h_m(x)\} \geq h_j(x) > f(x) - \varepsilon$$

Aus Lemma 2.12 folgt $h(x) < f(x) + \varepsilon$ für $x \in M$, also $|f(x) - h(x)| < \varepsilon$. Somit ist $|f - h| < \varepsilon$. □

Bemerkung (Anwendungen) (i) $M \subset \mathbb{R}^k$ kompakt, U Unteralgebra aller Polynome in den Variablen $x_1, \ldots, x_k$. Für $p_0(x_1, \ldots, x_k) := 1$ und $p_i(x_1, \ldots, x_k) := x_i$ (für $1 \leq i \leq k$) ist $p_0, p_i \in U$. Daher sind Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt. Nach Satz 2.9 ist U dicht in $C(M)$ (Verallgemeinerung von Satz 2.2i)

(ii) $M = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, U lineare Hülle von $z \mapsto \operatorname{Re}(z^k)$ und $z \mapsto \operatorname{Im}(z^k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Eigenschaft (i) folgt für $k = 0$, Eigenschaft (ii) folgt aus den Funktionen $z \mapsto \operatorname{Re}(z)$ und $z \mapsto \operatorname{Im}(z)$. Nach Satz 2.9 ist U dicht in $C(\mathbb{S})$. $C(\mathbb{S}^1)$ ist isomorph zu $\tilde{C}_{2\pi}$ vermöge der Isomorphie $f \mapsto \tilde{f}$, $\tilde{f}(x) := f(e^{ix})$. Daher ist die lineare Hülle $\operatorname{Re}((e^{ix})^k) = \cos(kx)$ und $\operatorname{Im}((e^{ix})^k) = \sin(kx)$ dicht in $\tilde{C}_{2\pi}$ enthalten. Also gilt die Aussage von Satz 2.2ii.

(iii) $M = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (1-Punkt-Kompaktifizierung, d.h. Topologie besteht aus den in $\mathbb{R}$ offenen Mengen und den Komplementen der kompakten Mengen aus $\mathbb{R}$, insbesondere ist M homöomorph zu $\mathbb{S}^1$).

$$C(M) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)\}$$

$U = \{g \in C(M) \mid g(x) = \frac{p(x)}{(1+x^2)^n}, n \geq 0, p \text{ Polynom}\}$. $g_0 \in U$ mit $g_0(x) = \frac{x}{1+x^2} \implies g_0(x_1) \neq g_0(x_2)$ für $x_1 \neq x_2$ mit $x_1, x_2 \notin \{0, \infty\}$. Für $x_1 = 0$ und $x_2 = \infty$ sei $g_1(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ dann ist $g_1(0) = 1, g_2(\infty) = -1$ (l'Hospital). Daher ist (ii) erfüllt und (i) gilt wegen $g(x) = 1 \in U$. Also ist U dicht in $C(M)$ enthalten.

Die Räume $\mathcal{L}_w^p$

Für eine kurze Abhandlung zur Maß- und Integrationstheorie siehe Anhang A. Diese folgt weitgehend Werner ([7]). Für mehr Details siehe [1],[2],[3] oder [5].

Satz 2.13
$L_w^p = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f$ messbar und $\int w(x)|f(x)|^p\,dx < \infty\}$ ist ein linearer Unterraum aller über $\mathbb{R}$ messbaren, komplexwertigen Funktionen.

Beweis: Es sei $f, g \in \mathcal{L}_w^p$. Dann ist $\alpha f \in L_w^p$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Ferner ist

$$w(x)|f(x) + g(x)|^p \leq w(x)(2\max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p \leq 2^p w(x)(|f(x)|p + |g(x)|^p)$$

Also ist

$$\int w(x)|f(x) + g(x)|^p\,dx \leq 2^p \left(\int u(x)|f(x)|^p\,dx + \int w(x)|g(x)|^p\,dx \right) < \infty$$

Zudem ist $w(\operatorname{abs}(f+g))^p$ messbar. □

Satz 2.14
Es sei $f \in L_w^p$. Dann ist auch $\operatorname{abs}(f), \operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f)$. Für rellwertige Funktionen f ist $f^+ := \max\{f, 0\}$ und $f^- := \min\{f, 0\} \in L_w^p$. Es sei

$$|f|_p := \left(\int w(x)|f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Satz 2.15
Es gilt

(i) $|\alpha f|_p = |\alpha||f|_p$ *für* $f \in L^p_w$ *und* $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) *Aus* $p > 1, q > 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p_w$ *und* $g \in L^q_w$ *folgt* $f \cdot g \in L^1_w$ *sowie*

$$|f \cdot g| \leq |f|_p \cdot |g|_q \quad \textit{(Höldersche Ungleichung)}$$

(iii) $|f+g|_p \leq |f|_p + |g|_p$ *für* $p \geq 1, f, g \in L^p_w$. *(Minkowskische Ungleichung)*

Beweis: Übungsaufgabe, Literatur

Bemerkung 2.16 (i) $|\cdot|_p$ ist eine Halbnorm in L^p_w.

(ii) $N_w := \{h \in L^p_w \mid |h|_p = 0\}$ is ein linearer Raum.

Satz 2.17
(i) *Der Raum* $\hat{L}^p_w := L^p_w / N_w$ *mit* $p \geq 1$ *ist vollständig.*

(ii) *Für* $p = 2$ *ist* L^2_w *ein Hilbertraum mit dem inneren Produkt*

$$(f, g) := \int w(x) f(x) \overline{g(x)}\, dx$$

Beweis: Literatur, beispielsweise Adams' 76

Bemerkung 2.18 (i) Es sei im Folgenden vorausgesetzt, dass nicht fast überall $w(x) = 0$ gilt, sonst wäre $\hat{L}^p_w = \{0\}$.

(ii) Für $w(x) > 0$ fast überall in (a, b) und $w(x) = 0$ sonst, schreibt man $\hat{L}^p_w(a, b)$.

Satz 2.19
Für $p \geq 1$ *ist* $\hat{L}^p_w$ *uniform konvex (siehe Definition 1.13).*

Beweis: Es sei $\varphi(z) := z^{p-1}(1 + |z|^p) - |1+z|^p$ für $z \in \mathbb{C}$. φ ist stetig, $\varphi(1) = 0$ und $\varphi(0) = 2^{p-1} - 1 > 0$ sowie

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 2^{p-1} p x^{p-1} - p(1+x)^{p-1} \\ &= p(1+x)^{p-1} \left(\left(\frac{2x}{1+x} \right)^{p-1} - 1 \right) < 0 \quad \text{für } 0 \leq x < 1\end{aligned}$$

Also gilt $\varphi(x) > 0$ für $0 \leq x < 1$. Für $z \neq |z|$ gilt $|1+z| < 1 + |z|$ und demnach $\varphi(z) > \varphi(|z|)$, also $\varphi(z) > 0$ für $|z| \leq 1$. Für

$$\tilde{\eta}(\varepsilon) = \min \left\{ \frac{\varphi(z)}{|z-1|^p} \mid |z| \leq 1, |z-1| \geq \varepsilon \right\} \quad \text{mit } 0 < \varepsilon \leq 2$$

gilt $\varphi(z) \geq \tilde{\eta}(\varepsilon)|1-z|^{1-p}$ für $|z| \leq 1$ und $|1-z| \geq \varepsilon$. Es seien $f, g \in L^p_w$ mit $|f|_p = |g|_p = 1$ und $|f-g| \geq \varepsilon > 0$. Für $0 \neq |f(x)| \geq |g(x)|$ erhält man

$$\begin{aligned}&2^{p-1}\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right) - |f(x)+g(x)|^p = |f(x)|^p \cdot \varphi\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) \\ &\overset{(*)}{\geq} |f(x)|^p \tilde{\eta}(\varepsilon_1) \cdot \left|1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right|^p = \tilde{\eta}(\varepsilon_1) \cdot |f(x) - g(x)|^p\end{aligned}$$

sofern $\varepsilon_1 \leq \left|1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right|$ und $0 < \varepsilon_1 \leq 2$. $(*)$ folgt ebenfalls für $0 \neq |g(x)| \geq |f(x)|$ sofern $\varepsilon_1 \leq \left|1 - \frac{f(x)}{g(x)}\right|$, also gilt $(*)$ für

$$f(x) - g(x)| \geq \varepsilon_1 \max\{|f(x)|, |g(x)|\}$$

Multiplikation mit $2^{-p}w(x)$ und Integration liefern

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(|f|_p^p + |g|_p^p\right) - |\tfrac{1}{2}(f+g)|_p^p \\
&\geq 2^{-p}\tilde{\eta}(\varepsilon_1)\int_A w(x)|f(x)-g(x)|^p\,dx \\
&\qquad \text{mit} \quad A := \{x \mid |f(x)-g(x)| \geq \varepsilon_1 \max\{|f(x)|,|g(x)|\}\} \\
&= 2^{-p}\tilde{\eta}(\varepsilon_1)\left(\int_A w(x)|f(x)-g(x)|^p\,dx - \int_{\mathbb{R}\setminus A} w(x)|f(x)-g(x)|^p\,dx\right) \\
&\geq 2^{-p}\tilde{\eta}(\varepsilon_1)\left(\int_A w(x)|f(x)-g(x)|^p\,dx - \int_{\mathbb{R}\setminus A} w(x)\varepsilon_1^p \max\{|f(x)|^p,|g(x)|^p\}\right) \\
&\geq 2^{-p}\tilde{\eta}(\varepsilon_1)\int_{\mathbb{R}} w(x)\left(|f(x)-g(x)|^p - \varepsilon_1^p \max\{|f(x)|,|g(x)|\}\right)\,dx \\
&\geq 2^{-p}\tilde{\eta}(\varepsilon_1)\left(|f|_p^p - |g|_p^p - \varepsilon_1^p\left(|f|_p^p + |g|_p^p\right)\right) \\
\Longrightarrow\ & \left|\tfrac{1}{2}(f+g)\right|_p^p \leq 1 - 2^{-p}\tilde{\eta}(\varepsilon_1)(\varepsilon^p - 2\varepsilon_1^p)
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann mit

$$\eta(\varepsilon) := 2^{-p}\tilde{\eta}(\tfrac{\varepsilon}{4})\cdot(\varepsilon^p - 2(\tfrac{\varepsilon}{4})^p) > 0$$

□

Bemerkung 2.20 Die uniforme Konvexität gilt auch für den Raum L_w^p mit der Halbnorm $|\cdot|_p$.

Satz 2.21
Der Unterraum der Treppenfunktionen ist dicht in L_w^p enthalten. Auch der Unterraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger ist dicht in L_w^p enthalten.

Beweis: L_w^p ist bzgl. $f \mapsto \operatorname{Re} f$, $f \mapsto \operatorname{Im} f$, $f \mapsto f^+ = \max\{f, 0\}$, $f \mapsto f^- = \min\{f, 0\}$ abgeschlossen. Also genügt es, die Behauptung für $f(x) > 0$ zu zeigen. Für

$$f_n(x) := \begin{cases} \min\{n, f(x)\} & |x| \leq n \\ 0, & |x| > n \end{cases} \qquad \text{(abgeschnittene Funktionen)}$$

erhält man punktweise monotone Konvergenz $w(x)f_n^p(x) \nearrow w(x)f^p(x)$. Aus dem Satz von Dini folgt, dass $w(x)f_n^p$ gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt

$$\int w(x)\left(f^p(x) - f_n^p(x)\right)\,dx \to 0$$

Wegen $(1-n)^p + n^p \leq 1$ mit $n(x) = \frac{f_n(x)}{f(x)}$ für $f(x) \neq 0$, $p \geq 1$ erhält man

$$\begin{aligned}
\int w(x)|f(x) - f_n(x)|^p \, dx &\leq \int w(x) f^p(x) \left|1 - \tfrac{f_n(x)}{f(x)}\right|^p \, dx \\
&= \int w(x) f^p(x) \left(1 - \left(\tfrac{f_n(x)}{f(x)}\right)^p\right) dx \\
&= \int w(x) \left(f^p(x) - f_n^p(x)\right) dx
\end{aligned}$$

also $|f - f_n|_p \to 0$. Für $\varepsilon > 0$ existiert demnach ein n, so dass $|f - f_n|_p < \varepsilon$. Das heißt es reicht, die abgeschnittene Funktion f_n auf dem Intervall $(-n, n)$ zu betrachten. $w(x)$ ist über $(-n, n)$ integrabel. Es existiert also eine Treppenfunktion τ, so dass

$$\int_{-n}^{n} |w(x) - \tau(x)| \, dx < \frac{\varepsilon^p}{n^p}$$

Für $g \in L_w^p$ mit $g(x) = 0$ für $|x| > n$ und $0 \leq g(x) \leq n$ für $|x| \leq n$ $(*)$ sowie

$$\int_{-n}^{n} \tau(x)|f_n(x) - g(x)|^p \, dx < \varepsilon^p$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int w(x)|f_n(x) - g(x)|^p \, dx \leq \int_{-n}^{n} &\tau(x)|f_n(x) - g(x)|^p \, dx \\
&+ \int_{-n}^{n} (w(x) - \tau(x)) \cdot |f_n(x) - g(x)|^p \, dx \\
\leq \int_{-n}^{n} &\tau(x)|f_n(x) - g(x)|^p \, dx + \varepsilon^p
\end{aligned}$$

und damit $|f_n - g|_p < 2\varepsilon$.

$$|f - g|_p \leq |f_n - f|_p + |f_n - g|_p \leq 3\varepsilon$$

Die Treppenfuntkionen f_n sind messbar und durch n beschränkt, also über $(-n, n)$ integrabel. Es existiert demnach eine Treppenfunktion g, die $(*)$ erfüllt und

$$\int_{-n}^{n} |f - n(x) - g(x)| \, dx < \frac{\varepsilon^p}{\max_{x \in \mathbb{R}} |\tau(x)| n^{p-1}}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_{-n}^{n} \tau(x)|f_n(x) - g(x)|^p \, dx &\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\tau(x)| \int_{-n}^{n} |f_n(x) - g(x)|^{p-1} \cdot |f_n(x) - g(x) \, dx \\
&\leq \max_{x \in \mathbb{R}} |\tau(x)| n^{p-1} \int_{-n}^{n} |f_n(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon^p
\end{aligned}$$

Die Behauptung für stetige Funktionen mit kompakten Träger ist Übungsaufgaben. □

Bemerkung 2.22 Wegen

$$\int_a^b w(x)|g(x) - h(x)|^p \, dx \leq \int_a^b w(x) \, dx \cdot \max_{x \in [a,b]} |g(x) - h(x)|^p$$

für stetige Funktionen g und Polynome h folgt aus Satz 2.21 und dem Satz von Weierstraß (Satz 2.2), dass der Unterraum der Polynome dicht in $L_w^p(a, b)$ enthalten ist, sofern (a, b) endlich ist.

Der Satz von Müntz

Polynome z.B. der Form $h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x^5 + \alpha_2 x^{10} + \cdots$ bilden eine Unteralgebra, die nach dem Satz von Stone (2.9) dicht in $\mathcal{C}[a,b]$ enthalten ist. (Übungsaufgabe).

Frage: Welche Voraussetzung sind für die Abgeschlossenheit von Systemen von Potenzen x^0 in $\mathcal{C}[a,b]$ bzw. $L^p_w(a,b)$ erforderlich?

Satz 2.23
Die Folge der Potenzen $h_n(x) = x^{\nu_k}$ mit $0 \le \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k \in \mathbb{R}$ ist genau dann abgeschlossen in $L^2(0,1)$, wenn $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$ divergiert.

Beweis: $L^2(0,1)$ ist ein Hilbertraum. Nach Satz 1.37 folgt die Abgeschlossenheit genau dann, wenn

$$\delta_n^2(f) = \frac{G(h_1,\dots,h_n,f)}{G(h_1,\dots,h_n)} \to 0$$

für alle $f \in T = \{f_1, f_2, \dots \mid f_m(x) = x^m\}$. (Beachte, dass die Vorraussetzng in Satz 1.37 zu „$\mathrm{lin}(T) \subset R$ dicht" abgeschwächt werden kann (Übungsaufgabe) und $\mathrm{lin}(T)$ ist dicht in $L^2(0,1)$, siehe letzte Bemerkung). Es ist

$$(h_i, h_j) = \int_0^1 x^{\nu_i + \nu_j}\,dx = \frac{1}{\nu_i + \nu_j + 1} \quad \text{und} \quad (h_i, f_m) = \frac{1}{\nu_i + m + 1}$$

Daraus folgt:

$$G(h_1,\dots,h_n) = \frac{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (\nu_i - \nu_j)^2}{\prod\limits_{1 \le i < j \le n} (\nu_i + \nu_j + 1)^2}$$

$$\text{und} \quad G(h_1,\dots,h_n,f) = G(h_1,\dots,h_n) \frac{1}{2m+1} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{m - \nu_i}{\nu_i + m + 1} \right)^2$$

Wegen $\nu_i \ne \nu_j$ für $i \ne j$ gilt $G(h_1,\dots,h_n) \ne 0$ für alle n. Also ist $h_1, h_2, \dots$ genau dann abgeschlossen, wenn

$$\delta_n(f_m) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^{n} \frac{|m - \nu_i|}{\nu_i + m + 1} \xrightarrow[\forall m]{n \to \infty} 0$$

1. Fall $\{\nu_i\}$ beschränkt, d.h. $\nu_i \le r$ für alle i. Dann ist

$$\frac{|m - \nu_i|}{m + \nu_i + 1} \le \frac{m + \nu_i}{m + \nu_i + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m + \nu_i}} \le \frac{1}{1 + \frac{1}{m+r}} = \frac{m + r}{m + r + 1}$$

Damit ist $\delta_n(f_m)\sqrt{2m+1} \le \left(\frac{m+r}{m+r+1}\right)^n \to 0$ für $n \to \infty$, also ist $h_1, h_2, \dots$ abgeschlossen. Außerdem ist $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$ divergent.

2. Fall $\{\nu_i\}$ unbeschränkt und für alle m existiert ein i_m mit $\nu_{i_m} = m$. Dann ist $\delta_n(f_m) = 0$ für $\nu_n \ge m$. Außerdem ist

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_i} \ge \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_{i_m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$$

divergent.

3. Fall $\{\nu_i\}$ ist unbeschränkt und es existiert ein m mit $\nu_i \neq m$ für alle i. Dann ist $\delta_n(f_m) \to 0$ äquivalent zu

$$0 = \prod_{\nu_i \geq m+1} \frac{\nu_i - m}{v - i + m + 1} = \prod_{\nu_i \geq m+1} \left(1 - \frac{2m+1}{\nu_i + m + 1}\right)$$

was äquivalent zu $\sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{\nu_i + m + 1} = \infty$. Daraus folgt

$$\sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{\nu_i + m + 1} < \sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{\nu_i}$$

Andererseits folgt

$$\sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{\nu_i} = \infty \implies \sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{\nu_i + m + 1} > \sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{2\nu_i} = \infty$$

Also ist $\sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{\nu_i + m + 1} = \infty \iff \sum_{\nu_i \geq m+1} \frac{1}{\nu_i} = \infty$ □

Satz 2.24
Die Folge $h_1, h_2, \dots$ ist in $\mathcal{C}[0,1]$ genau dann abgeschlossen, wenn $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_k}$ divergiert und $\nu_1 = 0$.

Beweis: „$\Rightarrow$" Es sei $h_1, h_2, \dots$ abgeschlossen in $\mathcal{C}[0,1]$. Wegen

$$\left(\int_0^1 |g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{x \in [0,1]} |g(x)|$$

ist $h_1, h_2, \dots$ auch abgeschlossen in $L^2(0,1)$, also ist $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_i}$ divergent. Angenommen $\nu_1 \neq 0$

$$\left| f_0 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i \right| \geq \left| f_0(0) - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i(0) \right| = 1$$

für beliebige Koeffizienten α_i. $\lightning$zur Abgeschlossenheit.

„$\Leftarrow$" Es sei $\nu_1 = 0$ und $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_i} = \infty$. $(*)$ Z.z. $\delta_n(f_m) \to 0$ für $f_m \in T$ wie im Beweis von Satz 2.23. Für $m = 0$ ist $f_0 = h_1$, also folgt $(*)$. Es sei $m \geq 1$ und $\lambda \geq 1$ so gewählt, dass $\lambda \nu_i > 1$ für $i \leq 2$ ist. Mit $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_i} = \infty$ ist auch $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\lambda \nu_i - 1}$ divergent. Damit ist $\varphi(\xi) = \lambda m \xi^{\lambda m - 1}$ durch Potenzen von $\xi^{\lambda \nu_i - 1}$ in $L^2(0,1)$ approximierbar, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. ein $k \geq 2$ und $\gamma_2, \dots, \gamma_n$ mit

$$\int_0^1 \left(\lambda \xi^{\lambda m - 1} - \sum_{i=2}^{k} \gamma_k \xi^{\lambda \nu_i - 1}\right)^2 \xi \leq \varepsilon^2$$

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}
&\left|\eta^{\lambda m} - \sum_{i=2}^{k} \frac{\gamma_i}{\lambda \nu_i} \eta^{\lambda \nu_i}\right| \\
&= \left|\int_0^\eta \left(\lambda m \xi^{\lambda m - 1} - \sum_{i=2}^{k} \gamma_i \xi^{\lambda \nu_i - 1}\right) \cdot 1 \, d\xi\right| \\
&\overset{\text{CS}}{\leq} \left(\int_0^\eta 1 \, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\eta \left(\lambda m \xi^{\lambda m - 1} - \sum_{i=2}^{k} \gamma_i \xi^{\lambda \nu_i - 1}\right)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \eta^{\frac{1}{2}} \varepsilon \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Mit $x = \eta^\lambda$ folgt

$$\left|f_m(x) - \sum_{i=2}^{k} \frac{\gamma_i}{\lambda \nu_i} h_i(x)\right| \leq \varepsilon \qquad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1$$

□

3. Splines

Es sei $T^* := (t_i)_{i=1}^s \subset \mathbb{R}$ oder $T^* := (t_i^*)_{i=-\infty}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$. Im zweiten Fall wird zusätzlich $|t_i^*| \to \infty$ für $i \to \pm\infty$ vorausgesetzt.

Definition 3.1
Eine Funktion $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt Spline *der Ordnung r (bzw. vom Grad $r-1$) mit Stützstellen T_i^*, falls S ein Polynom vom Grad $r-1$ auf jedem Intervall (t_i^*, t_{i+1}^*) bzw. $(-\infty, t_1^*)$ und (t_s^*, ∞) ist sowie auf mindestens einem Intervall vom exakten Grad $r-1$ ist.*

Definition 3.2
Ein Spline hat die Glattheit *$m_i = 0$ an den Stützstellen t_i^*, falls S unstetig an t_i^* ist. Andernfalls hat S die Glattheit $m_i > 0$, falls m_i die größte natürliche Zahl $0 < m_u \leq r$ ist, so dass S in t_i^* $(m_i - 1)$-mal stetig differenzierbar ist.*

Bemerkung 3.3 Ist $m_i = r$, dann ist S ein Polynom in einer Umgebung von t_i^*. Es sei $A = [a, b]$ mit $a < t_i^* < b$ für $i = 1, \ldots, s$ oder $A = \mathbb{R}$. Der Raum

$$S_r^*(T^*, A) = \{S : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid S \text{ ist ein Spline der Ordnung } r\}$$

mit $r > 0$ heißt *Spline-Raum*. Es sei $(m_i)_{i=1}^s$ bzw. $(m_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $0 \leq m_i < r$ sowie $(k_i) := (r - m_i)$. Dann heißt

$$S_r := S_r(T^*, k, A) = \{S \in S_r^*(T^*, A) \mid S \text{ hat die Glattheit } m_i \text{ an der Stelle } t_i^*\}$$

Schönbergraum.

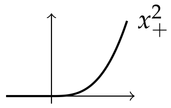
Bemerkung 3.4 (i) $S_r(T^*, 1, A) \subset S_r(T^*, k, A)$ für beliebige k.

(ii) Schönberg-Räume sind lineare Räume

(iii) $P_{r-1} \subset S_r \subset S_r^*(T^*, A) = \delta_r(T^*, k, A), k_i := r.$

Definition 3.5
Die Funktion $x \mapsto (x-a)_+^k$ *mit*

$x_+^k := \begin{cases} x^k, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ *heißt* abgeschnittene Potenz.



Es gilt offenbar $(\cdot - a)_+^j \in S_r(T^*, k, A)$ *für* $j = r-k, \dots, r-1$.

Satz 3.6
Es sei $A = [a,b]$ *ein endliches Intervall. Dann besitzt* $S_r^*(T^*, k, A)$ *die Basis*

$$\begin{aligned} S_{-j}(x) &:= \frac{(x-a)^j}{j!} \quad j = 0, \dots, r-1 \\ S_{ij}(x) &:= \frac{(x-t_i^*)_+^j}{j!} \quad j = r-k, \dots, r-1 \quad i = 1, \dots s \end{aligned}$$

Die zugehörige duale Basis ist

$$\begin{aligned} a_{-j}(s) &= S^{(j)}(a), \quad j = 0, \dots r-1 \\ a_{ij}(s) &= S^{(j)}(t_i^*+) - S^{(j)}(t_i^*-) \quad j = r-k_i, \dots, r-1, \quad i = 1, \dots, s \end{aligned}$$

D.h.

$$\begin{aligned} a_{-j}(S_{-i}) &= \delta_{ij}, \qquad a_{-j}(S_{ij}) = 0 \\ a_{ij}(S_{k,l}) &= \delta_{(i,j)(k,l)}, \qquad a_{ij}(S_{-k}) = 0 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\dim S_r^*(T^*, k, A) = n + r$ *mit* $n := \sum_{i=1}^s k_i$.

Bemerkung (Finden einer Basis) Y sei ein Vektorraum mit $\dim Y < \infty$, $S_1, \dots, S_N \in Y$, $a_1, \dots, a_N \in Y^*$ mit $a_j(S_i) = \delta_{ij}$ sowie $a_j(S) = 0$ für $j = 1, \dots, N \implies S = 0$. Dann gilt:

$$(*) \qquad S = \sum_{j=1} a_j(S) S_j \quad \text{für} \quad S \in Y$$

Denn

$$a_i\left(S - \sum_{j=1}^N a_j(S) S_j\right) = a_i(S) - a_i(S) = 0 \implies S - \sum_{j=1}^N a_j(S) S_j = 0$$

Außerdem ist $(*)$ eine eindeutige Darstellung, denn $S = \sum_{j=1}^N b_j S_j$ folgt $b_i = a_i(S)$. Damit ist $\{S_1, \dots, S_N\}$ eine Basis.

Beweis: Dualitätseigenschaft ist Übungsaufgabe. Es sei $S \in S_r(T^*, k, A)$ mit $a_{ij}(S) = 0$ und $a_{-j}(S) = 0$. Aus $a_{ij} = 0$ folgt, dass $S_1, \dots, S^{(r-1)}$ stetig an jedem t_i^* ist. Also ist $S^{(r-1)}$ konstant und damit $S^{(r)} = 0$. Damit ist S ein Polynom vom Grad $< r$ auf A. Aus $a_{-j}(S) = 0$ für $j = 0, \dots, r-1$ folgt, dass S das Nullpolynom sein muss. $\square$

Satz 3.7
Es sei $A = [a, b]$ und $t_0^* := a$ und $t_{s+1}^* := b$. Ferner gelte $\delta_0 \leq |t_{j+1}^* - t_j^*| \leq \delta$ für $j = 0, \ldots, s$ und $\delta_0, \delta > 0$. Dann gilt für $S \in S_r(T^*, k, A)$

(i) $|S|_p \leq C\delta^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}|S|_q$*, für* $q \leq p_0 \leq p < \infty$ *mit* $C = C(p_0, r)$.

(ii) $|S^{(k)}|_p \leq C\delta_0^k|S|_p$ *mit* $C = C(r)$.

Lemma 3.8 (Markov)
Es sei P_n ein Polynom vom Grad $\leq n$ auf $[-1, 1]$. Dann gilt $|P_n'| \leq n^2|P_n|$.

Beweis: Siehe [4]

Lemma 3.9 (Nikolskii)
Es sei $0 < q \leq p \leq \infty$ und P_n ein Polynom vom Grad $\leq n$ auf $[a, b]$. Dann gilt

$$(b-a)^{-\frac{1}{p}}|P_n|_p \leq (b-a)^{-\frac{1}{q}}(2(q+1)n^2)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \cdot |P_n|_q$$

Beweis: Siehe [4]

Beweis: (des Satzes) zu (i) Sei S ein Polynom vom Grad $< r$ auf jedem $[t_j^*, t_{j+1}^*]$ ist, folgt aus dem vorherigen Lemma.

$$\begin{aligned}|S|_p^p &= \sum_{j=0}^{s} |S|^p_{p,[t_j^*,t_{j+1}^*]} \leq C\sum_{j=0}^{s}|t_{j+1}-t_j|^{p(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\\ &\leq C\delta_0^{p(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\sum_{j=0}^{s}|S|^p_{q,[t_j^*,t_{j+1}^*]}\end{aligned}$$

zu (ii) Übungsaufgabe □

B-Splines

Abgeschnittene Potenzen besitzen einen großen Träger, was ein gravierender Nachteil z.B. beim Lösen von Spline-Interpolationsaufgaen ist. Konstruktion von Splines mit möglichst kleinem Träger führt zu B-Splines (für *Basic Splines*).

Bemerkung (Dividierte Differenzen) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_i \neq x_j$. Dann sind die *dividerten Differenzen* von f in $x_0, \ldots x_n$ rekursiv definiert als

$$\begin{aligned}[x_i]f &:= f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n\\ [x_0, \ldots, x_n]f &:= \frac{[x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0} \qquad (*)\end{aligned}$$

Die divierten Differenzen haben die folgenden Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist symmetrisch in $x_0, \ldots, x_n$.

(ii) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist 0, falls f ein Polynom vom Grad $< n$ ist und konstant, falls f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

(iii) $[x_0,\dots,x_n]f$ ist stetig an den Punkten $(x_0,\dots,x_n)$, sofern f stetig in den x_i ist.

(iv) $[x_0,\dots,x_n]f = f^{(n)}\frac{f(\xi)}{n!}$, $a \le \xi \le b$.

(v) $[x_0,\dots,x_n]f = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$

(vi) Die Differenzen einer Funktion mit Schrittweite h sind definiert als

$$\Delta_h^0 f(x) := f(x), \quad \Delta_h^1 f(x) := f(x+h) > f(x) \quad \text{und} \quad \Delta_h^n f(x) := \Delta_n \Delta_n^{n-1} f(x)$$

Es gilt

$$\Delta_h^n f(x) = n! h^n [x, x+h, \dots, x+nh]$$

(vii) Leibniz-Formel für dividierte Differenzen

$$[x_0,\dots,x_n](gh) = \sum_{k=0}^{n} ([x_0,\dots,x_n]g)([x_0,\dots,x_n]h)$$

(viii) $[x_0,\dots,x_n]f = \int_0^1 \int_0^{t-1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(x_0 + (x_1-x_0)t_1 + \cdots + (x_n - x_{n-1})t_n \, dt_1 \dots dt_n$

(ix) $|[x_0,\dots,x_n]f| \le \frac{1}{n!} \left| f^{(n)} \right|_\infty$ unter der Voraussetzung von (vii)

(x) $[x_0,\dots,x_n]f = \int_a^b f^{(n)}(t)[x_0,\dots,x_n] \left(\frac{(\cdot - t)_+^{n-1}}{(n-1)!} \right) dt$

(xi) Dividierte Differenzen können auch für gleiche Punkte definiert werden:

$$[\underbrace{x_0,\dots,x_0}_{n+1}]f = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Hiermit und der Definition $(*)$ sowie der Symmetrieeigenschaft (i) sind dividierte Differenzen für beliebige Punkte definierbar. Die Eigenschaft (v) gilt nicht, Eigenschaften (viii) gilt sofern nicht alle Punkte übereinstimmen. Alle weiteren Eigenschaften bleiben erhalten.

Es sei $x_0 \le x_1 \le \dots \le x_r$ eine Folge von $r+1$ Punkten mit $x_0 \ne x_r$ (sog. Knoten). Der *B-Spline M* ist definiert als

$$M(x) := M(x; x_0,\dots,x_n) := r[x_0,\dots,x_r](\cdot - x)_+^{r-1}$$

Satz 3.10

(i) M ist eine Linearkombination von abgeschnittenen Potenzen $(x_i - x)_+^{r-l_i}$, wobei l_i die Anzahl der $x_j = x_i$, $i \le j$ ist.

(ii) M ist eine Spline-Funktion.

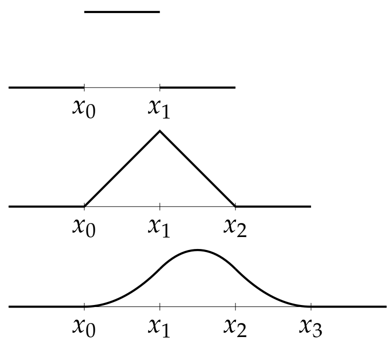
(iii) $M(x) = 0$ für $x < x_0$ oder $x > x_r$

(iv) *Für $f \in C^r$ gilt $[x_0, \dots, x_r]f = \frac{1}{r!}\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)M(t)\,dt$ (*Peano-Kern *der dividierten Differenz).*

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} M(t)\,dt = 1.$

Beweis: Übungsaufgabe

Beispiel Einige B-Splines sind



- $r = 1:$

$$M(x; x_0, x_1) = \frac{1}{x_1 - x_0}\chi_{(x_0,x_1)}(x), x + x_0 x_1$$

- $r = 2$ Hut-Funktion
- $r = 3$ Stückweise quadratische Funktionen.

Eigenschaften, die sich unmittelbar aus der Definition über die dividierten Differenzen ergeben.

Satz 3.11

(i) $M(x; x_0, \dots, x_n) = \frac{r}{r-1}\left[\frac{x-x-0}{x_r-x_0}M(x, x_0, \dots, x-r-1) + \frac{x_r-x}{x_r-x_0}M(x; x_1, \dots x_r)\right]$

(ii) $M(x) > 0, x \in (x_0, x_r)$

(iii) $M(x) \leq \frac{c_r}{(x_r-x_0)}$ *mit einer nur von r abhängigen Konstanten c_r.*

Normalisierte B-Splines: $N(x; x_0, \dots, x_r) = \frac{1}{r}(x_r - x_0)M(x, x_0, \dots, x_r)$

Satz 3.12

(i) *Es gilt die Rekursionsformel*

$$N(x; x_0, \dots, x_r) = \frac{x - x_0}{x_{r-1} - x_0}N(x; x_0, \dots, x_{r-1}) + \frac{x_r - x}{x_r - x_1}N(x; x_1, \dots, x_r)$$

(ii) $N'(x; x_0, \dots, x_r) = -(r-1)\left(\frac{N(x,x_0,\dots,x_{r-1})}{x_{r-1}-x_0} - \frac{N(x,x_1,\dots,x_r)}{x_r-x_1}\right)$ *für $x \neq x_i$ sowie $x = x_i$ sofern x_i höchstens $r-2$-mal vorkommt.*

Satz 3.13

Die Knoten $(y_0, \dots, y_r)$ konvergieren gegen $(x_0, \dots, x_r)$. Ferner $A \subset \mathbb{R}$ kompakt und höchstens $r - 1$ viele Punkte $x_0, \dots, x_r$ aus A stimmen überein. Dann gilt

(i) *$M(x; y_0, \dots, y_r)$ konvergiert uniform gegen $;(x; x_0, \dots, x_r)$ für $x \in A$. Das gleiche gilt für $N(x; y_0, \dots, y_r)$.*

(ii) *Für $0 < q < \infty$ konvergiert $N(x; y_0, \dots, y_r)$ gegen $N(x; x_0, \dots, x_r)$ in $L^q(A)$.*

Beweis: DeVore, Lorentz, Constructive Approx. □

Im Folgenden sei $T = (t_i)$ durch T^* festgelegt, indem die Stützstellen t_i^* k_i-mal wiederholt werden, d.h. $t_i = \cdots = t_{i+k_i}$ und $t_i < t_{i+r}$ für alle i, da $k_i < r$. Im Fall $A = [a,b]$ werden T weitere Knoten hinzugefügt: $t_{-r+1} \leq \cdots \leq t_0 \leq a$ sowie $t_{n+r} \geq \cdots \geq t_{n+1} \geq b$.

- $S_r(T,A) := S_r^*(\tilde{T}^*, \tilde{k}^*, A)$ mit erweiterten Stützstellensatz $\tilde{T}^*$ und $\tilde{k}^*$.
- $N_j(x) = N_{j,r}(x) := N(x; t_j, \ldots, t_{j+r})$ $j \in \Lambda$ mit $\Lambda := \mathbb{Z}$, falls $A = \mathbb{R}$ und $\Lambda = \{-r+1, \ldots, u\}$, falls $A = [a,b]$.

Bemerkung 3.14 Offenbar gilt $N_j \in S_r(T,A)$.

Satz 3.15
Die B-Splines $(N_i)_{i\in\Lambda}$ bilden eine Basis von $S_r(T,A)$, d.h. es existiert Darstellung

$$S(x) = \sum_{j\in\Lambda} c_j N_j(x) \quad \textit{falls} \quad k_i < r.$$

Lemma 3.16
Die B-Splines $(N_i)_{i\in\Lambda}$ bilden eine Zerlegung der Eins, d.h. $\sum_{j\in\Lambda} N_j(x) = 1$.

Beweis: Übungsaufgabe (Leibniz-Regel)

Lemma 3.17
Für ein $\xi \in \mathbb{R}$ und $r = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\frac{(\xi - x)^s}{s!} = \sum_{j\in\Lambda} g_{j,r}^{(r-s-1)}(\xi) N_{j,r}(x), \quad x \in A, s = 0, \ldots, r-1$$

mit $g_{j,1}(x) = 1$ und $g_{j,r}(x) := \frac{1}{(r-1)!}(x - t_{j+1})(x - t_{j+1}) \cdots (x - t_{j+r-1})$ für $r = 2, 3, \ldots$.

Beweis: Es sei zunächst $s = r - 1$. Z.z. $\frac{(\xi-\lambda)^{r-1}}{(r-1)!} = \sum_{j\in\Lambda} g_{jr}(\xi) N_{jr}(x)$ $(*)$. Induktion über r.

IA Der Fall $r = 1$ folgt aus Lemma 3.16.

IS Es sei $(*)$ für $r - 1$ bereits bewiesen, dann gilt nach Satz 3.12 i)

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\Lambda} g_{jr}(\xi) N_{jr}(x) &= \sum_{j\in\Lambda} g_{jr}(\xi) \cdot \left(\frac{x - t_j}{t_{j+r-1} - t_j} N_{jr}(\xi) + \frac{t_{j+r} - x}{t_{j+r} - t_{j+1}} N_{j+1,r-1}(x) \right) \\
&= \sum_{j\in\Lambda} \left(\frac{x - t_j}{t_{j+r-1} - t_j} g_{j,r}(\xi) + \frac{t_{j+r-1} - x}{t_{j+r-1-t_j} t_j} g_{j-1,r}(\xi) \right) N_{j,r-1}(x) \\
&= \sum_{j\in\Lambda} \frac{\xi - x}{r-1} g_{j,r-1}(\xi) N_{j,r-1} = \frac{\xi - r}{r-1} \frac{(\xi - x)^{(r-2}}{(r-2)!}
\end{aligned}$$

Demnach gilt $(*)$.

Die Behauptung für ein beliebiges $s = 0, \ldots, r-1$ folgt durch $(r - s - 1)$-maliges Ableiten nach ξ. $\square$

Lemma 3.18
Für ein Polynom P vom Grad $\leq r-1$ gilt

$$P(x) = \sum_{j\in\Lambda} c_j(P)N_j(x) \quad \textit{mit} \quad c_j(P) = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi)P^{(\nu)}(\xi) \quad \textit{für ein bel. } \xi \in \mathbb{R}$$

Beweis: Aus der Taylor-Entwicklung an der Stelle ξ sowie dem letzten Lemma folgt

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{(\xi-x)^\nu}{\nu!}P^{(\nu)}(\xi) \\ &= \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu \left(\sum_{j\in\Lambda} g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi)N_j(x)\right)P^{(\nu)}(\xi) \\ &= \sum_{j\in\Lambda} c_j(P)N_j(\lambda) \end{aligned}$$

$c_j(P)$ ist dabei unabhängig von ξ. Hierzu sei τ eine weitere bel. Stelle. Dann folgt aus der Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} P(^\nu)(\xi) &= \sum_{k=\nu}^{r-1} P^{(k)}(\tau)\frac{(\xi-\tau)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \\ \text{Damit ist} \quad c_j(P) &= \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi)\sum_{k=\nu}^{r-1}P^{(k)}(\tau)\frac{(\xi-\tau)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1}(-1)^k P^{(k)}(\tau)\underbrace{\left(g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi)\frac{(\tau-\xi)^{k-v}}{k-v)!}\right)}_{g_j^{(r-k-1)}(\tau)} \end{aligned}$$

□

Beweis: (von Satz 3.15) Es sei nun $S \in S_r(T,A)$ sowie

$$c_j(S) = \sum_{\nu=0}^{r-1}(-1)^\nu g_j^{(r-\nu-1)}(\xi_j)S^{(\nu)}(\xi_j) \quad \text{mit} \quad \xi_j \in (t_j, t_{j+r}) \cap A$$

Ist $\xi_j = t_i$ mit $t_j < t_i < t_{j+r}$, dann müssen die Ableitungen $S^{(\nu)}(t_i)$ für $r-k_i \leq \nu \leq r-1$ nicht notwendiger Weise existieren. Dann ist jedoch $r-\nu-1 \leq k_i - 1$. Da t_i eine Nullstelle von $g_{j,r}$ der Ordnung k_i ist, ist $g_j^{(r-\nu-1)}(\xi_j) = 0$. Demnach sind die Summanden in $(*)$ mit $g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi_j)S^{(\nu)}(\xi_j)$ mit $r-k_i \leq \nu \leq r-1$ gleich 0.

$(**)$ z.z. $S(x) = \sum_{j\in\Lambda} c_j(S)N_j(x), x \in A$, wobei $c_j(S)$ nicht von ξ_j abhängt. O.E. $A = [a,b]$. Nach Lemma 3.18 gilt $(**)$ für Polynom vom Grad $\leq r-1$. Es sei $S_1(x) := (x-t_j)_+^{r-k}$, wobei der Knoten t_i mindestens k-mal in T vorkommt.

Für $P(x) := (x-t_j)^{r-k}$ ist $c_jP) = 0$ falls $t_j < t_i < t_{j+r}$. Denn: $\xi := t_i$ ist eine Nullstelle von $g_{j,r}$, die mindestens die Ordnung k hat. Ferner ist t_i eine Nullstelle von P der Ordnung $r-k$. Damit $g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi) \cdot P^{(\nu)}(\xi) = 0$ für $0 \leq \nu \leq r-1$, also $c_j(P) = 0$.

Damit ist $c_j(S_1) = 0$, falls $t_j < t_i < t_{j+r}$ und beliebiges ξ_j. Denn: Für $\xi_j > t_i$ ist $S_1^{(\nu)}(\xi_j) = P^{(\nu)}(\xi_j)$ und damit $c_j(S_1) = c_j(P) = 0$. Für $\xi_j < t_i$ ist $c_j(S_1) = c_j(0) = 0$. Dies gilt insbesondere für $\xi_j = t_i$, da dann alle Summanden in $(*)$ mit $g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi_j)$ gleich 0 sind (Argumentation wie oben).

Für $x \leq t_i$ gilt damit $\sum_{j\in\Lambda} c_j(S_1)N_j = 0 = S_1(x)$. Für $x > t_i$ gilt

$$S_1(x) = \sum_{j\in\Lambda} c_j(P)N_j(x)$$

Da Polynome und abgeschnittene Potenzen $S_r(T, A)$ aufspannen, gilt $(**)$ für alle $S \in S_r(T, A)$. Die Darstellung $(**)$ ist eindeutig, da $\dim S_r(T, A)$ mit der Anzahl der Funktionen N_j übereinstimmt. □

Bemerkung 3.19 (i) Die Funktionale $c_j(S)$ sind unabhängig von ξ_j und heißen *deBoor-Fix-Funktionale*.

(ii) Die deBoor-Fix-Funktionale bilden eine duale Basis zu N_j, d.h. $c_j(N_i) = \delta_{ij}$.

Satz 3.20
B-Splines haben unter allen Splines $S = S_r(T, A)$ den kleinsten Träger.

Beweis: S verschwinde außerhalb eines endlichen Intervalls I. Angenommen, I enthält weniger als $r + 1$ Knoten. Dann kann ξ_j in Bew. von Satz 3.15 außerhalb von I gewählt werden. Hierfür ist $c_j(S) = 0$ und damit $S \equiv 0$. Also enthält I mindestens $r + 1$ Knoten. Da der Träger von B-Splines genau $r + 1$ viele Knoten enthält, ist die Beh. gezeigt. □

Satz 3.21
Es sei $x \in A$ und x kein Knoten, der mehr als $r - 2$-mal vorkommt. Dann gilt

$$S'(x) = (r-1)\sum_{j\in\Lambda} \frac{c_j - c_{j-1}}{t_{j+r-1} - t_j} N_{j,r-1}(x), \quad c_j := c_j(S)$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Es sei im Folgenden $t_0 = a, t_{n+1} = b$ sowie $|t_{i+1} - t_i| \leq |t_1 - t_0|$ für $i < 0$, $|t_{i+1} - t_i| \leq |t - n + 1 - t_n|$ für $i > n$ sowie J_j das größte Teilintervall (t_i, t_{i+1}) von (t_j, t_{j+1}), das in A enthalten ist (Ist J_j nicht eindeutig, dann ist dasjenige mit kleinstem Index i gemeint). Offenbar gilt $|J_j| \geq \frac{t_{j+r} - t_j}{r}$.

Lemma 3.22
Es existiert eine nur von r abhängige Konstante $c > 0$, so dass für alle $S \in S_r(T, A)$ gilt:

$$|c_j(S)| \leq c|J_j|^{-\frac{1}{p}} \|S\|_{p,J_j}, \quad j \in \Lambda, 0 < p \leq \infty$$

Ferner hängt $c_j(S)$ nur von Werten aus J_j ab.

Beweis: Zusatz folgt mit $\xi_j \in J_j$ in der Definition von $c_j(S)$. Von der Markov-Ungleichung Lemma 3.8, der Kettenregel und Lemma 3.9(Nikolskii) folgt

$$\begin{aligned} |S^{(\nu)}(\xi_j)| &\le c|J_j|^{-\nu}\|S\|_{\infty,J_j} \\ &\le c|J_j|^{-\nu-\frac{1}{p}}\|S\|_{p,J_j} \end{aligned}$$

Außerdem ist

$$|g_{j,r}^{(r-\nu-1)}(\xi_j)| \le c \max_{j<i<j+r} |\xi_j - t_i|^\nu \le c|J_j|^\nu$$

Behauptung folgt aus $(**)$ von Beweis zu Satz 3.15. □

Satz 3.23

Es existiert eine Konstante $D_r > 0$, so dass für $S = \sum_{j\in\Lambda} c_j(S)N_j \in S_r(T,A)$ gilt.

$$\begin{aligned} &D_r\|c'\|_p \le \|S\|_p \le \|c'\|_p, \quad 1 \le p \le \infty \\ &D_r\|c'\|_p \le \|S\|_p \le r^{\frac{1}{p}}\|c'\|_p, \quad 0 < p < 1 \\ &\textit{mit} \quad c' := (c_j'), \quad c_j := c_j(S)\cdot d_j^{\frac{1}{p}}, \quad d_j = \frac{t_{j+r}-t_j}{r}, j \in \Lambda \end{aligned}$$

Beweis: Für $p = \infty$ folgt die folgt die rechte Abschätzung aus der Zerlegung der Eins. Für $1 \le p < \infty$ folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} |S(x)| &= \left|\sum_{j\in\Lambda} c_j(S)\cdot N_j(x)\right| = \left|\sum_{j\in\Lambda} c_j(S)N_j^{\frac{1}{p}}(x)N_j^{1-\frac{1}{p}}(x)\right| \\ &\le \left(\sum_{j\in\Lambda}|c_j(S)|^pN_j(x)\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{j\in\Lambda}N_j(x)\right)^{\frac{1}{p'}} \quad \text{mit } \frac{1}{p'} := 1-\frac{1}{p} \\ &\le \left(\sum_{j\in\Lambda}|c_j(S)|^pN_j(x)\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Aus $\int_{-\infty}^{\infty} N_j(x) = d_j$ (Satz 3.10 v) folgt

$$\|S\|_p^p \le \sum_{j\in\Lambda}|c_j(s)|^pd_j = \|c'\|_p^p$$

Im Fall $p < 1$ gilt

$$\left|\sum_{j\in\Lambda} c_jN_j\right|^p \le \sum_{j\in\Lambda}|c_j|^p|N_j|^p$$

Aus $\int_{-\infty}^{\infty} N_j^p(x)\,dx \le t-j+r-t_j = rd_j$ erhält man $\|S\|_p^p \le \sum_{j\in\Lambda}|c_j(S)|^p\cdot rd_j = r\|c'\|_p$. Aus Lemma 3.22 folgt

$$\begin{aligned} |c_j'|^p &= |c_j(S)|^p\cdot d_j \le |c_j(S)|^p\cdot|J_j| \\ &\le c^p(J_j^{-\frac{1}{p}})^p\left(\int_{t_j}^{t_{j+r}}|S(x)|^p\,dx\right)|J_j| \\ &= c^p\int_{t_j}^{t_{j+r}}|S(x)|^p \end{aligned}$$

$x \in A$ in höchstens r Intervallen (t_j, t_{j+r}) enthalten ist, gewinnt man

$$\|c'\|_p^p = \sum_{j\in\Lambda} |c_j'|^p \leq c_r \|S\|_p^p$$

□

Satz 3.24
Für $S \in S_r(T, \mathbb{R}) \cap L_p$, $0 < p < \infty$ gilt

$$\left\| S - \sum_{j=-m}^{m} c_j(S) N_j \right\|_p \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

Beweis: Aus $S \in L_p$ und $D_r \|c'\|_p \leq \|S\|_p$ folgt, dass $|c_j'|^p$ ist eine Nullfolge

$$\begin{aligned} \left\| S - \sum_{j=-m}^{m} c_j(S) N_j \right\|_p &= \left\| \sum_{|j|>m} c_j(S) N_j \right\|_p^p \\ &\leq c \sum_{|j|>m} |c_j'|^p \to 0 \end{aligned}$$

Lemma 3.22 besagt, dass die deBoor-Fix-Funktionale linear und beschränkt auf $S_r(T, A)$ bzgl. L_1 sind. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach (1), können die c_j zu γ_j auf L_1 fortgesetzt werden mit $|\gamma_j(f)| \leq C(t_{j+1} - t_j)^{-1} \|f\|_{1,J_j}$. Nach Hölder-Ungleichung gilt

$$|\gamma_j(f)| \leq c(t_{j+1} - t_j)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{1,J_j}$$

$$\text{Quasi-Interpolationsoperator:} \quad Q(f) := Q_T(F) := \sum_{j\in\Lambda} \gamma_j(f) N_j$$

Satz 3.25
Für jeden Schoenberg-Raum $S_r(T, A)$ und $f \in L_p(A)$, $1 \leq p < \infty$ ($f \in \mathcal{C}(A)$ für $p = \infty$) gilt

$$\begin{aligned} \|Q_T(f)\|_{p,[t_j,t_{j+1}]} &\leq c_r \|f\|_{p,I_j} \\ \|Q_T(F)\|_{p,A} &\leq c_r \|f\|_{p,A} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $c_r > 0$ sowie $I_j := [t_{j-r+1}, t_{j+r}]$.

Beweis: deBoor

Satz 3.26
Für $f \in L_p(A)$ (bzw. $f \in \mathcal{C}(A)$) gilt

$$\|f - Q_T(f)\|_{p,A} \leq c_r \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{n} E_{r-1}(f, I_j)^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{j=0,\ldots,n} E_{r-1}(f, I_j), & p = \infty \end{cases}$$

wobei $E_{r-1}(f, I_j)$ der lokale Approximationsfehler der algebraischen Polynome von Grad $< r$ ist.

Beweis: $|f(x) - Q_T(x)| \leq |f(x) - P(x)| + |Q_T(f - P, x)|$. Behauptung folgt aus dem vorherigen Satz.

□

A. Maß- und Integrationstheorie

Im folgenden sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition A.1
Es sei T eine Menge und $\Sigma \subset \mathcal{P}(T)$ mit

(i) $\emptyset \in \Sigma$

(ii) $E \in \Sigma \implies T \setminus E \in \Sigma$

(iii) $E_1, E_2 \in \Sigma \implies E_1 \cup E_2 \in \Sigma.$

Dann heißt Σ eine Algebra. *Gilt statt (iii)*

$$E_1, E_2, \ldots \in \Sigma \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma,$$

*dann heißt Σ eine σ-*Algebra.

Proposition A.2

(i) Der Schnitt von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra.

(ii) Die kleinste σ-Algebra von Teilmengen von $\mathbb{R}$, die alle Teilintervalle $I \subset \mathbb{R}$ enthält, heißt σ-Algebra der Borelmengen *von $\mathbb{R}$.*

Satz A.3
Es sei Σ die σ-Algebra der Borelmengen von $\mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Abbildung $\lambda : \Sigma \to [0, \infty]$ mit den Eigenschaften

(i) $\lambda(\emptyset) = 0,$

(ii) $\lambda([a, b]) = \lambda((a, b)) = b - a$, *falls $a < b$,*

(iii) λ ist σ-additiv, d.h. sind die $E_1, E_2, \ldots \in \Sigma$ paarweise disjunkt, so ist

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

(iv) λ ist translationsinvariant, d.h. es gilt

$$\forall s \in \mathbb{R},\ E \in \Sigma : \ \lambda(E) = \lambda(\{s + t \mid t \in E\})$$

Definition A.4
Die Abildung λ aus Satz A.3 heißt Lebesguemaß.

Definition A.5
Eine Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : J \to [0, \infty]$) mit $J \subset \mathbb{R}$ heißt messbar, *falls $f^{-1}([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ eine Borelmenge ist. Eine Funktion $f : J \to \mathbb{C}$ heißt messbar, falls* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *messbar sind.*

Proposition A.6
Eine Funktion f ist genau dann messbar, wenn $f^{-1}(A)$ für jede Borelmenge $A \subset \mathbb{R}$ eine Borelmenge ist.

Definition A.7
Die Funktion

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

heißt Indikatorfunktion *der Menge E. Eine Funktion*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$$

heißt Treppenfunktion, *wobei* $E_1, \dots, E_n \in \Sigma$ *und* Σ *die* σ*-Algebra der Borelmengen ist.*

Satz A.8
Es seien $f, f_n, g : J \to \mathbb{K}$ *Funktionen auf dem Intervall* $J \subset \mathbb{R}$*. Dann gilt:*

(i) Sind f *und* g *messbar, so sind* $f+g$, fg, f/g *(falls* $g(x) \neq 0$ *für alle* $x \in J$*),* αf *mit* $\alpha \in \mathbb{K}$, $|f|$ *sowie* $\max\{f,g\}$ *und* $\min\{f,g\}$ *für* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *messbar.*

(ii) Stetige Funktionen sind messbar.

(iii) Sind $f_1, f_2, \dots,$ *messbar und existiert* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *für alle* $x \in J$*, dann ist* f *messbar.*

(iv) Ist f *messbar, so existiert eine Folge von Treppenfunktionen* (φ_n) *mit*

$$\forall x \in J: \; f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$

und, falls $f \geq 0$ *ist, mit* $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x) \leq \dots$*.*

(v) Ist f *messbar und beschränkt, so existiert eine Folge von Treppenfunktionen* (φ_n)*, die gleichmäßig gegen* f *konvergiert.*

Satz A.9
Das Integral einer Treppenfunktion φ *(wie in Definition A.7)*

$$\int \varphi \, d\lambda := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(E_i).$$

ist wohldefiniert. Ist f *messbar, dann ist auch das Integral von* f

$$\int f \, d\lambda := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\lambda$$

mit einer Folge von Treppenfunktion (φ_n) *gemäß Satz A.8(iv) wohldefiniert.*

Definition A.10

(i) Eine messbare Funktion $f : J \to [0,\infty]$ *heißt (Lebesgue-)*integrierbar*, wenn* $\int f \, d\lambda < \infty$ *ist.*

(ii) Eine messbare Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ *heißt integrierbar, falls* $f^+ := \max\{f,0\}$ *und* $f^- := \min\{f,0\}$ *integrierbar sind. Man definiert*

$$\int f \, d\lambda := \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda.$$

(iii) *Eine messbare Funktion $f : J \to \mathbb{C}$ heißt integrierbar,* $\operatorname{Re} f$ *und* $\operatorname{Im} f$ *integrierbar sind. Man definiert*

$$\int f \, d\lambda := \int \operatorname{Re} f \, d\lambda + i \int \operatorname{Im} f \, d\lambda.$$

Proposition A.11
Die Summe und das skalare Vielfache integrierbarer Funktionen f und g sind integrierbar. Es gilt

$$\forall \alpha \in \mathbb{K} : \int \alpha f + g \, d\lambda = \alpha \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda.$$

Definition A.12
Eine Menge E heißt (Borelsche) Nullmenge, *falls $\lambda(E) = 0$ ist. Eine Funktion f hat eine Eigenschaft fast überall, falls es eine Nullmenge E gibt, so dass f diese Eigenschaft an allen Stelle $x \notin E$ besitzt.*

Definition A.13
Eine Funktion $f : J \to \mathbb{K}$ heißt absolut stetig, *wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt:*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

Proposition A.14
Lipschitz-stetige Funktionen sind absolutstetig.

Satz A.15

(i) *Ist $f : J \to \mathbb{K}$ absolutstetig, so ist f fast überall differenzierbar und die Ableitung f' ist über kompakten Teilintervallen von J integrierbar mit*

$$\forall a, b \in J : \ f(b) - f(a) = \int_a^b f' \, d\lambda.$$

(ii) *Ist $g : J \to \mathbb{K}$ über kompakten Teilintervallen von J integrierbar, $a \in J$ und $f(x) := \int_a^x g \, d\lambda$, so ist f absolutstetig und mit $f' = g$ fast überall differenzierbar .*

Index

Literatur

[1] Heinz Bauer. *Maß- und Integrationstheorie*. De Gruyter, 1990.

[2] Erhard Behrends. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 1987.

[3] Donald L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser, 1980.

[4] Ronald A. DeVore and George G. Lorentz. *Constructive approximation*. Springer, 1993.

[5] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1986.

[6] Arnold Schönhage. *Approximationstheorie*. De Gruyter, 1971.

[7] Dirk Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 1995.