

Analysis I*

Professor Ph. D. A. Griewank,
Dr. L. Lehmann

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen	3
§0 Aussagenlogik	3
§1 Mathematische Beweisverfahren	3
2. Der reelle Körper	4
§2 Die reellen Zahlen: \mathbb{R}	4
§3 Die Körperaxiome	5
§4 Anordnung, Absolutbetrag und Max, Min	6
§5 Vollständigkeit der reellen Zahlen	7
3. Konvergenzverhalten von Folgen und Reihen	8
§6 Folgen und Konvergenz	8
§7 Grenzwertsätze	9
§8 Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß, Cauchy Kriterium	10
§9 Unendliche Reihe	12
§10 b-adische Zahlendarstellung und Überabzählbarkeit der Reellen Zahlen	13
§11 Anwendung Wurzelkriterium und Potenzkriterium	14
4. Stetigkeit	15
§12 Stetigkeit reeller Funktionen	15
§13 Verallgemeinerung von Stetigkeitsverhalten auf \mathbb{R}^n	17

§14 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen	20
§15 Exponentialfunktion und Logarithmus	21
5. Differentiation	23
§16 Definitionen und Grundeigenschaften	23
§17 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz	25
§18 Ableitung höherer Ordnung	26
§19 Differenzierbarkeit von Funktionen und Potenzreihen	27
6. Integration	28
§20 Bestimmtes Integral nach Riemann	28

1. Grundlagen

§0 Aussagenlogik

Definition:

- **Aussagen:** sprachliche Gebilde, die wahr oder falsch, aber nicht jedoch beides, sein können.
- **Junktoren:** verknüpfen Aussagen zu komplexeren Aussagen. Junktoren sind:
 - \neg *Negation* negiert oder nicht
 - \vee *Dissjunktion* oder, \wedge *Konjunktion* und
 - \Leftarrow , \Rightarrow *Implikation* daraus folgt oder impliziert
 - \Leftrightarrow *Äquivalenz* genau dann wenn.
- **Aussagenlogik** beschäftigt sich mit allg. Prinzipien des korrekten Argumentierens und Schließens mit Aussagen und deren Kombinationen.

Satz: Logische Äquivalenzen (Rechenregeln)

- (0) $x \wedge 1 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x \vee 0, x \wedge 0 \Leftrightarrow 0, x \vee 1 \Leftrightarrow 1$
- (i) $x \wedge x \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x \vee x$ Idempotenz
- (ii) $x \wedge y \Leftrightarrow y \wedge x, x \vee y \Leftrightarrow y \vee x$ Kommutativität
- (iii) $(x \wedge y) \wedge z \Leftrightarrow x \wedge (y \wedge z), (x \vee y) \vee z \Leftrightarrow x \vee (y \vee z)$ Assoziativität
- (iv) $(x \wedge y) \vee z \Leftrightarrow (x \vee z) \wedge (y \vee z), (x \vee y) \wedge z \Leftrightarrow (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ Distributivität
- (v) $(\neg(\neg x)) \Leftrightarrow x, x \vee (\neg x) \Leftrightarrow 1$
- (vi) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$ De Morgansche Regel

§1 Mathematische Beweisverfahren

Bemerkung: Beweisverfahren:

1. direkter Beweis (Voraussetzung $V \rightarrow$ Behauptung B)
2. indirekter Beweis $\neg B \rightarrow \neg V$
3. Widerspruchsbeweis, wie indirekter Beweis wenn V trivial ist

4. Induktion (IA (Induktionsanfang), IS(Induktionsschritt): IV (I.-Vorraussetzung) und IB (I.-Behauptung))

Definition: Eine Menge heisst **wohlgeordnet** durch eine strenge Ordnungsrelation $x < y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R} \subset M \times N$, falls $\forall \{x, y, z\} \subset M$

- $x \not< x$ Irreflexivität
- $x < y, y < z \Rightarrow x < z$ Transitivität
- $(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ Trichotomie
- Für jede nichtleere Teilmenge: $N \subseteq M : \exists$ ein kleinstes/minimales Element $n \in N$, so dass $m \in N \Rightarrow (m > n) \vee (n = m) \Leftrightarrow n \leq m$

Bemerkung: Die natürlichen Zahlen und alle endlichen Teilmengen haben diese Eigenschaft. Sie läßt sich erweitern auf überabzählbare Ordnungszahlen.

Satz: Für M wohlgeordnet und $A: M \rightarrow \{0, 1\}$ gilt:

$$\forall n \in M (m \in M : m < n \rightarrow A(m) = 1) \rightarrow A(n) = 1$$

in Worten: falls für beliebiges $n \in M$ aus $A(m) = 1 \forall m < n$ folgt: dass auch $A(n) = 1$, dass gilt: $A(n) = 1 \forall n \in M$. (Prinzip der vollständigen Induktion)

Beispiel: Bernoulli Ungleichung : $(1 + h)^n \geq 1 + nh$

2. Der reelle Körper

Bemerkung:

Mengen \rightarrow geordnete Paare \rightarrow Kartesische Produkte \rightarrow Relationen \rightarrow **Funktionen**

Außerdem: *Relationen* \rightarrow (*Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen*)

Bemerkung: Strukturen: bestehen aus Mengen, ausgezeichneten Elementen und Funktionen z.B. $(\mathbb{N}, 1, n)$; $1 \in \mathbb{N}$ das ausgezeichnete Element, $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Nachfolgerrelation

Bemerkung: Die Addition $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wird rekursiv definiert:

$$a(x, 1) := n(x) \text{ also: } x+1 \text{ ist der Nachfolger von } x$$

$$a(x, n(y)) := n(a(x, y)) \text{ } x \text{ plus Nachfolger von } y \text{ ist Nachfolger von } x+y$$

§2 Die reellen Zahlen: \mathbb{R}

ist nachzulesen im Hefter; Dieser Paragraph teilt sich nicht in Sätzen und Definitionen und ist an sich nur eine Einleitung in die Herleitung der reellen Zahlen.

Bemerkung: Das Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heisst Menge der irrationalen Zahlen, die sich weiter aufteilen in

- die Menge der (irrationalen) algebraischen Zahlen
- die Menge der transzendenten Zahlen

§3 Die Körperaxiome

Definition: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ bilden jeweils **Körper** im folgenden Sinne:

Axiomengruppe I: Additive Gruppeneigenschaften

\exists eine Abbildung $+: K \times K \rightarrow K$ und $+(x, y) = x + y$, so dass gilt:

- (I.1) $\forall x, y, z \in K : (x + y) + z = x + (y + z)$ Assoziativität
- (I.2) $\forall x, y \in K : x + y = y + x$ Kommutativität
- (I.3) $\exists 0 \in K \forall x \in K : x + 0 = x$ Nullelement
- (I.4) $\forall x \in K \exists y \in K : x + y = 0, y = -x$ Negatives Element

Axiomengruppe II: Multiplikative Gruppeneigenschaften

\exists eine Abbildung $\cdot : K \times K \rightarrow K$ und $\cdot(x, y) = x \cdot y$, so dass gilt:

- (II.1) $\forall x, y, z \in K : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ Assoziativität
- (II.2) $\forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$ Kommutativität
- (II.3) $\exists 1 \in K \forall x \in K : x \cdot 1 = x$ Einselement
- (II.4) $\forall x \in K, x \neq 0 \exists y \in K : x \cdot y = 1 ; y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ Negatives Element

Axiomengruppe III: Distributivgesetz

- (III.1) $\forall x, y, z \in K : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$

Bemerkung: In \mathbb{Z} gelten alle diese Axiome außer II.4. Eine solche Struktur heißt **Ring**. \mathbb{N} verletzt sogar auch I.3 und I.4 und \mathbb{N} heißt **Semiring**.

Satz: Die neutralen und die inversen Elemente bezüglich der Addition und Multiplikation in einem Körper sind eindeutig bestimmt. Daraus folgt auch die eindeutige Lösbarkeit der linearen Gleichung: $a + b \cdot x = c$ für gegebene $a, b, c \in K, b \neq 0$ und gesuchtes $x \in K$.

Bemerkung: Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sind sog. binäre Operationen. $-x$ und x^{-1} sind unäre Operationen.

Satz: Verallgemeinerung der Assoziativität und Kommutativität auf endliche Summen und Produkte für Tupel von n Zahlen $(a_j)_{j=1}^n \in K^n$:

$$\sum_{j=1}^n a_j = (((a_1 + a_2) + a_3) + \dots) + a_n = \left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j \right) + a_n$$

$$\prod_{j=1}^n a_j = (((a_1 \cdot a_2) \cdot a_3) \cdot \dots) \cdot a_n = \left(\prod_{j=1}^{n-1} a_j \right) \cdot a_n$$

Durch diese rekursive Definition wird induktiv bewiesen, dass das Produkt bzw. die Summe von $(a_j)_{j=1}^n \in K^n$ wohldefiniert ist.

Lemma: Verallgemeinerung der Distributivität

$$\forall b \in K ; b \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) = \sum_{j=1}^n (b \cdot a_j)$$

Satz: Allgemeine Summen- und Produktnotation

$$\sum_{j=m}^n a_j := \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-m+1} a_{m+j-1} & \text{falls } n \geq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\prod_{j=m}^n b_j := \begin{cases} \prod_{j=1}^{n-m+1} b_{m+j-1} & \text{falls } n \geq m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Spezialfall: $n! = \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = [(n-1)!] \cdot n$

Definition: Binomialkoeffizienten für $k, n \in \mathbb{N} \cup 0$
 $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (n-j) = \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1)$

Lemma: Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

- (i) $\binom{n}{k} \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- (ii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ für $1 \leq k \leq n$

§4 Anordnung, Absolutbetrag und Max, Min

Anordnungsaxiome IV:

- (IV.1) $(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ Trichotomie
- (IV.2) $(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$ Transitivität

- (IV.3) $(x < y) \wedge (z \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x + z < y + z)$ Monotonie der Addition
- (IV.4) $(x < y) \wedge 0 < z \in \mathbb{R} \Rightarrow (zx < zy)$ Monotonie der Multiplikation

Bemerkung: Der Absolutbetrag ist definiert als $|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$

Lemma: Eigenschaften des Betrages

- (0) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Definitheit
- (i) $|xy| = |x||y|$ Homogenität
- (ii) $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ Dreiecksungleichung
- (iii) $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$ inverse Dreiecksungleichung

Definition: Maximum und Minimum

$$\max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y \\ y, & \text{falls } x < y \end{cases} \quad \min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y, & \text{falls } x > y \end{cases}$$

Bemerkung: Es gibt kein neutrales Element bez. min und max, aber Maximum und Minimum sind assoziativ und kommutativ und es gilt das "Distributivgesetz":

$$\max(\min(x, y), z) = \min(\max(x, z), \max(y, z)) \text{ und} \\ \min(\max(x, y), z) = \max(\min(x, z), \min(y, z))$$

Bemerkung: min und max sind erweiterbar auf endliche Argumenttupel

§5 Vollständigkeit der reellen Zahlen

Definition: Sei $M \subset K$ Teilmenge eines Körpers. $s \in K$ heißt **obere Schranke** von M falls $\forall a \in M$ gilt $a \leq s$. M heißt nach oben beschränkt falls ein solches s existiert, sonst nach oben unbeschränkt. $t \in K$ heißt **untere Schranke** von M falls $\forall a \in M$ gilt $a \geq t$. M heißt nach unten beschränkt falls ein solches t existiert, sonst nach unten unbeschränkt.

Definition: Eine obere Schranke s heißt **kleinste obere Schranke** (Supremum), falls gilt: $s \leq s'$, für alle oberen Schranken s' von M , man schreibt: $\sup(M) = s$. Ist t die größte untere Schranke (Infimum) von M , so schreibt man: $\inf(M) = t$.

Bemerkung: $s = \sup(M) = \max(M)$, falls $\sup(M) \in M$.

Bzw. $t = \inf(M) = \min(M)$, falls $\inf(M) \in M$.

Anordnungsaxiome V:

In \mathbb{R} hat jede beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum.

Bemerkung: $\inf(M) = -\sup(-M)$

Anmerkung: verbleibende Anordnungsregeln sind in der ersten Ergänzung zur VL Analysis I* zu entnehmen.

Satz: Existenz und Monotonie von Wurzeln

Für $0 < c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert genau ein $0 \leq x \in \mathbb{R}$, so dass $x^n = c$. Dieses x wird mit $\sqrt[n]{c}$ bezeichnet und ist monoton bezgl. c , d.h. $c' \geq c \Rightarrow \sqrt[n]{c'} \geq \sqrt[n]{c}$

Bemerkung: Der Existenzbeweis für Wurzeln ist nicht konstruktiv, daher der Beweis gibt nicht an, wie für konkretes $c > 0$ sich die Wurzel berechnen lässt. Damit kann/muss diese beliebig durch bestimmte Verfahren angenähert werden.

Beispiel: Für $n = 2$ ergibt sich mit dem Newton-Verfahren eine Beliebige Näherung durch die rekursive Folge

$$x_{k+1} := \frac{x_k + \frac{c}{x_k}}{2} \text{ bzw. Allgemein für beliebiges } n: x_{k+1} := \frac{(n-1)x_k + \frac{c}{x_k^{n-1}}}{n}$$

3. Konvergenzverhalten von Folgen und Reihen

§6 Folgen und Konvergenz

Definition: Abstrakt ist eine reelle **Folge** eine Abbildung f von \mathbb{N} nach \mathbb{R} , wobei üblicherweise direkt die Bilder angegeben werden ($x_n = f(n) \in \mathbb{R}$).

Die Gesamtfolge wird wie folgt hin geschrieben: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (x_n) oder ...

Definition: Eine Folge (x_n) ist **konvergent**, gegen a , falls :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n(\varepsilon) : |x_n - a| < \varepsilon$$

Falls ein solches a existiert heißt die Folge konvergent, sonst divergent.

Bemerkung: Die Definition ist eindeutig, da (x_n) nur ein Grenzwert haben kann.

Bemerkung: Zwei Folgen $(x_n) = x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots$ und $(x'_n) = x'_1, x'_2, \dots$ heißen äquivalent, wenn für ein festes m und alle n gilt: $x'_n = x_{m+n}$, also $x'_1 = x_m; x'_2 = x_{m+1};$ usw.

Lemma: Jede konvergente Folge ist beschränkt in dem Sinne das die Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = f(\mathbb{N})$ beschränkt ist, also eine untere und obere Schranke besitzt.

Definition: Die Folge (x_n) heißt **monoton steigend** bzw fallend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \leq x_{n+1}$ bzw $x_n \geq x_{n+1}$

Satz: Jede monoton steigende, nach oben beschränkte bzw monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert gegen $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ bzw $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Bemerkung: rekursive Bildungsvorschriften, werden auch als Iterationen bezeichnet.

§7 Grenzwertsätze

Satz 7.1: Falls (x_n) und (y_n) gegen a bzw. b konvergieren, gilt:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$; Additivität

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$; Homogenität

Additivität und Homogenität zusammen bezeichnet man als Linearität

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n / \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a/b$, falls $b \neq 0$

Satz 7.2: Monotonie des Grenzwertes

Falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig, so folgt aus $x_n \leq z_n \leq y_n$, für $n \in \mathbb{N}$, dass $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$

und falls sogar $a = b \Rightarrow a = b = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Lemma 7.3: Folgeeigenschaft von $\sup(M)$ und $\inf(M)$

$\forall M \subseteq \mathbb{R}$ gilt $s = \sup(M) \Leftrightarrow s \geq x$ für alle $x \in M \wedge \exists (x_n) \subset M$. $\lim x_n = s$.

Entsprechend auch für $\inf(M)$

Bemerkung: o.B.d.A kann eine Folge (x_n) monoton wachsend, bzw. fallend, für $\inf(M)$ gewählt werden.

Definition: Nullfolge und uneigentliche Grenzwerte

- (I) $(x_n) \in \mathbb{R}$ heißt Nullfolge, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, Summen und Produkte von Nullfolgen, haben dieselbe Eigenschaft
- (II) $(x_n) \in \mathbb{R}$ divergiert gegen ∞ , im Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \forall n \geq n(\varepsilon) : x_n > \frac{1}{\varepsilon}$
- (III) $(x_n) \in \mathbb{R}$ divergiert gegen $-\infty$, im Zeichen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, im Sinne von (II)

Lemma 7.4: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \vee \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$

Bemerkung: Die Umkehrung von **Lemma 7.4** gilt nicht.

Bemerkung: Grenzwertsätze sind auf uneigentliche Grenzwerte erweiterbar:

$$\text{dh. } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c \in \mathbb{R}$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &= \infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm z_n) &= \infty \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot z_n) = \text{sign}(c) \cdot \infty, \text{ falls } c \neq 0 \end{aligned}$$

aber undefiniert sind:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot z_n) &= ?, \text{ falls } c = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) &= ? \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) &= ? \end{aligned}$$

§8 Teilfolgen, Bolzano-Weierstraß, Cauchy Kriterium

Bemerkung 8.1: Aus Konvergenz folgt Beschränktheit, umgekehrt gilt dies nicht, aber aus der Konvergenz folgt auch die Existenz vom einzigen Häufungspunkt, dem Grenzwert, (für Häufungspunkt siehe nächste **Definition 8.2.(II)**) und aus der Existenz genau eines Häufungspunktes und der Beschränktheit folgt wiederum die Konvergenz.

Definition 8.2: Häufungspunkte und Teilfolgen

- (I) $\tilde{x}_n \subset \mathbb{R}$ heißt **Teilfolge** von $(x_n) \subset \mathbb{R}$, falls es eine streng monotone steigende Indexfunktion $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, mit $\tilde{x}_n = x_{h(n)} = x_{n_n} \leftarrow$ Doppelindex
- (II) s heißt **Häufungspunkt** (clusterpoint), falls $s = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{x}_n)$ für eine Teilfolge (\tilde{x}_n) von ursprünglichem (x_n) ist.

Bemerkung: Sehr häufig wird Indexfunktion $h(n)$ nicht expliziert wiedergegeben, sondern (\tilde{x}_n) wird mittels beliebigem Kriteriums aus den Gliedern von (x_n) ausgewählt (z.B. alle positiven Glieder einer Folge). Dann ist nicht immer klar, dass die Teilfolge wirklich unendlich viele Glieder enthält. Das muss dann gegebenenfalls verifiziert werden.

Satz 8.3: Direkte Charakterisierung von Häufungspunkten

$a \in \mathbb{R}$ ist H.P. einer Folge $(x_n) \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \subset \mathbb{N}, \text{card}(M) = \infty : \forall m \in M : |x_m - a| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists m > n : |x_m - a| < \varepsilon$$

bzw.

$a \in \mathbb{R}$ ist kein H.P. einer Folge $(x_n) \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall M \subset \mathbb{N}, \text{card}(M) = \infty : \exists m \in M : |x_m - a| \geq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \forall m > n : |x_m - a| \geq \varepsilon$$

Lemma 8.4:

- (I) Jede Teilfolge (\tilde{x}_n) einer gegen a konvergenten Folge (x_n) hat genau denselben Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x}_n = a$
- (II) Jede Folge hat mindestens eine monotone Teilfolgen, die steigend oder fallend sein kann.

Satz 8.5: Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge und damit mindesten einen Häufungspunkt.

Satz 8.6: lim sup und lim inf

Für eine nach oben beschränkte Folge x_n bezeichne mit $H \subset \mathbb{R}$ die Menge aller seiner Häufungspunkte. Dann hat H ein Supremum, welches sogar als Maximum angenommen wird und mit Limes superior bezeichnet wird.

Man schreibt $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup(H) = \max(H)$

Entsprechend gilt dies auch für eine nach unten beschränkte Menge.

$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf(H) = \min(H)$

Lemma 8.7: Direkte Charakterisierung von lim sup und/oder lim inf

$$s = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : \forall m \geq n(\varepsilon) : x_m < s + \varepsilon$$

und s ist minimal bzgl. dieser Eigenschaft

Mit anderen Worten: Fast alle (=alle bis auf endlich viele) Folgenglieder sind durch $s + \varepsilon$ nach oben beschränkt für beliebiges ε .

Bemerkung: Auch lim sup und lim inf erfüllen bestimmte Rechenregeln ähnlich wie Grenzwerte, die ihre Auswertung oder ihre Abschätzung ermöglichen.

- (i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$; Subadditivität
- (ii) $c > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$; Positive Homogenität
- (ii') $c > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (c + x_n) = c + \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$
- (iii) $c < 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = -c \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} -x_n = c \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$
- (iv) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0 \vee \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$
- (v) $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0 \wedge \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n = b > 0 \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) \leq \frac{1}{b} \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$

Satz 8.8: Eine Folge konvergiert \Leftrightarrow Die Folge ist eine Cauchy-Folge und besitzt also folgende Eigenschaft : $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall m, m' \geq n(\varepsilon) : |x_m - x_{m'}| < \varepsilon$

§9 Unendliche Reihe

Definition: Für eine gegebene Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ bezeichnet man $s_n = \sum_{k=n_0}^n a_k$ für festes n_0 und $n \in \mathbb{N}$, als die Folge der **Partialsommen**. Falls die $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren, schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$

Die rechte Seite nennt man **unendliche Reihe**.

Satz 9.1: Cauchy Kriterium für Reihen: Eine Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergiert \Leftrightarrow

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall m' \geq m \geq n(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m+1}^{m'} a_k \right| < \varepsilon$$

Satz 9.2: Divergenz und Konvergenz der allgemeinen harmonischen Reihe

$$c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^c} = \begin{cases} \infty & \text{falls } c \leq 1 \\ g \in]0, \infty[& \text{falls } c > 1 \end{cases}$$

Bemerkung: Ein notwendiges aber nicht hinreichendes Konvergenzkriterium der Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ ist das (a_n) eine Nullfolge ist.

Satz 9.3: Leibnizkriterium

Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (mit $a_k \cdot a_{k+1} < 0 \forall k \in \mathbb{N}$), für die die Beträge $|a_n|$ eine monoton fallende Nullfolge bilden, ist konvergent.

Definition: Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 9.4: Gewöhnliche Konvergenz folgt aus absoluter Konvergenz. Letzteres ist äquivalent zur Existenz einer Schranke c , so dass $c \geq \sum_{k \in J} |a_k|$, für beliebiges endliches $J \subset \mathbb{N}$.

Lemma 9.5: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{h(k)}$ absolut konvergent ist, für eine beliebige Bijektion $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. MaW.: Absolut konvergente Reihen können also beliebig umsortiert werden.

Bemerkung: Die meisten Konvergenzkriterien für Reihen stellen die stärkere Eigenschaft der absoluten Konvergenz sicher.

Satz 9.6: Eine Reihe muss absolut konvergent sein und somit ein Grenzwert haben, falls

sie folgende Kriterien erfüllt:

(i) Majorantenkriterium : $\forall k \in \mathbb{N} : |a_k| \leq b_k$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$

$\sum b_k$ ist Majorante für $\sum |a_k|$

(ii) Quotientenkriterium : $q = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$

(iii) Wurzelkriterium : $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$

§10 b-adische Zahlendarstellung und Überabzählbarkeit der Reellen Zahlen

Definition 10.1: Mit $z_{-m}z_{-m+1} \dots z_0, z_1z_2z_3 \dots$ werden die Reihen

$$\sum_{k=-m}^{\infty} z_k b^{-k}$$

bezeichnet.

Bemerkung: Hierbei gelten folgende Festlegungen

- $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$
- $m \in \mathbb{N}_0$
- $(z_{k-m})_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \{0, 1, \dots, b-1\}$
- $z_{-m} = 0 \Rightarrow m = 0$
- $\liminf_{k \rightarrow \infty} z_k \neq b-1$

Man nennt b auch die **Basis** der b-adische Zahlendarstellung.

Lemma 10.2: Die Reihen $\sum_{k=-m}^{\infty} z_k b^{-k}$ konvergieren.

Satz 10.3: Jedes $x \in \mathbb{R}$ hat eine eindeutige Darstellung $z_{-m}z_{-m+1} \dots z_0, z_1z_2z_3 \dots$ sodass

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} z_k b^{-k}$$

Definition 10.4: Eine Menge M ist **abzählbar** gdw. M ist endlich oder es gibt eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und M .

Ist M abzählbar und unendlich dann ist M **abzählbar unendlich**. Ist M nicht abzählbar dann ist M **überabzählbar**.

Satz 10.5: \mathbb{R} ist überabzählbar.

§11 Anwendung Wurzelkriterium und Potenzkriterium

Lemma 11.1:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, falls $a > 0$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1$, falls $P(n) = \sum_{j=0}^m c_j n^j \neq 0$

Lemma 11.2: Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ erfüllt genau dann das Quotientenkriterium, wenn dies für $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \frac{P(j)}{Q(j)}$ für beliebige Polynome P, Q gilt.

Satz 11.3: Vergleich von Wurzelkriterium und Potenzkriterium
 r, q seien die entsprechenden Werte aus **Satz 9.6**.

- (i) $r \leq q$ mit $r = q$, falls $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$
- (ii) $r > 1$ impliziert Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Bemerkung: Wurzelkriterium ist genauer als Quotientenkriterium.

Definition: Für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge von Koeffizienten und $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Variable heißt $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ oder $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ eine **Potenzreihe** (am Punkt x_0).

Satz 11.4: Konvergenzradius von reellen Potenzreihen

Falls $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ dann konvergiert die Potenzreihe

$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut $\forall x \in]-\rho, \rho[$, wobei der **Konvergenzradius**

ρ gegeben ist durch $\rho = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{falls } r > 0 \\ \infty, & \text{falls } r = 0 \end{cases}$.

Bemerkung: Die Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius bilden einen linearen Vektorraum.

Lemma 11.5: Falls $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ die Konvergenzradien $\rho_1 > 0$ und $\rho_2 > 0$ haben, dann hat die Linearkombination

$R(x) = \alpha P(x) + \beta Q(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$, für beliebige Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ einen Konvergenzradius $\rho \geq \frac{1}{2} \min(\rho_1, \rho_2) > 0$

Bemerkung: Innerhalb ihres absoluten Konvergenzbereiches können Potenzreihen beliebig genau, durch endliche Partialsummen, angenähert werden.

Satz 11.6: Restgliedabschätzung

Hat $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ den positiven Konvergenzradius $\rho > 0$, dann existiert für jedes $n > 0$ und $\tilde{\rho} < \rho$ ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $|P(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k| \leq c|x|^n$ für $x \in [-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}] \subset [-\rho, \rho]$

Lemma 11.7: Falls $P(x)$ positiven Konvergenzradius hat,

dann existiert ein $\hat{\rho} \in]0, \tilde{\rho}[\subset]0, \rho[$, so dass $x \in]-\hat{\rho}, \hat{\rho}[\Rightarrow P(x) \neq 0 \vee (x = 0 \wedge a_0 = 0)$

Satz 11.8: Identitätssatz von Potenzreihen

Falls $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ einen positiven Konvergenzradius haben und an einer Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \neq x_n$ übereinstimmen, in dem Sinne dass $P(x_n) = Q(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a_k = b_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

Definition: Für zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, bezeichnet die Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, mit $c_n = \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}$, als ihr **Cauchy-Produkt**.

Satz 11.9: Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergieren und mindestens eine der beiden Reihen absolut konvergiert, dann konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt.

4. Stetigkeit

§12 Stetigkeit reeller Funktionen

Definition 12.1: Stetigkeit in einem Punkt x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D : |x_0 - y| < \delta \rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: f ist stetig auf D , falls f stetig in jedem Punkt auf D .

Definition 12.2: Lipschitzstetigkeit

$D \subseteq \mathbb{R}; f : D \rightarrow \mathbb{R}; x \in D$

lokal lipschitzstetig: Es gibt ein $L > 0$ und ein $r > 0$, so dass

$$\forall y, z \in (x - r, x + r) : |f(y) - f(z)| \leq L \cdot |y - z|$$

lipschitzstetig auf D :

$$\exists L > 0 \forall x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

Lemma 12.3: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzstetig in $x \in D$, dann ist f auch stetig in x .

Lemma 12.4: Für jedes $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geq 2$, ist die n -te Potenzfunktion $f(x) = x^n$ lokal Lipschitz-stetig.

Bemerkung 12.5: Jede Polynomfunktion $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, mit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ist lokal Lipschitz-stetig in jedem $x \in \mathbb{R}$

Satz 12.6: Nullstellensatz

Seien $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann gibt es ein $x^* \in [a, b]$, mit $f(x^*) = 0$

Bemerkung 12.7: Sei f ein Polynom ungerade Grades n ,

spezieller : $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in [-1, 1]$, dann hat f eine Nullstelle $\in [-1, 1]$

Bemerkung 12.8: Wurzelfunktionen

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$, ist die Gleichung $x^n - a = 0$, mit $x \geq 0$, eindeutig lösbar.

Definition 12.9: Die einzige Lösung x , der Gleichung $x^n - a = 0$, wird mit $\sqrt[n]{a}$ bezeichnet.

Lemma 12.10: Die Wurzelfunktionen sind stetig.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) : \sqrt[n]{x}$, stetig

Satz 12.11: äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$

Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- f ist in x_0 stetig
- Für jede Folge (x_n) aus D , mit $x_n \rightarrow x_0$, gilt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Bezeichnungen : Seien $f, g \subset \mathbb{R}$, mit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, dann definiert man $\forall x \in D$:

- $f \pm g$ durch $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $f \cdot g$ durch $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- f/g durch $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, falls $g(x) \neq 0$

Bemerkung: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann: $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Satz 12.12: (Rechenregeln)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 , dann sind auch:

- $f \pm g$ stetig in x_0
- $f \cdot g$ stetig in x_0
- f/g stetig in x_0 , falls $g(x) \neq 0$

Satz 12.13: Kompositionen von Funktionen

Seien $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{Im}(g) \subseteq E$ und g stetig in $x_0 \in D$,

f stetig in $g(x_0) \in E$, mit $(E, D \subset \mathbb{R})$

Dann ist $f \circ g$ stetig in x_0

Satz 12.14: (Weierstraß)

Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt (dh. abgeschlossen und beschränkt) und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf K ,

dann existiert ein x^*, x_* , mit

$$f(x^*) = \max f(x), f(x_*) = \min f(x)$$

Bemerkung:

- K kompakt bedeutet : K ist Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle
- Der Satz gilt nicht für (halb-)offene oder uneigentliche Randpunkte des Intervalls (wie etwa $+\infty$)

Definition 12.15: gleichmäßige Stetigkeit

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls gilt :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung:

- Jede glm. stetige Funktion auf D ist auch stetig auf D
- Jede Lipschitzstetige Funktion ist auch glm. stetig
- Es gibt stetige Fkt., die nicht glm. stetig sind

Satz 12.16: (Heine, Borel)

Sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, K kompakt und f stetig auf K , dann ist f auch glm. stetig auf K .

§13 Verallgemeinerung von Stetigkeitsverhalten auf \mathbb{R}^n

Definition: Als Verallgemeinerung des Betrages $|x|$ für $x \in \mathbb{R}^1$ gilt die Euklidische Norm:

$$\|x\| = \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x^{(k)}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \geq 0 \text{ für } x \in \mathbb{R}^n$$

Lemma 13.1: Eigenschaften der euklidischen Norm:

$\ x\ = 0 \Leftrightarrow x = 0$	Definiertheit
$\ \gamma x\ = \gamma \ x\ $ mit $\gamma \in \mathbb{R}$	Homogenität
$\ x \pm y\ \leq \ x\ + \ y\ $	Dreiecksungleichung
$\Leftrightarrow \ x \pm y\ \geq \ \ x\ - \ y\ \ $	

Bemerkung:

$$\left| \sum_{k=1}^n x^{(k)} y^{(k)} \right| \leq \|x\| \|y\|$$

Definition: Eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} = (x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ heißt konvergent, wenn es ein $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)})$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} \|x_k - x\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 &\iff \|x_k - x\|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \iff \sum_{i=1}^n \left| x_k^{(i)} - x^{(i)} \right|^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 &\iff x_k^{(i)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^{(i)} \text{ für } i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Man schreibt dann kurz: $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$.

MaW: Folge von Tupeln oder Vektoren $x_k \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, gdw jede der n Komponentenfolgen konvergiert.

Definition: Eine Untermenge $D \subset \mathbb{R}^n$ wird bezeichnet als

(i) **abgeschlossen**, falls gilt: Wenn $(x_k) \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \mathbb{R}^n$ dann $x \in D$.

MaW jeder Häufungspunkt einer Folge aus D gehört zu D

(ii) **offen** falls $D^C = \mathbb{R}^n \setminus D \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin D\}$ abgeschlossen.

(iii) **beschränkt**, falls $\sup\{\|x\| : x \in D\} < \infty$

(iv) **kompakt**, falls (i) und (iii)

(v) **konvex**, falls für alle $x, y \in D$ und $\alpha \in [0, 1]$ auch $\alpha x + (1 - \alpha)y \in D$

Lemma 13.2: Vereinigung/Durchschnitt

Seien $D, E \subset \mathbb{R}^n$.

(i) wenn D, E abgeschlossen, dann $D \cup E$ und $D \cap E$ abgeschlossen. Das überträgt sich per Induktion auf endlich viele.

(ii) D und E offen $\Rightarrow D \cup E$ und $D \cap E$ offen

(iii) D und E beschränkt $\Rightarrow D \cup E$ und $D \cap E$ beschränkt

(iv) D und E konvex $\Rightarrow D \cap E$ konvex (aber NICHT $D \cup E$)

Definition: Eine Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

(i) **stetig an einem Punkt** $x \in D$, falls $\forall (x_n) \in D$ mit $x_n \rightarrow x : \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$

- (ii) stetig auf der Menge D , falls stetig auf allen $x \in D$. Man bezeichnet die Menge aller auf D stetigen Funktionen mit $C(D)$ (C für continuous).
- (iii) Eine Vektorfunktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig an $x \in D$ gdw. jede der Komponenten der Funktion $F^{(i)}(x)$ die Eigenschaft haben.
 $F = (F^{(1)}(x), F^{(2)}(x), \dots, F^{(m)}(x)) \in C(D) \Leftrightarrow F^{(i)} \in C(D)$ für $i = 1, \dots, m$

Satz 13.3: (Rechenregeln, Verallgemeinerungen von **Satz 12.12**)

- (i) $f, g \in C(D), D \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow f \pm g \in C(D) \ni f \cdot g, f/g \in C(D)$, falls $|g| \neq 0$ für $x \in D$
- (ii) $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $(f \circ g) : E \rightarrow \mathbb{R}$ falls $g(E) \subset D$ $f \in C(D) \wedge g \in C(E) \Rightarrow f \circ g \in C(E)$
 $(g \circ f) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ falls $f(D) \subset E$ $f \in C(D) \wedge g \in C(E) \Rightarrow g \circ f \in C(D)$

Satz 13.4: (Verallgemeinerung von Bolzane Weierstraß, **Satz 12.14**, **Definition 12.15**)
 Falls $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt, gilt

- (i) Alle Folgen $(x_k) \subset D$ haben eine konvergente Teilfolge $(x_{k_i}) \subset D$ sodass
 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = x \in D$ (Folgenkompaktheit)

- (ii) Für $f \in C(D)$ existieren Punkte $x_*, x^* \in D$, sodass für alle $x \in D$:

$$f(x_*) = \inf\{f(x) : x \in D\} \leq f(x) \leq \sup\{f(x) : x \in D\} = f(x^*)$$

Man schreibt dann $x_* = \operatorname{argmin}(f(x), x \in D)$, sowie $x^* = \operatorname{argmax}(f(x), x \in D)$.

- (iii) $f \in C(D) \Leftrightarrow f$ ist gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : \|x - y\| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Bemerkung: argmax und argmin sind als Funktionen im Allgemeinen nicht wohldefiniert, da mehrerer Maxima bzw. Minima vorliegen können. In diesem Falle werden argmax und argmin als Mengen wie folgt definiert:

$$\operatorname{arg max}_f(D) := \{x \in D \mid \forall y \in D : f(x) \geq f(y)\}$$

und

$$\operatorname{arg min}_f(D) := \{x \in D \mid \forall y \in D : f(x) \leq f(y)\}$$

und man schreibt Analog $x^* \in \operatorname{arg max}_f(D)$ bzw. $x_* \in \operatorname{arg min}_f(D)$

Definition: Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt zusammenhängend, wenn es für alle Paare $x, y \in D$ eine Pfadfunktion $p : [0, 1] \rightarrow D$ gibt, sodass $p \in C[0, 1]$ und $p(0) = x$ und $p(1) = y$.

Satz 13.5: Mittelwertsatz

Falls $f \in C(D)$ mit D zusammenhängend, existiert für jedes Paar $x, y \in D$ und jedes $c \in [\min(f(x), f(y)), \max(f(x), f(y))]$ ein $z \in D$ mit $f(z) = c$.

§14 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionsfolgen

Definition 14.1: Eine Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit o.B.d.A. $m = 1$ und $D \subset \mathbb{R}^d$ heißt **punktweise konvergent** gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ falls $\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Man schreibt $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. Äquivalent dazu:

$$f_n \text{ punktweise Konvergent} \Leftrightarrow \forall x \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Definition 14.2: Die Folge $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gegen $f(x)$ **gleichmäßig konvergent**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_\varepsilon : \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Satz 14.3: "Vererbung von Stetigkeit bei glm. Konvergenz"

Falls $(f_n) \subset C(D, \mathbb{R})$ glm. gegen f konvergiert, so ist auch f stetig, d.h. $f \in C(D, \mathbb{R})$.

Bemerkung: Die glm Konvergenz läßt sich für $f_n \subset C(D, \mathbb{R})$ mit kompakten $D \subset \mathbb{R}^d$ wie folgt durch Normnotation darstellen. Die Definition 14.2 ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \text{ für } n \geq n_\varepsilon$$

wobei für beliebiges $g \in C(D, \mathbb{R})$ mit D kompakt

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in D} |g(x)| = \max_{x \in D} |g(x)|$$

Diese Norm hat die in Lemma 13.1 aufgeführten Eigenschaften der Euklidischen Norm. Damit wird $C(D, \mathbb{R})$ zum normierten Raum, in dem man ähnlich argumentieren kann, wie im Euklidischen Raum. Insbesondere gilt:

Satz 14.4: Für kompaktes D konvergiert eine Folge $f_n \subset C(D, \mathbb{R})$ genau dann gleichmäßig gegen ein $f \in C(D, \mathbb{R})$, wenn sie eine Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ im folgenden Sinne ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Bemerkung: Glm. Konvergenz ist hinreichend, aber nicht notwendig für Stetigkeit der Grenzfunktion.

Definition 14.5: Für eine Folge $f_n : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise oder

glm. konvergent, gdw. die Folge der Partialsummen $g_n = \sum_{k=0}^n f_k : D \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise bzw. glm. konvergent ist.

Satz 14.6: Majoranten-Kriterium von Weierstraß

Falls $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, folgt glm. Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f$ aus der Bedingung

$$\|f_n\|_\infty \equiv \max_{x \in D} |f_n(x)| \leq \varphi_n \text{ mit } \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n < \infty$$

d.h. die Skalarreihe der Schranken φ_n muss absolut konvergieren.

Satz 14.7: Falls $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ einen positiven Konvergenzradius $\rho > 0$ hat, so ist die Reihe auf allen Intervallen $[-\tilde{\rho}, \tilde{\rho}] \subset (-\rho, \rho)$ glm. Konvergent und $f(x)$ ist in ganz $(-\rho, \rho)$ stetig.

§15 Exponentialfunktion und Logarithmus

Lemma 15.1: Elementare Eigenschaften des exp:

- (0) $x > 0 \Rightarrow \exp(x) > 1 = \exp(0) > \exp(-x) > 0$
- (1) $x < y \Leftrightarrow \exp(x) < \exp(y)$ Monotonie
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$
- (3) $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x)x^n = 0$

Bemerkung: $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$ und (2) gilt für alle Exponentialfunktionen.

Definition 15.2: Der Spezielle Wert

$e = \exp(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots = 2,7182818284590\dots$ heißt **Eulersche Zahl** und erscheint sehr häufig.

Satz 15.3: Eigenschaften von $\exp(x)$

- (0) e ist irrational und transzendent.
- (1) $\exp\left(\frac{m}{n}\right) = [\exp(1)]^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}}$ für $n, m \in \mathbb{N}$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$

Satz 15.4: Umkehrfunktion f^{-1} für monotonen $f \in C[a, b]$

Falls f auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend, d.h. $x < y \in [a, b] \Rightarrow f(x) < f(y)$, dann ex. inverse Funktion $f^{-1} : E \equiv [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$. Diese Funktion ist auch streng monoton wachsend und stetig. Durch Anwendung auf $-f(x)$ gilt der Satz auch für streng monoton fallende Funktionen. Er gilt ebenfalls für $a = -\infty$ und $b = \infty$.

Definition 15.5: Die nach Verallgemeinerung von **Satz 15.4** existierende Umkehrfunktion von $f(x) = \exp(x) : (-\infty, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus*: $\log(x) = \ln(x) : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$.

Lemma 15.6: Eigenschaften des log

- (0) $\log(1) = 0, \log(e) = 1, \log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$
- (1) $\log(xy) = \log(x) + \log(y), \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{x-1} = \lim_{\tilde{x} \rightarrow 0} \frac{\log(1+\tilde{x})}{\tilde{x}} = 1$
- (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x)}{x^n} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$

Definition 15.7: Allgemeine Potenz und Logarithmen zur Basis $0 < a \in \mathbb{R}$

$$a^x \equiv \exp(x \log(a)) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\log_a(x) \equiv \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \text{für } 0 < x \in \mathbb{R}$$

Lemma 15.8: Für $0 < a \in \mathbb{R}$ gilt:

- (0) $\log_a(a^x) = x$ für $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \log_a(a^x) = Id_{\mathbb{R}}$
 $a^{\log_a(x)} = x$ für $0 < x \in \mathbb{R} \Rightarrow a^{\log_a(x)} = Id_{\mathbb{R}}$
- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a), \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_a(x)}{x-1} = \frac{1}{\log(a)}$
- (2) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

Bemerkung: Ausflug in die komplexen Zahlen:

$$\exp(x + iy) = \exp(x) \exp(iy) = \exp(x) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \right)$$

$$\frac{\exp(x + iy)}{\exp(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y^2)^k}{(2k)!}}_{\equiv \cos(y)} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y(-y^2)^k}{(2k+1)!}}_{\equiv \sin(y)}$$

Schlussfolgerung: Eulersche Formel $\exp(x + iy) = \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y))$

Lemma 15.9:

- (0) $\sin(x) = \frac{1}{2i} (\exp(ix) - \exp(-ix)) = -\sin(-x) \in \mathbb{R}$
 $\cos(x) = \frac{1}{2} (\exp(ix) + \exp(-ix)) = \cos(-x) \in \mathbb{R}$
- (1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\sin(x) \in [-1, 1] \ni \cos(x)$
- (2) $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$
 $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

5. Differentiation

§16 Definitionen und Grundeigenschaften

Definition 16.1: Eine stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** an der Stelle $x_0 \in (a, b)$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dann heißt $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ die **Ableitung** von f an der Stelle x_0 . Wenn f differenzierbar an allen Stellen $x_0 \in (a, b)$ ist, dann bezeichnet f' auch die Ableitungsfunktion $f' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Bemerkung: Alternativ schreibt man auch $\frac{d}{dx}f$ statt f' .

Wichtig:

$c \cdot \exp(x) = c \cdot e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ ist die einzige Klasse von Funktionen, die mit ihrer Ableitung übereinstimmen.

Definition 16.3: Eine Funktion $f \in C(a, b)$ heißt an $x_0 \in (a, b)$ **links- bzw. rechtsseitig differenzierbar**, falls folgende Grenzwerte existieren:

$$f'_-(x) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ bzw. } f'_+(x) \text{ für } h > 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall h \in (-\delta, 0) : \left| \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] - f'_-(x) \right| < \varepsilon$$

Man nennt f'_- und f'_+ dann die links- und rechtsseitige Ableitung und $f(x)$ selbst richtungsdifferenzierbar, an der Stelle x , wenn beide existieren.

Lemma 16.4: Eine Funktion $f \in C(a, b)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar g.d.w die Richtungsableitungen f'_- ; f'_+ existieren und den gleichen Wert haben.

Satz 16.5: (Ableitung von Summen, Produkten und Quotienten)

Falls $f, g \in C(a, b)$ und an x_0 diffbar sind, so sind auch folgende Kombinationen differenzierbar mit den angegebenen Ableitungswerten:

1. $h = \alpha f(x) + \beta g(x)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow h'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$
(Linearität = Additivität und Homogenität)
2. $h(x) = f(x)g(x) \Rightarrow h'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ (Produktregel)
3. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ mit $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow h'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$ (Quotientenregel)

Satz 16.6: (Kettenregel)

Sei $f \in C(a, b)$ an $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar und g auf der Umgebung $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ von

$y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist auch $h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ in der Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ von x_0 differenzierbar und es gilt.

$$h'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0))$$

Definition 16.7: Für $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $x_0 \in D$ ein **lokales Minimum** bzw. **lokales Maximum**, wenn für ein $\delta > 0$:

$$x \in B_\delta(x_0) := \{x \in D : |x - x_0| < \delta\} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) \text{ bzw. } f(x) \leq f(x_0)$$

Falls die Aussage für ein beliebiges δ gilt, heißt x_0 auch **globales Maximum** bzw. **globales Minimum** von f auf D .

Satz 16.8: Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung (betreffend 1. Ableitung).

Sei f auf $[a, b]$ stetig, in (a, b) differenzierbar und an $x = a$ rechts- sowie an $x = b$ linksdiffbar. Dann gilt für jedes lokale Minimum $x_0 \in [a, b]$ entweder:

1. $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$
oder
2. $a = x_0$ und $f'_+(x_0) \geq 0$
oder
3. $x_0 = b$ und $f'_-(x_0) \leq 0$

Bemerkung: Obige Aussagen sind notwendige Bedingungen für Optimalität, hinreichend für Minimalität (lokal) von $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ ist, dass $f'_+(a) > 0$ bzw. $f'_-(b) < 0$. Für Maximalität von f an x_0 gilt die selbe Stationaritätsbedingung $f'(x_0) = 0$ bei $x_0 \in (a, b)$ und am Rand müssen jeweils die Ungleichungen invertiert werden. Allgemein werden Optimierungsprobleme (= Extremwertaufgaben) als Minimierungsprobleme formuliert. Keine Einschränkung, da $\max\{f(x) : x \in D\} = -\min\{-f(x) : x \in D\}$.

Satz: (Nachtrag) Hinreichende Bedingung für Maxima

Sei $I = [a, b]$

$f \in C^2(I)$, $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$.

- $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ ist ein lokales Maximum von f
- $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ ist ein lokales Minimum von f

Satz 16.9: (Zwischenwertsatz der Differentiation)

Falls $f \in C(a, b)$ und differenzierbar in (a, b) , existiert mindestens ein **Zwischenwert** x

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) \text{ bzw. } f(b) - f(a) = f'(x)(b - a)$$

Lemma 16.10: Eine auf (a, b) differenzierbare Funktion f , ist streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend, wenn

$$\forall x \in (a, b) : f'(x) > 0 \text{ bzw. } \forall x \in (a, b) f'(x) < 0$$

Sie kann auch schwach monoton sein, wenn diese Ungleichungen schwach erfüllt sind. D.h \geq bzw. \leq .

Satz 16.11: (Existenz und Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen)

Falls die Ableitung $f'(x)$ von $f(x)$ für alle $x \in (a, b)$ existiert und positiv (größer 0) ist, so besitzt $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ eine Inverse $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$. Diese ist für alle $y \in (f(a), f(b))$ diffbar und es gilt:

$$[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

wobei $y_0 = f(x_0)$ bzw. $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Die Aussage gilt entsprechend, wenn $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$

Lemma 16.12:

1. $\frac{d}{dx} \log(x) = \frac{1}{x}$
2. $\frac{d}{dx} x^y = y \cdot x^{y-1}$ für $0 < x \in \mathbb{R}$
3. $\frac{d}{dx} y^x = \log(y) \cdot y^x$ für $0 < y \in \mathbb{R}$

Satz 16.13: Sei f auf $[a, b]$ stetig, auf (a, b) diffbar, dann ist f auf $[a, b]$ Lipschitz-stetig gdw.

$$L_0 \equiv \sup(|f'(x)| : a < x < b) < \infty$$

Falls L_0 endlich ist, so ist L_0 die kleinste mögliche Konstante auf $[a, b]$.

§17 Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Satz 17.1: Satz von Rolle

Sei $a < b$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$ und f differenzierbar auf (a, b) . Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Satz 17.2: Verallgemeinerter Mittelwertsatz (**Satz 16.9**)

Seien $f, g \in C[a, b]$ und differenzierbar in (a, b) und $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Dann existiert ein $z \in (a, b)$ sodass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

Satz 17.3: Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$ mit $f'(a) \neq f'(b)$. Dann nimmt f' jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ (also in $[f'(a), f'(b)]$ bzw. $[f'(b), f'(a)]$) an.

Bemerkung: f' muss hierzu nicht stetig sein!

Satz 17.4: Satz von l'Hopital

Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$.

Außerdem gelte:

- $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ oder
- $\lim_{x \rightarrow b} |g(x)| = \infty$

Falls $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, dann auch $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide sind gleich.

§18 Ableitung höherer Ordnung

Definition: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt k -mal differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, wenn $\forall 0 \leq i < k$ folgende Grenzwerte existieren:

$$f^{(i+1)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(i)}(x_0 + h) - f^{(i)}(x_0)}{h}$$

- $C^k(a, b)$ ist der Raum aller auf (a, b) k -mal differenzierbaren Funktionen wobei $C^0 = C$.
- $C^\infty(a, b) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(a, b)$

Satz 18.1: Leibnizregel

Sei $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal auf I differenzierbar. Dann ist $f \cdot g$ k -mal auf I differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)^{(k)}(x_0) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x)$$

Satz 18.2: Taylor-Formel

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $x_0 \in I$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

$(n+1)$ -fach differenzierbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\vartheta \in [0, 1]$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Korollar: Schlömilch-Restterm

$\forall x \in I, m \in \{1, 2, \dots, n+1\} \exists \vartheta \in [0, 1]$ mit

$$f(x) = P_{x_0}(x) + f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \frac{(1 - \vartheta)^{n-m+1} (x - x_0)^{n+1}}{n! \cdot m}$$

wobei

$$P_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Definition: Sei $I = [a, b]$, $a < b$ ein Intervall und $f \in C^\infty(I)$ mit $x_0 \in I$.

Dann heißt f um x_0 als **Taylorreihe** entwickelbar, wenn es eine Umgebung $U \subset I$ von x_0 existiert, sodass

$$\forall x \in U : \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0, x) = 0$$

§19 Differenzierbarkeit von Funktionen und Potenzreihen

Korollar: Aus der Linearität der Ableitung (**Satz 16.5**) folgt:

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n f'_k(x)$$

vorausgesetzt, dass f_1, \dots, f_n in x definiert und differenzierbar sind.

Satz 19.1: Seien $f_n \in C([a, b])$ in $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sei für alle $x \in [a, b]$ differenzierbar

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)$ konvergiere

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} L_n < \infty$, f_n sei Lipschitz-stetig mit Konstante $L_n \forall n \in \mathbb{N}$

Dann ist $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_0)$

Lemma 19.2: Sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$, dann ist f für jedes $x \in (-\rho, \rho)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x_0^{k-1} \text{ bzw. } f^{(i)}(x_0) = \sum_{k=i}^{\infty} \frac{k!}{(k-i)!} \cdot a_k \cdot x_0^{k-i}$$

Die Reihe zu f' hat ebenfalls Konvergenzradius ρ .

6. Integration

§20 Bestimmtes Integral nach Riemann

Definition 20.1:

$\int_a^b f(x)dx$ heißt **Integral** falls für alle geeigneten Funktionen $f, g : [a, b]$ gilt:

1. $\int_a^b \gamma \cdot f(x)dx = \gamma \cdot \int_a^b f(x)dx$ für $\gamma \in \mathbb{R}$ (Homogenität)
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ (Additivität)
3. $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ falls $\forall f(x) \leq g(x)$ (Monotonie)
4. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq (b - a) \|f\|_\infty$ (Beschränktheit)

wobei hierfür $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty$ vorausgesetzt wird.

Definition 20.2:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **stückweise konstant**, wenn es eine **Zerlegung** $Z = (x_i)_{i=0}^n$ gibt, so dass

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

und es existieren $(c_i)_{i=1}^n$ mit $c_i = f(x)$ für $x \in (x_{i-1}, x_i)$.

$$f(x_i) \in [\min(c_i, c_{i+1}), \max(c_i, c_{i+1})]$$

Die Menge dieser **Treppenfunktionen** bezeichnen wir mit $\mathcal{T}[a, b]$.

Lemma 20.3:

Falls f, \tilde{f} mit Zerlegungen Z, \tilde{Z} zu $\mathcal{T}[a, b]$ gehören, so gilt dies auch für $\gamma f, f + \tilde{f}$ und $f \cdot \tilde{f}$. Für letztere ist die Zerlegung $Z \cup \tilde{Z}$ geeignet. (Hierbei müssen die Elemente von $Z \cup \tilde{Z}$ neu geordnet werden.)

Definition 20.4:

Für $f \in \mathcal{T}[a, b]$ ist das Integral

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot c_i \in \mathbb{R}$$

eindeutig definiert und erfüllt die in **Definition 20.1** geforderten Eigenschaften.

Bemerkung:

Linearität und Beschränktheit implizieren, dass für $f, g \in \mathcal{T}[a, b]$ gilt

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \right| = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right| \leq (b - a)\|f - g\|_\infty$$

M.a.W das Integral als Abbildung des linearen Raumes $\mathcal{T}[a, b]$ in die reellen Zahlen ist Lipschitz-stetig.

Definition 20.5:

Falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ der Grenzwert einer Folge von $f_n \in \mathcal{T}[a, b]$ im Sinne von $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist, dann definiert

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

eindeutig das Integral.

Satz 20.6:

Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau dann eine Folge $f_n \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, wenn

$$f_+(x) = \lim_{h \searrow 0} f(x + h) \text{ für } x \in [a, b)$$

und

$$f_-(x) = \lim_{h \nearrow 0} f(x + h) \text{ für } x \in (a, b]$$

existieren.

M.a.W f muss auf ganz $[a, b]$ links- und rechtsstetig sein. (Es kann abzählbar viele Sprünge geben mit $f_+(x) \neq f_-(x)$.)

Definition: Für beliebiges $f \in Re[a, b]$ ist das Integral definiert durch:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}[a, b]$ eine beliebige gegen f konvergierende Folge von Funktionen ist, daher es gilt

$$\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Satz 20.7: Das oben definierte Integral für $f \in Re[a, b]$ erfüllt die in **Definition 20.1** verlangten Eigenschaften.

Hierarchie von linearen Funktionenräumen auf $[a, b] \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}[a, b], C[a, b] \subset Re[a, b] \subset B[a, b]$$

$B[a, b]$ ist der Raum der Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die beschränkt sind in dem Sinne, dass $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} < \infty$

$Re[a, b]$ ist der Raum der richtungsstetigen (regulated) Funktionen für die

$$f_+(x) = \lim_{h \searrow 0} f(x+h) \text{ für } x \in [a, b)$$

$$f_-(x) = \lim_{h \nearrow 0} f(x-h) \text{ für } x \in (a, b]$$

existieren.

$C[a, b]$ ist der Raum der stetigen Funktionen für die $f_-(x) = f_+(x)$ für $x \in]a, b[$

Bemerkung: Da sowohl stetige wie auch monoton fallende oder steigende Funktionen überall richtungsstetig, also $\in Re[a, b]$ sind, ist die Existenz des *bestimmten Integrals* für diese wichtigen Funktionenklassen gesichert.

Wie lassen sich Integrale konstruktiv auswerten?

1. Mit Riemann-Summen \Rightarrow (Numerische Lösung)
2. Durch symbolische Umkehrung der Differentiationsregeln \Rightarrow Nutze Computer-Algebra-Systeme

Definition 20.8:

Für $f \in B[a, b]$ und eine Zerlegung $Z = (x_i)_{i=0}^n$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$ und $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ beliebige Stützstellen, setze

$$R(f, Z, z) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot f(z_i)$$

Die **Feinheit** $\|Z\| = \max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1 \dots n\} \in \mathbb{R}$ misst die Genauigkeit der Riemannschen Summe.

Satz 20.9:

Für $f \in Re[a, b]$ und eine beliebige Folge von Zerlegungen Z_n mit Stützstellen z_n gilt:

$$\|Z_n\| \rightarrow 0 \Rightarrow R(f, Z_n, z_n) \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Bemerkung:

Der Satz beweist, dass Richtungsstetigkeit hinreichend für die Konvergenz der Riemann-Summen gegen einen eindeutigen Grenzwert, nämlich das Integral, ist. Richtungstetigkeit ist jedoch nicht notwendig.

Kette von linearen Teilräumen

$$\mathcal{T}[a, b] \subset Re[a, b] = \overline{\mathcal{T}}[a, b] \subseteq Ri[a, b] \subset B[a, b]$$

,wobei $\overline{\mathcal{T}}[a, b]$ den Abschluss über die Treppenfunktionen und $Ri[a, b]$ die Riemann-integrierbaren Funktionen darstellt.

Definition 20.10:

Eine beschränkte Funktion f heißt **Riemann-integrierbar**, wenn die Riemann-Summen $R(f, Z_n, z_n)$ für beliebige Z_n mit $\|Z_n\| \rightarrow 0$ gegen einen Grenzwert konvergieren, der dann als **Riemann-integral** bezeichnet wird.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, Z_n, z_n) \in \mathbb{R}$$

Satz 20.11:

Das Riemannintegral erfüllt auf dem linearen Raum $Ri[a, b]$ der Riemann-integrierbaren Funktionen, die in **Definition 20.1** geforderten Eigenschaften.

Lemma 20.12:

Für $c \in (a, b)$ gilt $f \in Ri[a, b] \Leftrightarrow f \in Ri[a, c] \wedge f \in Ri[c, b]$. In diesem Falle gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$