Numerik partieller Differenzialrechnung
Prof. Carstensen

Winterssemester 2010
Übung von Paul Boeck
Letzte Änderung: 18. Oktober 2011

Inhaltsverzeichnis

1 18.10.2011

1.1 Lebesgue

- Lebesgue $L^p(\Omega) = \{\bar{f} : \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ messbar und $\|f\|_p < \infty\}$.
  strikt betrachtet: Äquivalenzklasse von Fktn. bzgl. „Gleichheit fast überall“. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, offen, nichtleer, beschränkt und zusammenhängend.
- $\mathcal{D}(\Omega) \equiv \mathcal{C}_c^\infty = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}} \subset\subset \Omega\}$ dicht in $L^p(\Omega)$ (für $1 \leq p < \infty$).
- Praise Representation: Standardrepräsentant von $\bar{f}$ als Funktionsklasse

  $$⨍_w \ldots\, dx := \text{Integralmittel auf } w := \int_w \ldots\, dx/|w|$$

  $|w|$:= Lebesgue–Maß von w. $B(x,\delta)$:= Kugel um x mit Radius δ.

  $$f^*(x) := \begin{cases} \lim ⨍ \bar{f}(x)\, dx & \text{, falls der Limes existiert} \\ \delta \to 0 \quad B(x,\delta) \cap \Omega & \text{, für } x \in \bar{\Omega}. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

  x heißt Lebesgue–Punkt, falls Limes existiert zu f. Eine Lebesgue–Funktion $f \in L^1(\Omega)$ hat Lebesgue–Punkt fast überall.
  D.h. $f = f^*$ f.ü. in Ω.
  $\|\cdot\|_p := \sqrt[p]{\int_\Omega |\cdot|^p\, dx} \quad (1 \leq p < \infty)$.

1.2 Sobolev

$\|f\|_{|p} := \sqrt[p]{\|f\|_p^p + \sum_{j=1}^n \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_p^p}$ für $f \in L^p(\Omega)$ mit Ableitung $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$ in $L^p(\Omega)$ im schwachen Sinne.

Definition 1.2.1
$f, g \in L^1(\Omega)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann heißt g die j-te partielle Ableitung von f (Schreibweise $g =: \partial f/\partial x_j$) falls

$$\int_\Omega f \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega g\varphi\, dx \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

.

Aufgabe Man beweise $g = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ ist schwach j-te partielle Ableitung von $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Beweis:
- $n = 1 = j$, $\Omega = (a,b)$. Beh: $\int_a^b f\varphi'\, dx = -\int_a^b f'\varphi\, dx$ für $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Das gilt, da

  $$\int_a^b (f\varphi)'\, dx \overset{\text{HS}}{=} (f\varphi)(b) - (f\varphi)(a) = 0$$

  Mit Produktregel $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$ ist Beh. bewiesen.
- $n = 2, j = 1, \Omega = (a,b) \times (c,d)$ Rechteck. Beh: $\int_\Omega f \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = -\int_\Omega \varphi \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx$

  Beweis: ID–Formel für partielle Fktn $f(x,y)\varphi(x,y)$ von x zeigt $\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)\varphi(x.y))\, dx = 0$ für jedes $c < y < d$. Integration über y ist möglich (da $\operatorname{supp}(f\varphi) \subset\subset \Omega$) und zeigt $\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_1}(f\varphi)\, dx = 0$ □
- Funktioniert für bel. n. □

Beispiel $f \in \mathcal{C}(0,1)$ mit $f \in \mathcal{C}^1((0,x_1) \cup (x_1,x_2) \cup \ldots \cup (x_m,1))$ für Partition $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m < 1$ ist schwach diffbar mit f' =punktweise Ableitung bis auf Nullmenge $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Beispiel Lipschitz–stetige Fktn. sind schwach diffbar. (Satz von Rademacher: Lipstetige Fktn ist f.ü. diffbar.)

Definition 1.2.2
$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega \mid \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \right.$ *ex. im schwachen Sinne und* $\left. \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \in L^p(u) \right\}$

Beispiel Heaviside $H(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$ ist *nicht* schwach diffbar. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}} H\varphi' \, dx = \int_0^\infty \varphi'(x) \, dx = -\varphi(0) =: -\langle \delta, \varphi \rangle \quad \text{für Dirac Funktional } \delta$$

δ ist keine Lebesgue–Funktion, denn sofern $g \in L^2(\mathbb{R})$ erfüllt $\int_R g\varphi \, dx = \varphi(0)$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ folgt $g|_{(0,\infty)} \in L^2(0,\infty)$ und $\mathcal{D}(0,\infty)$ liegt dicht in $L^2(0,\infty)$. D.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists g_\varepsilon \in \mathcal{D}(0,\infty)$ mit $\|g - g_\varepsilon\|_{L^1(0,\infty)} < \varepsilon$. Da $\mathcal{D}(0,\infty) \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R})$ folgt $\forall \psi \in \mathcal{D}(0,\infty), \int_0^\infty g\psi \, dx = 0$. Z.B. $\int_0^\infty g g_\varepsilon \, dx = 0$. Also

$$\begin{aligned} \|g\|^2_{L^2(0,\infty)} &= \|(g - g_\varepsilon) + g_\varepsilon\|_{L^2(0,\infty)} = \underbrace{\|g - g_\varepsilon\|^2_{L^2(0,\infty)}}_{<\varepsilon^2} + \|g_\varepsilon\|^2_{L^2(0,\infty)} + 2\int_0^\infty g_\varepsilon(g - g_\varepsilon) \, dx \\ &< \varepsilon^2 - \|g_\varepsilon\|^2_{L^2(0,\infty)} + 0 < \varepsilon^2 \to 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{also} \quad \|g\|_{L^2(0,\infty)} \end{aligned}$$

Satz 1.2.3 (Meyers–Serrin)
Für Lipschitz–Gebiet Ω *liegt* $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) | \|f\|_{1,p} < \infty\}$ *dicht in* $W^{1,p}(\Omega)$.
Anders gesagt: Sobolew–Räume entstehen durch Vervollständigung oder die Funktionen mit schwacher Ableitung.

Die Spurbildung $f^*|_{\partial\Omega}$ von einer Sobolev–Funktion f führt auf eine lineare stetige Abbildung $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{L}^p(\partial\Omega)$ erfüllt $f(x) = (\gamma f)(x)$ für $f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega$ und $x \in \partial\Omega$.

Aufgabe (zum nächsten mal) T Dreieck mit Kante E und gegenüberliegender Ecke P und $f \in \mathcal{C}^1(T)$ erfüllen

$$⨍_E f \, ds = ⨍_T f \, dx + \frac{1}{2} ⨍_T \nabla f(x) \cdot (x - p) \, dx \quad \text{(Spuridentität)}$$

Hinweis: Partielle Integration mit Randterm.