Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
Unter den Linden 6, D-10099 Berlin

Prof. Dr. Andreas Schröder

Übungsaufgaben für Einführung in die Approximationstheorie (SS 2012)

Serie 3

Aufgabe 1

Beweisen Sie den Satz 1.34 aus der Vorlesung! Für eine orthonormale Basisfolge $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

1. $(e_n, e_k) = \delta_{nk}$.

2. $f_n = \sum_{\nu=1}^{n}(f, e_\nu)e_\nu$, f_n ist Proximum von f in U_n.

3. $|f|^2 = \delta_n^2(f) + \sum_{\nu=1}^{n}|(f, e_\nu)|^2$ (*Parsevalsche Gleichung*) und es gilt die *Besselsche Ungleichung*

$$|f|^2 \geq \sum_{\nu=1}^{\infty}|(f, e_\nu)|^2.$$

4. $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann abgeschlossen (d.h. $\overline{U} = R$), falls die Parsevalsche Gleichung erfüllt ist

$$|f|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}|(f, e_\nu)|^2 \quad \text{für alle } f \in T \subseteq R,$$

wobei T dicht in R ist.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Satz 2.6 aus der Vorlesung:

1. Durch $\mathcal{C}[-1,1] \ni g \mapsto f \in \tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^0$ mit $f(x) = g(\cos x)$ wird eine Normisomorphie zwischen $\mathcal{C}[-1,1]$ und $\tilde{\mathcal{C}}_{2\pi}^0$ festlegt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass der Unterraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in L_w^p enhalten ist. (Der zugehörige Satz 2.21 der Vorlesung, wird am 21.06. vorgestellt).