Algebra I 2009, Blatt 10

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Sei R ein kommutativer Ring. Die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- R ist ein Körper.
- Jedes Hauptideal von R, ein Primideal ist.

2. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und $A, B, M, N, P \in K$, beliebige Elemente. Definiert man zwei Verknüpfungen aus K, durch

$$x \oplus y := A(x+y) + B, \quad x \otimes y := Mxy + N(x+y) + P,$$

für jede $x, y \in K$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. $(K, \oplus, \otimes)$ ist ein Ring.
2. $(K, \oplus, \otimes)$ ist ein Körper.
3. $(K, \oplus, \otimes)$ ist ein Körper isomorph zu $(K, +, \cdot)$.
4. $A = 1,\ M \neq 0,\ B = NM^{-1},\ MP = N(N-1)$.

3. Sei $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Zeigen Sie, dass die Idealen $\mathfrak{p}_1 := (1+\sqrt{-5}, 2)$, $\mathfrak{p}_2 := (1-\sqrt{-5}, 2)$, $\mathfrak{p}_3 := (1+\sqrt{-5}, 3)$ und $\mathfrak{p}_4 := (1-\sqrt{-5}, 3)$ Primidealen von R sind.
2. Zeigen Sie, dass
$$(2) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$$
,
$$(3) = \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4$$
und
$$(6) = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2 \cdot \mathfrak{p}_3 \cdot \mathfrak{p}_4.$$

4. Beschreiben Sie alle Ringhomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$.

5. Beweisen Sie, dass die Einheiten des Ringes $\mathbb{Z}_{p^n}$, wobei p eineungerade Primzahl ist und $n \in \mathbb{N}$, eine zyklische Gruppe bilden.

6. Sei K ein Körper. Finden Sie einen Unterring A des Polynomringes $K[X]$, mit $K \subset A, K \neq A$, A ist kein Körper und A nicht isomorph zu $K[X]$ ist.

7. Zeigen Sie, dass $T := (r\mathbb{Z} - \{0\}) \cup \{1\}$ ein multiplikatives System von $\mathbb{Z}$ und $T^{-1}\mathbb{Z}$ isomorph zu $\mathbb{Q}$ ist. Zeigen Sie, dass jeder Unterring von $\mathbb{Q}$ ist auf der Form $S^{-1}\mathbb{Z}$, wobei $S \subset \mathbb{Z}$ ein multiplikatives System ist.

8. Sei R ein kommutativer Ring und $S \subset R$ ein multiplikatives System. Beschreiben Sie alle invertierbaren Elemente von $S^{-1}R$.

Sei $f \in R$ ein Elemnt das kein Nullteiler ist und $S := \{f^n : n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ isomorph zu $R[X]/(Xf - 1)$ ist.