Algebra I 2009, Blatt 11

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Sei R ein Hauptidealring und $S \subset R$ eine multiplikative Menge. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ auch ein Hauptidealring ist.

2.

1. Zeigen Sie, dass in dem Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, die Elementen 6 und $2(1 - i\sqrt{5})$ keinen grössten gemeinsamen Teiler haben.
2. Zeigen Sie, dass an der anderen Seite, die Elementen 3 und $1+i\sqrt{5}$ einen grössten gemeinsamen Teiler besitzen.

3.

1. Finden Sie alle invertierbare Elementen in dem Ring $R := \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.
2. Sei $R := \mathbb{Z}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Finden Sie den grössten gemeinsamen Teiler von 5 und $-1 + 2i$.

4. Beweisen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]$ besitzt unendliche viele irreduzible Elementen. Zeigen Sie, dass $7 + 12i \in \mathbb{Z}[i]$ ein Primelement ist.