Algebra I 2009, Blatt 12

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ein euklidisher Ring ist.

2.

- Sei $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Unter der Bedingung dass $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ ein Primelement ist, beweisen Sie, dass $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ auch prim ist.
- Finden Sie die Zerlegung von $18 + 36i \in \mathbb{Z}[i]$ in Primfaktoren.

3.

- Sei R ein euklidisher Ring und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge. Dann ist die Lokalisierung $S^{-1}R$ auch ein euklidischer Ring.
- Richtig oder falsch? Ein Unterring eines faktoriellen Ringes ist auch faktoriell. Begründen Sie Ihre Antwort.

4.

- Zeigen Sie, dass den Ring $\mathbb{Z}[i]$ unendlich viele Primelemnte enthält.
- Zeigen Sie, dass den Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{26}]$ nicht faktoriell ist.
- Ist der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ faktoriell?