Algebra I 2009, Blatt 2

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Sei G eine Gruppe und definiert man das Zentrum der Gruppe G, durch

$$Z(G) := \{a \in G : a \cdot g = g \cdot a, \text{ für alle } g \in G\}.$$

- Zeigen Sie, dass $Z(G)$ ein Normalteiler von G ist.
- Falls die Faktorgruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist, zeigen Sie, dass die Gruppe G abelsch ist.
- Bestimmen Sie das Zentrum $Z(D_{2n})$ der dihedralen Gruupe D_{2n}.

2. Sei G eine Gruppe, und $H, K \subset G$ zwei Normalteilern von G. Falls, beide G/H und G/K abelsche Gruppen sind, zeigen Sie, dass $G/H \cap K$ auch abelsch ist.

3. Sei p eine prim Zahl, und betrachtet man die Menge

$$\mathbb{C}_{p^n} := \{z \in \mathbb{C}^* : z^{p^n} = 1\}.$$

- Zeigen Sie, dass
$$1 = \mathbb{C}_{p^0} < \mathbb{C}_p < \mathbb{C}_{p^2} < \ldots < \mathbb{C}_{p^n} \ldots .$$
- Beweisen Sie dass die Menge
$$\mathbb{C}_{p^\infty} := \cup_{n \geq 0} \mathbb{C}_{p^n}$$
eine Untergruppe von $\mathbb{C}^*$ ist, und jede Untergruppe von $\mathbb{C}_{p^\infty}$ auf der Form $\mathbb{C}_{p^n}$, mit $n \in \mathbb{N}$ ist.

4. Sei $SL_2(\mathbb{R}) := \{\gamma := \begin{pmatrix} a & b \\ c & c \end{pmatrix} : ad - bc = 1\}$, und $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$(\gamma, z) \mapsto \gamma \cdot z := (az + b)(cz + d)^{-1}$$

eine Aktion von $SL_2(\mathbb{R})$ definiert.