Algebra I 2009, Blatt 3

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Sei $(\mathbb{Q}, +)$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen, und für alle $n \geq 1$, definiert man die Menge

$$H_n := \{\frac{m}{n!} : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Zeigen Sie, dass (1) $H_n \leq H_{n+1}$ und (2) $\cup_{n \geq 1} H_n = \mathbb{Q}$. Dann, beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}$ nich endlich erzeugt ist, d.h. keine endliche Menge $A \subset \mathbb{Q}$ gibt, mit $\langle A \rangle = \mathbb{Q}$.

2. Sei H eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ mit $H \neq \{0\}$ und $H \neq \mathbb{Q}$. Beweisen Sie, dass die Faktorgruppe $\mathbb{Q}/H$ unendlich ist, und kann nicht zyklisch sein.

3.

- Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $|G : H| = n$. Konstruieren Sie einen inkektiven Gruppenmorphismus

$$G/H_G \to S_n,$$

  wobei $(S_n, \circ)$ die Symmetrischegruppe ist.

- Sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler der Ordnung $|G|$. Zeigen Sie, dass jede Untergruppe $H \leq G$ mit $|G : H| = p$, ein Normalteiler von G ist.

4.

- Sei G eine Gruppe mit $|G| = 6$. Dann ist G isomorph zu S_3 oder $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. (Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Cauchy).

- Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe von Ordunung p^2. Dann ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.