Algebra I 2009, Blatt 4

Prof. Dr. Gavril Farkas, HU Berlin

1. Sei G eine endliche Gruppe, $H \subset G$ ein Normalteiler und $f : G \to G/H$ die kanonische Projektion und $P \leq G$ eine p-Sylow Untergruppe. Zeigen Sie die folgenden beiden Aussagen:

1. Der Durschnitt $P \cap H \leq H$ ist eine p-Sylow Untergruppe von H.
2. Das Bild $f(P) \leq G/H$ ist eine p-Sylow Untergruppe von G/H.

2. Sei $G = D_n$ die dihedrale Gruppe von Ordnung $\mathrm{ord}(G) = 2n$, mit $n \geq 3$. Bewisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt genau eine zyklische Untergruppe $N \leq G$ vom Index $|G : N| = 2$.
2. Es gibt genua n nichtzentrale Elemente $x \in G - Z(G)$ von Ordnung $\mathrm{ord}(x) = 2$.
3. Sei $x \in G$ ein nichtzentrales Element mit $\mathrm{ord}(x) = 2$ und $H = \{e, x\}$ die davon erzeugte Untergruppe, und $X := G/H$ die zugehörige Quotientmenge. Dann ist der zur Multiplikationaktion $G \times X \to X$ gehörige Homomorphismus $G \to S_X$, $g \mapsto (yH \mapsto gyH)$ inkektiv.

3. Sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und P eine p-Sylow Gruppe von G. Sei J, H Untergruppen von G, mit $P \leq J \leq H$. Zeigen Sie, dass p teilt $|H : J|$ nicht.

4.

1. Sei H eine p-Sylow Untergruppe einer endlichen Gruppe G. Beweisen Sie, dass H die einzige p-Sylow Untergruupe der Normalisatorgruppe $N_G(H)$ ist.
2. Sei $1 \neq H$ ein Normalteiler von S_4, so dass 3 teilt $|H|$ nicht. Zeigen Sie, dass $|H| = 4$.